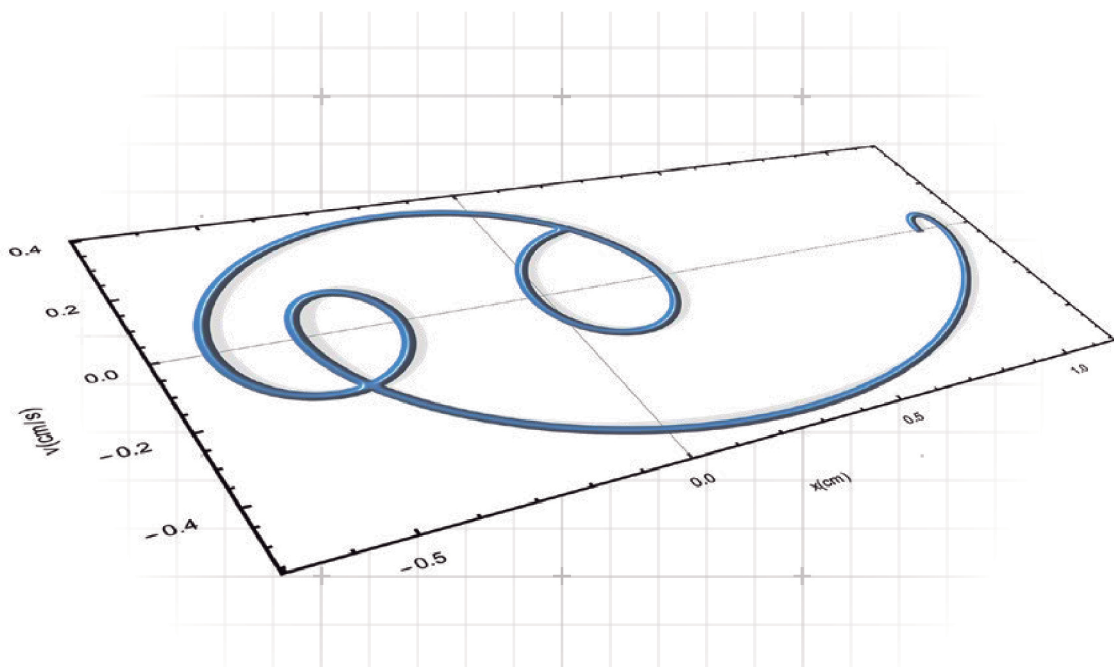


Notas introductorias de mecánica clásica



José Herman Muñoz Ñungo
Ramiro Uribe Kaffure
Carlos Eduardo Vera Aguirre



¡Construimos la universidad que soñamos!



José Herman Muñoz Ñungo

Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad del Tolima, magíster en Física de la Universidad de Antioquia, doctor en Física del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV) en México y posdoctorado en Física en el Centro Brasileiro de Pesquisas Física (CBPF). Premio Weizmann 1998 a la mejor tesis doctoral en Ciencias Exactas otorgado por la Academia Mexicana de Ciencias. Profesor de planta en el Departamento de Física de la Universidad del Tolima desde 1992. Ha orientado cursos de Física en pregrado y posgrado. Es autor de artículos científicos publicados en revistas internacionales y nacionales. Coordinador del Grupo de Investigación Física de Partículas – Teórico (QUARK), reconocido por COLCIENCIAS. Director de trabajos de grado en pregrado y posgrado y de proyectos de investigación en la Universidad del Tolima. Par evaluador de proyectos de investigación presentados a COLCIENCIAS, de artículos y libros de profesores de otras universidades colombianas y de estudiantes de maestría y doctorado.

Notas introductorias de mecánica clásica

José Herman Muñoz Ñungo
Ramiro Uribe Kaffure
Carlos Eduardo Vera Aguirre



¡Construimos la universidad que soñamos!

2023

Muñoz Nungo, José Herman

Notas introductorias de mecánica clásica / José Herman
Muñoz Nungo, Ramiro Uribe Kaffure, Carlos Eduardo Vera
Aguirre. -- 1ª. Ed. -- Ibagué : Sello Editorial Universidad del
Tolima, 2023.

274 p. : il., tablas

Contenido: Tópicos matemáticos fundamentales --
Elementos de la mecánica newtoniana -- Oscilaciones --
Formalismo lagrangiano -- Dos cuerpos sometidos a una
fuerza central.

ISBN: 978-628-7537-42-2

1. Física 2. Cinemática 3. Mecánica -- Problemas,
ejercicios, etc. 4. Dinámica I. Título II. Uribe Kaffure, Ramiro
III. Vera Aguirre, Carlos Eduardo

531

M971n

© Universidad del Tolima / Sello Editorial Universidad del Tolima, 2023.

© José Herman Muñoz Nungo, Ramiro Uribe Kaffure, Carlos Eduardo Vera Aguirre.

Notas introductorias de mecánica clásica

Primera edición.

ISBN versión electrónica: 978-628-7537-42-2

Número de páginas: 274

Ibagué - Tolima - Colombia

Grupo de Investigación en Materiales Semiconductores y Superiónicos, GIMSS.

Grupo de investigación Física de partículas - teórico, QUARK.

Facultad de Ciencias

Departamento de Física

Universidad del Tolima

publicaciones@ut.edu.co

jhmuno@ut.edu.co

Corrección de estilo, diseño, diagramación: Colors Editores S.A.S.

Ibagué, Tolima - Colombia.

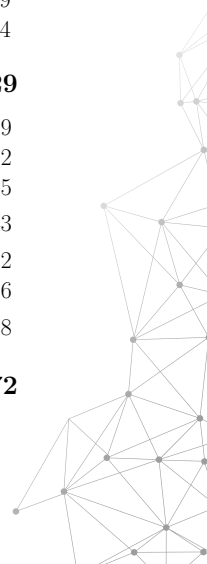
Todos los derechos reservados. Prohibida su reproducción total o parcial por cualquier medio, sin permiso expreso del autor.

Contenido

Prefacio	10
1. Tópicos matemáticos fundamentales	13
1.1. Matrices	13
1.2. Rotación de coordenadas	20
1.3. Escalar	22
1.4. Vector	22
1.5. Producto de un escalar por un vector	24
1.6. Producto escalar de dos vectores	24
1.7. Producto vectorial de dos vectores	29
1.8. Coordenadas cilíndricas y esféricas	31
1.8.1. Coordenadas cilíndricas	31
1.8.2. Coordenadas esféricas	33
1.9. Tensores	36
1.10. Derivada total de una función	44
1.11. Actividades complementarias	50
2. Elementos de la mecánica newtoniana	53
2.1. Cinemática de una partícula	54
2.2. Dinámica de una partícula	57
2.2.1. Leyes de Newton	58
2.2.2. Trabajo y energía	84
2.2.3. Momento angular	95
2.3. Dinámica de un sistema de partículas	95
2.3.1. Centro de masa	96
2.3.2. Momento lineal del sistema	99
2.3.3. Momento angular y torque en un sistema de partículas .	101
2.3.4. Teorema del trabajo y la energía en un sistema de partículas	104
2.3.5. Caso especial: cuerpo rígido	106
2.4. Actividades complementarias	112
3. Oscilaciones	117
3.1. Oscilaciones libres o armónicas	117
3.1.1. Masa atada a un resorte	117
3.1.2. Péndulo simple	118
3.1.3. Péndulo físico	120
3.1.4. Solución de la ecuación diferencial $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$	121

3.1.5.	Trayectoria del oscilador armónico simple en el espacio de fase	129
3.2.	Osciladores libres en dos dimensiones	131
3.3.	Oscilaciones amortiguadas	136
3.3.1.	Movimiento subamortiguado	137
3.3.2.	Movimiento con amortiguamiento crítico	141
3.3.3.	Movimiento sobreamortiguado	145
3.4.	Oscilaciones forzadas	147
3.5.	Osciladores armónicos acoplados	156
3.6.	Actividades complementarias	165
4.	Formalismo lagrangiano	169
4.1.	Conceptos importantes	169
4.1.1.	Ligaduras	169
4.1.2.	Grados de libertad	174
4.1.3.	Coordenadas generalizadas	174
4.2.	Principio de D'Alembert y ecuaciones de Lagrange	178
4.2.1.	Ecuación general de la estática o principio de los trabajos virtuales	179
4.2.2.	Ecuación general de la dinámica o principio de D'Alembert	179
4.2.3.	El principio de D'Alembert en coordenadas generalizadas	180
4.2.4.	Energía potencial dependiente de la velocidad	185
4.3.	Principio de Hamilton y ecuaciones de Lagrange	185
4.3.1.	Algunos resultados del cálculo de variaciones	185
4.3.2.	El principio de Hamilton	193
4.3.3.	Deducción de las ecuaciones de Lagrange a partir del principio de Hamilton	193
4.4.	Ecuaciones de Lagrange y multiplicadores de Lagrange	196
4.5.	Aplicaciones del formalismo lagrangiano	199
4.6.	Algunas propiedades de las ecuaciones de Lagrange	219
4.7.	Actividades complementarias	224
5.	Dos cuerpos sometidos a una fuerza central	229
5.1.	Reducción al problema equivalente de un cuerpo.	229
5.2.	Ecuaciones del movimiento.	232
5.3.	Clasificación de las órbitas.	235
5.4.	Ecuación diferencial de la órbita y potenciales integrables.	243
5.5.	Condiciones para órbitas circulares y estables.	252
5.6.	Problema de Kepler	256
5.7.	Actividades complementarias	268

Bibliografía	272
---------------------	------------



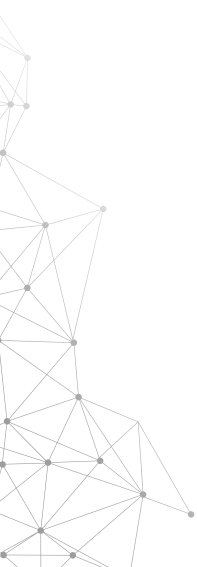
Lista de figuras

1.1. Rotación del sistema de coordenadas en un ángulo θ	20
1.2. Proyección del vector $\vec{B}$ sobre el vector $\vec{A}$	25
1.3. Coordenadas cilíndricas	32
1.4. Coordenadas esféricas	34
1.5. Molécula de agua	40
1.6. Triángulo rectángulo e isósceles	42
2.1. Vector desplazamiento.	55
2.2. Ley de acción y reacción	60
2.3. Doble plano inclinado	62
2.4. Diagramas de cuerpo libre en el doble plano inclinado	63
2.5. Masa atada a un resorte.	64
2.6. Cohete como sistema de masa variable	66
2.7. Posiciones horizontal y vertical de un proyectil en un medio resistivo como funciones del tiempo	68
2.8. Trayectoria del proyectil en un medio resistivo	69
2.9. Distancia radial como función del tiempo y como función de la coordenada horizontal para un proyectil en un medio resistivo	70
2.10. Partícula deslizándose sobre un cascarón esférico (diagrama de fuerzas)	72
2.11. Partícula en el interior de un paraboloides de revolución	74
2.12. Diagrama de fuerzas para una partícula moviéndose en el inte- rior de un paraboloides de revolución	75
2.13. Bloque deslizando sobre plano inclinado con movimiento horizontal.	78
2.14. Diagramas de cuerpo libre para las masas m_1 y m_2	79
2.15. Dos masas atadas por una cuerda con tensión variable	83
2.16. Curva de energía potencial $U(x)$ con algunos valores de la energía total indicados.	87
2.17. Variación de $1/x^p$, x^p y $1/x^p + x^p$ en función de x	90
2.18. Variación de $4/x^7$, $x^7/4$ y $4/x^7 + x^7/4$ en función de x . Paráme- tros $a = 4$, $p = 7$ y $E = 3$	91
2.19. Partícula descendiendo sobre la superficie de un cascarón esférico	93
2.20. Vector posición del centro de masa para un sistema de partículas.	96
2.21. Cuatro masas ubicadas en los vértices de un rectángulo de lados a y b	98
2.22. Triángulo rectángulo e isósceles ubicado en los cuadrantes I y II.	99
2.23. Posición relativa de una partícula respecto al centro de masa.	102

3.1. Péndulo simple.	119
3.2. Péndulo físico.	120
3.3. Relación entre las constantes de integración en la solución de la Ecuación Diferencial del Oscilador armónico simple	123
3.4. Posición, velocidad y aceleración en función del tiempo para el oscilador armónico simple	126
3.5. Energías cinética (color azul), potencial (color naranja) y total (color verde) para el oscilador libre en función del tiempo.	127
3.6. Trayectoria en el espacio de fase para el oscilador libre.	130
3.7. Trayectoria de dos osciladores armónicos perpendiculares con una diferencia de fase $\delta \approx 333,36^\circ$	134
3.8. Posición (color azul), velocidad (color naranja) y aceleración (color verde) en función del tiempo para el oscilador subamortiguado.	139
3.9. Energías cinética (color azul), potencial (color naranja) y total (color verde) en función del tiempo para el oscilador subamortiguado.	140
3.10. Variación temporal de la energía total en función del tiempo para el oscilador subamortiguado.	140
3.11. Trayectoria en el espacio de fase para el oscilador subamortiguado.	141
3.12. Posición (color azul), velocidad (color naranja) y aceleración (color verde) en función del tiempo para el oscilador con amortiguamiento crítico.	143
3.1.3. Energías cinética, potencial y total en función del tiempo para el oscilador con amortiguamiento crítico	143
3.14. Variación de la energía total en función del tiempo para el oscilador con amortiguamiento crítico.	144
3.15. Trayectoria en el espacio de fase para el oscilador con amortiguamiento crítico.	144
3.16. Posición (color azul), velocidad (color naranja) y aceleración (color verde) en función del tiempo para el oscilador sobreamortiguado.	145
3.17. Energías cinética (color azul), potencial (color naranja) y total (color verde) en función del tiempo para el oscilador sobreamortiguado.	146
3.18. Variación de la energía total en función del tiempo para el oscilador sobreamortiguado.	146
3.19. Trayectoria en el espacio de fase para el oscilador sobreamortiguado.	147
3.20. Gráfica de la diferencia de fase δ en función de la frecuencia ω	149
3.21. Gráfica de la amplitud D en función de la frecuencia ω . La amplitud es máxima en $\omega = \omega_R = 2$	152
3.22. Posición (color azul), velocidad (color naranja) y aceleración (color verde) en función del tiempo para el oscilador forzado.	153
3.23. Energías cinética (color azul), potencial (color naranja) y total (color verde) en función del tiempo para el oscilador forzado.	153

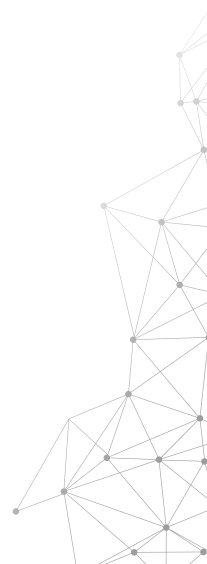


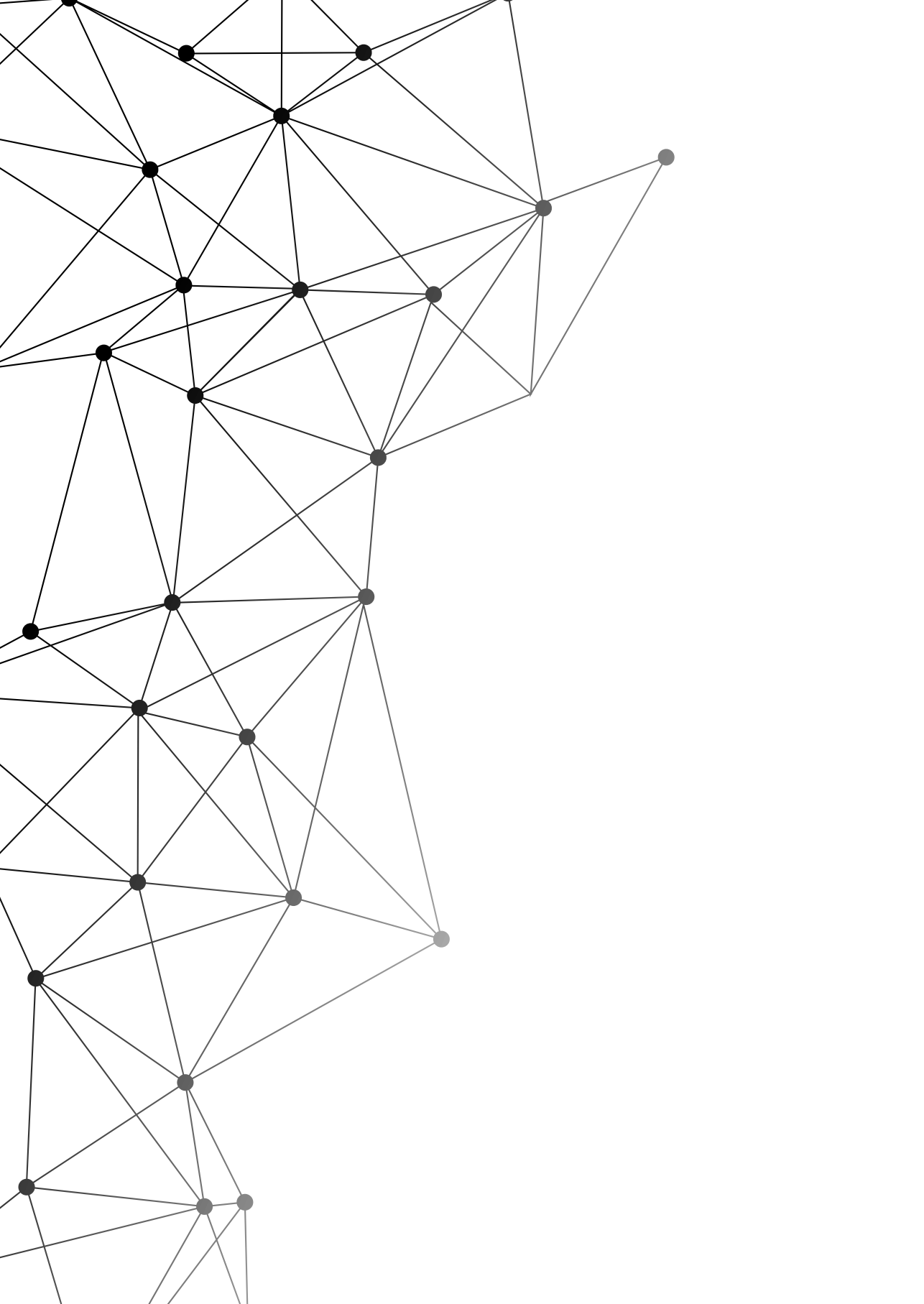
3.24. Variación de la energía total en función del tiempo para el oscilador forzado.	154
3.25. Trayectoria en el espacio de fase para el oscilador forzado.	154
3.26. Dos osciladores armónicos acoplados.	156
3.27. Molécula triatómica lineal y simétrica.	164
4.1. Máquina de Atwood.	170
4.2. Máquina de Atwood doble.	171
4.3. Péndulo doble.	172
4.4. Movimiento parabólico.	175
4.5. Aro rodando sobre un plano inclinado.	177
4.6. Bloque deslizando sobre plano inclinado con movimiento horizontal.	208
4.7. Aceleraciones $\ddot{X}$, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ y a_m en función del ángulo θ	211
4.8. Masa deslizando sobre la superficie de un cilindro	213
4.9. Partícula deslizando sobre medio cascarón esférico	216
5.1. Dos masas sometidas a una fuerza central.	230
5.2. Fuerzas y potenciales central, centrífuga y efectiva en función de r , para $(\vec{F} = -\hat{r}k/r^n)$	238
5.3. Fuerzas y potenciales central, centrífuga y efectiva en función de r , para $(\vec{F} = -\hat{r}k/r)$	239
5.4. Fuerzas y potenciales central, centrífuga y efectiva en función de r , para $(\vec{F} = -\hat{r}k/r^2)$	239
5.5. Fuerzas y potenciales central, centrífuga y efectiva en función de r , para $(\vec{F} = -\hat{r}k/r^3)$	240
5.6. Fuerzas y potenciales central, centrífuga y efectiva en función de r , para $(\vec{F} = -\hat{r}k/r^4)$	240
5.7. Fuerzas y potenciales central, centrífuga y efectiva en función de r , para $(\vec{F} = -\hat{r}k/r^5)$	241
5.8. Variación del punto crítico de U_{ef} con relación a n	242
5.9. Órbita para partícula sometida a un potencial $U = (1/2)kr^2$ dada por la Ecuación 5.26 con $\alpha = 1$	249
5.10. <i>Izquierda:</i> Órbitas para $\epsilon = 0$. ; <i>Derecha:</i> Órbitas para $\epsilon = 0,7$	259
5.11. <i>Izquierda:</i> Órbitas para $\epsilon = 1$. ; <i>Derecha:</i> Órbitas para $\epsilon = 2$	260
5.12. Potenciales central ($= -k/r + h/r^2$), centrífugo ($= l^2/2\mu r^2$) y efectivo ($= -k/r + h/r^2 + l^2/2\mu r^2$) en función de r con $k = 1$, $l = 2$, $\mu = 2$ y $h = 0,5$	266



_____. Lista de tablas

3.1. Período para algunos sistemas físicos que presentan movimiento armónico simple.	125
3.2. Fase inicial ϕ para algunos valores de $x(t = 0) = x_0$	126
5.1. Fuerzas centrales del tipo $f(r) = -k/r^n$ con su respectivo potencial $U(r) = -\int f(r)dr$	237





Prefacio

El presente documento es una guía para el curso nivelatorio de Mecánica Clásica que en la Universidad del Tolima se ofrece a los estudiantes que ingresan a la Maestría en Física, procedentes de carreras de pregrado que no incluyen en sus planes de estudio una sólida formación en física o en matemáticas, como la requerida para adelantar el curso de Mecánica Clásica a nivel de maestría. No se trata de un texto que sustituya la formación que proporciona un pregrado en Física, sino un compendio breve y conciso de temas que, a lo largo de los últimos diez años, hemos identificado como fundamentales para los estudiantes que cursan la asignatura Mecánica Clásica de la Maestría en Física.

A partir de nuestra experiencia como profesores de la Maestría en Física de la Universidad del Tolima, hemos recopilado en estas notas de clase algunos temas de carácter físico y matemático que los estudiantes deben abordar antes de cursar formalmente la asignatura Mecánica Clásica, a nivel de maestría.

Para elaborar estas notas consideramos como referencias primarias los libros *Mecánica Clásica* de Goldstein-Poole-Safko [1] y *Dinámica Clásica de Partículas y Sistemas* de Thornton-Marion [2], textos a partir de los cuales se orienta la asignatura Mecánica Clásica en la Maestría en Física en la Universidad del Tolima. Como fuentes secundarias, de donde se tomaron algunos ejemplos o problemas, están las referencias [3–7]. Como documentos complementarios, se utilizaron los libros [8–19] y las notas de clase [20–26], principalmente para revisar detalles de organización y presentación de algunos temas.

Algunos de los contenidos se describen detalladamente, según el criterio y la experiencia de los autores. Se presentan ejemplos, preguntas y ejercicios de nivel básico e intermedio, para que el estudiante reflexione y complemente el aprendizaje. Con esto se pretende que el estudiante esté mejor preparado para abordar, durante el curso formal de Mecánica Clásica, problemas de mayor nivel en los cuales se evidencie todo el potencial de las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana.

Es necesario aclarar que estas notas de clase no son, por supuesto, un texto nuevo en Mecánica Clásica, área en la cual es limitada la innovación teórica. No obstante, como elemento diferenciador, hemos hecho un esfuerzo por presentar un desarrollo muy detallado en varias secciones y ejemplos. Además, exponemos generalizaciones, extensiones o gráficas de algunos problemas tradicionales que no han sido aún reportadas en la literatura, según nuestra revisión bibliográfica.

Otro elemento que consideramos diferenciador lo constituye el hecho de que, a lo largo del texto, motivamos el uso de herramientas computacionales para resolver algunos ejercicios y ejemplos, en los que presentamos explícitamente los comandos utilizados. Particularmente, usamos el programa *Wolfram Mathematica*® debido a que sus capacidades numéricas, simbólicas y gráficas facilitan el rápido desarrollo de procedimientos matemáticos engorrosos o complejos, lo que permite enfocar la atención hacia la comprensión de los conceptos físicos.

Así mismo, al final de cada capítulo se incluye una sección de actividades complementarias en la cual se recomienda la lectura de referencias que permiten profundizar en algunos de los temas abordados. De igual manera, en estas secciones se presentan artículos, varios de ellos recientes, publicados en revistas de física y de enseñanza de la física, que contienen formulaciones alternas a las presentadas y que motivan al estudiante a pensar en variantes que puedan efectuarse en algunos de los sistemas físicos mencionados.

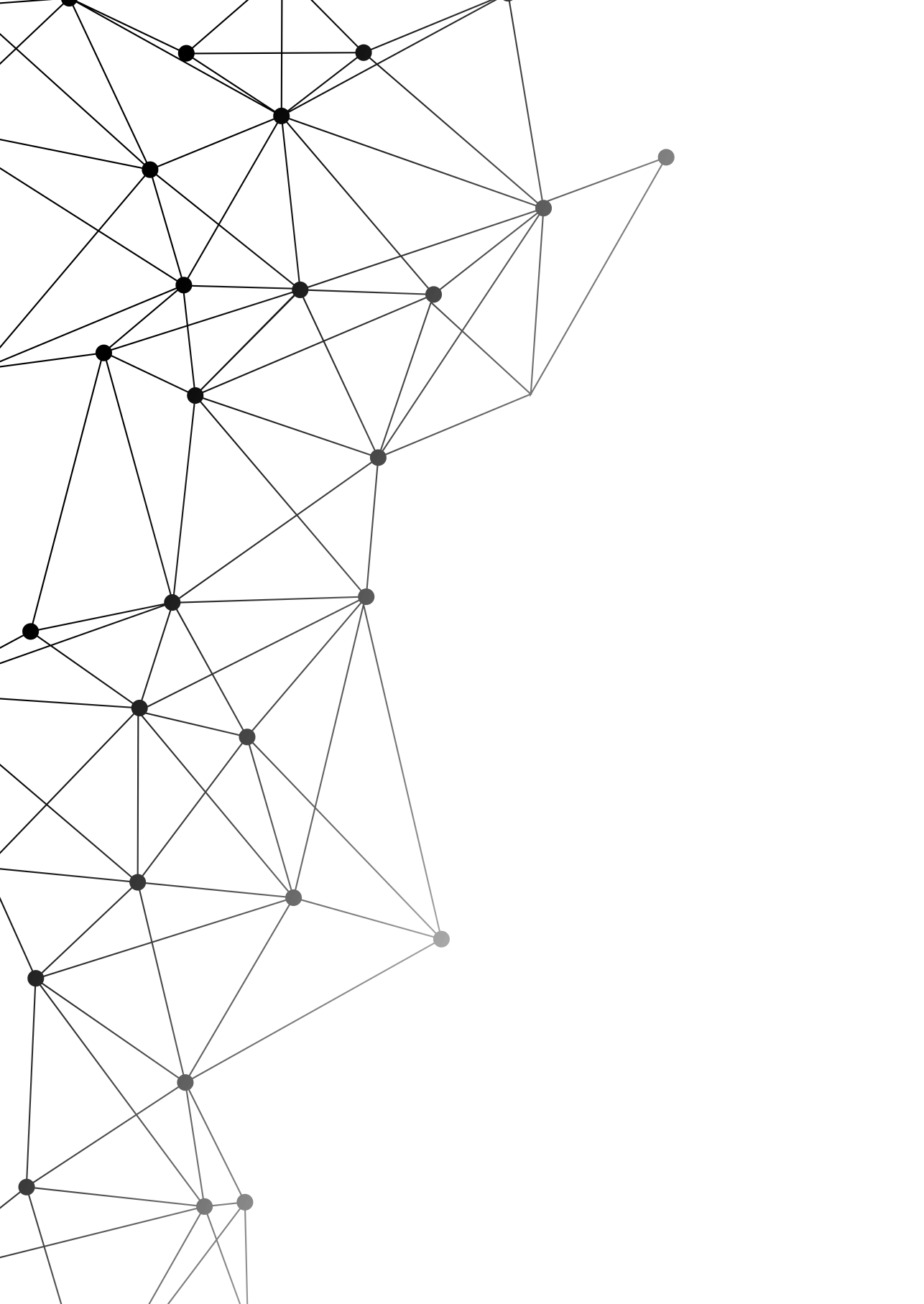
El **capítulo 1** constituye otro elemento diferenciador de estas notas de clase. En él se presenta una selección, breve y concisa, de temas necesarios para entender y desarrollar gran parte de los procedimientos matemáticos requeridos en la asignatura. Los temas seleccionados son aquellos en que los estudiantes presentan más dificultades, de acuerdo con la experiencia de los autores como profesores en este curso. Nuestra intención con este capítulo es exponer, explícitamente, una buena parte de los pasos matemáticos, para facilitarle al estudiante el desarrollo de procedimientos complejos y permitirle dedicar mayor tiempo a la comprensión de los conceptos físicos. No todos los temas que se incluyen se utilizan en los siguientes capítulos. Sin embargo, todos los temas considerados son un soporte matemático al abordar contenidos como: formalismos lagrangiano y hamiltoniano, transformaciones canónicas, cuerpo rígido y oscilaciones acopladas.

El presente libro se desarrolla bajo la siguiente estructura. En el capítulo 1 se tratan tópicos matemáticos básicos que se requieren en un curso de Mecánica Clásica a nivel de maestría. En el **capítulo 2**, se hace una introducción al formalismo newtoniano. Posteriormente, en el **capítulo 3**, se estudian oscilaciones libres, amortiguadas, forzadas y acopladas. En el **capítulo 4**, se presenta un preámbulo al formalismo lagrangiano. Por último, en el **capítulo 5**, se estudia el movimiento de dos cuerpos sometidos a una fuerza central.

La experiencia a partir de la utilización de estas notas nos ha mostrado que, además de servir como guía al curso introductorio, se han convertido en un documento de consulta ágil y práctico de algunos temas, incluso durante el desarrollo del curso formal de Mecánica Clásica en la maestría, ya que permiten ganar tiempo y facilitan la interpretación y el análisis físico que resulta de la interacción con el profesor.

Los autores

23 de noviembre de 2022



1

Tópicos matemáticos fundamentales

Este capítulo presenta, con enfoque práctico, una recopilación de tópicos matemáticos sobre los cuales se debe tener conocimiento mínimo y previo al estudiar diversas formulaciones de la mecánica clásica. Asumimos que el lector está familiarizado con las nociones básicas del cálculo y el álgebra lineal.

1.1. Matrices

Una matriz $\mathbf{C}$ de tamaño (o dimensión) $m \times n$ es un arreglo bidimensional de mn elementos (o componentes) ordenados de la siguiente forma:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Los elementos de la matriz $\mathbf{C}$ se representan por c_{ij} , donde el subíndice $i = 1, \dots, m$ indica el número de la fila y $j = 1, \dots, n$ el número de la columna.

A continuación se relacionan algunas operaciones entre matrices:

Suma de matrices. Consideremos dos matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ de dimensión $m \times n$ (en adelante matrices $m \times n$); si $\mathbf{C}$ es la matriz que resulta de la suma de estas dos matrices, $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, entonces, las componentes de $\mathbf{C}$ están dadas por

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Producto de dos matrices. Sean $\mathbf{A}$ una matriz $m \times n$ y $\mathbf{B}$ una matriz $n \times p$, se define su producto, $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ como una matriz $m \times p$, cuyas componentes son:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

En general, el producto entre dos matrices no es conmutativo.

Producto directo (o tensorial) entre matrices. Consideremos dos matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ cuyas componentes son A_{mn} y B_{pq} , respectivamente. El producto tensorial entre las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se denota por $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ y está dado por

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & \dots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix}_{mp \times nq}$$

Traza de una matriz. Sea $\mathbf{A}$ una matriz $n \times n$. La traza de $\mathbf{A}$ se define como la suma de los elementos de la diagonal. Es decir, $Tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. La traza del producto de dos matrices es independiente del orden de la multiplicación. Sea la matriz $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, entonces:

$$\begin{aligned} Tr(\mathbf{AB}) &= \sum_i c_{ii} \\ &= \sum_i \sum_p a_{ip} b_{pi} \\ &= \sum_p \sum_i b_{pi} a_{ip} \\ &= \sum_p c_{pp} \\ Tr(\mathbf{AB}) &= Tr(\mathbf{BA}). \end{aligned}$$

Por otra parte, la traza de la suma de dos matrices es la suma de las trazas de las matrices.

Determinante de una matriz. Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuyos elementos están dados por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & \dots \end{pmatrix}.$$

El determinante de la matriz $\mathbf{A}$ se define como:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i,j,k,\dots} \epsilon_{ijk\dots} a_i b_j c_k \dots$$

donde $\epsilon_{ijk\dots}$ es la generalización del denominado símbolo de permutación (o tensor) de *Levi-Civita*, el cual está definido como:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si el número de permutaciones de los subíndices es par} \\ -1 & \text{si el número de permutaciones de los subíndices es impar} \\ 0 & \text{si al menos dos subíndices son iguales} \end{cases} \quad (1.2)$$

con $i, j = 1, 2, 3$ y $\epsilon_{123} = 1$. De forma explícita tenemos: $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1$ y $\epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1$. Con esta definición, el determinante de una matriz es la suma (o resta) de productos de elementos de la matriz, sin repetir filas y columnas.

Algunas matrices importantes son las siguientes:

- **Matriz identidad.** Es una matriz $n \times n$ cuyos elementos de la diagonal principal son todos unos (1) y el resto de elementos son ceros (0). Se representa por

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que $Tr(\mathbf{I}) = n$.

- **Matriz inversa.** La inversa de la matriz $\mathbf{A}$ se denota por $\mathbf{A}^{-1}$ y cumple con $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.
- **Matriz transpuesta.** La matriz transpuesta de $\mathbf{A}$ se simboliza por $\mathbf{A}^T$. Los elementos de $\mathbf{A}^T$ se obtienen intercambiando filas por columnas.

$$\text{Si } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Matriz simétrica.** Una matriz se denomina simétrica si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, es decir, si $a_{ij} = a_{ji}$. El número de componentes independientes de una matriz simétrica de dimensión $n \times n$ es $\frac{n(n+1)}{2}$.
- **Matriz antisimétrica.** Una matriz se denomina antisimétrica si $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, es decir, si $a_{ij} = -a_{ji}$. Para cumplir esta condición, los elementos de la diagonal deben ser todos cero y, por lo tanto, la traza de una matriz antisimétrica es igual a cero. El número de componentes independientes de una matriz simétrica de dimensión $n \times n$ es $\frac{n(n-1)}{2}$.

Toda matriz se puede descomponer en una matriz simétrica más una matriz antisimétrica. Si c_{ij} son las componentes de la matriz $\mathbf{C}$, entonces:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \frac{1}{2}c_{ij} + \frac{1}{2}c_{ij} \\ &= \frac{1}{2}(c_{ij} + c_{ji}) + \frac{1}{2}(c_{ij} - c_{ji}) \\ &= \mathbb{S}_{ij} + \mathbb{A}_{ij}. \end{aligned}$$

Al intercambiar los índices i y j ($i \leftrightarrow j$) se obtiene $\mathbb{S}_{ij} = \mathbb{S}_{ji}$ y $\mathbb{A}_{ij} = -\mathbb{A}_{ji}$. La matriz $\mathbb{S}$ es simétrica, mientras que la matriz $\mathbb{A}$ es antisimétrica.

- **Matriz adjunta.** La adjunta de la matriz $\mathbf{A}$, denotada por $\mathbf{A}^\dagger$, es: $\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^*)^T = (\mathbf{A}^T)^*$, donde el símbolo «*» se refiere al complejo conjugado. Si la matriz es real, entonces la adjunta es igual a la transpuesta.
- **Matriz ortogonal.** Una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ es ortogonal si su transpuesta es igual a su inversa. Esto es:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}.$$

Nota. Las transformaciones propias (impropias) se representan por matrices ortogonales con determinante $1(-1)$.

- **Matriz unitaria.** Una matriz $\mathbf{A}$ es unitaria si $\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{I}$ (o equivalentemente, $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{-1}$). Esta definición es la generalización del concepto de matriz ortogonal al caso complejo.
- **Matriz hermítica.** Una matriz $\mathbf{A}$ es hermítica (o autoadjunta) si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$. Estas matrices son de mucha importancia en física, ya que se usan para representar observables en mecánica cuántica. Sus autovalores son reales y sus autovectores son ortonormales, es decir, forman una base del espacio al cual pertenezcan los vectores.

Transformación de similaridad. Consideremos las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ de dimensión $n \times n$, y su inversa. Una transformación de similaridad está dada por

$$\mathbf{A}' = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}.$$

Si la matriz $\mathbf{B}$ es ortogonal, la transformación de similaridad es ortogonal y si la matriz $\mathbf{B}$ es unitaria, la transformación de similaridad es unitaria.

A continuación se presentan algunas instrucciones para trabajar con matrices en el software *Wolfram Mathematica*® (en adelante *Mathematica*), el cual es una herramienta muy útil para realizar operaciones con matrices.

Código en *Mathematica*

```
In[1]:= A= {{5,0,0}, {0,3,-2}, {0,-2,3}} (*Genera la matriz A*)

Out[1]= {{5,0,0},{0,3,-2},{0,-2,3}}

In[2]:= MatrixForm[A] (*Muestra la matriz*)

Out[2]= 
$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$


In[3]:= Id=IdentityMatrix[3]//MatrixForm (*Genera la matriz
identidad 3x3*)

Out[3]= 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


In[4]:= Det[A] (*Calcula el determinante de la matriz*)

Out[4]= 25

In[5]:= Tr[A] (*Calcula la traza de la matriz*)

Out[5]= 11

In[6]:= Solve[Det[A- λ Id]==0, λ] (*Calcula los autovalores de
la matriz A*)

Out[6]= {{λ → 1},{λ → 5},{λ → 5}}

In[7]:= Eigenvalues[A] (*Otra forma de obtener los autovalores
de la matriz A*)

Out[7]= {5,5,1}

In[8]:= Eigenvectors[A] (*Devuelve los autovectores de la
matriz A*)

Out[8]= {{0,-1,1},{1,0,0},{0,1,1}}

In[9]:= A.A (*o MatrixPower[A,2]. Devuelve el producto de la
matriz A por si misma*)

Out[9]= {{25,0,0},{0,13,-12},{0,-12,13}}
```


Ejercicios

1.1 Obtener la traza y el determinante de cada una de las tres matrices de Pauli (σ_1 , σ_2 , σ_3):

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Además, verificar que son matrices hermíticas.

1.2 Hallar $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ y $\sigma_2 \otimes \sigma_3$.

1.3 Considere la matriz cuadrada $\mathbf{J}_{2n \times 2n}$ dada por

$$\begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{0} \end{pmatrix},$$

donde $\mathbb{0}$ representa una matriz $n \times n$ cuyos elementos son todos ceros y $\mathbb{1}$ representa la matriz identidad $n \times n$. Haga explícita la matriz $\mathbf{J}$ para $n = 2$.

Demuestre que $\mathbf{J}^2 = -\mathbf{I}_{2n}$, $\mathbf{J}^T \mathbf{J} = \mathbf{I}_{2n}$ (es decir, es ortogonal), $\mathbf{J}^T = -\mathbf{J}$ y $\det(\mathbf{J}) = 1$. Cabe mencionar que la matriz $\mathbf{J}$ se utiliza en el formalismo hamiltoniano y en las transformaciones canónicas.

1.4 Verificar que una matriz simétrica $n \times n$ tiene $\frac{n(n+1)}{2}$ elementos independientes y que una matriz antisimétrica tiene $\frac{n(n-1)}{2}$ elementos independientes.

1.5 Demostrar que el determinante y la traza de una matriz son invariantes ante una transformación de similitud.

1.6 Demostrar que la propiedad de hermiticidad es invariante ante una transformación de similitud unitaria (la transformación de similitud unitaria de una matriz hermítica da como resultado una matriz hermítica).

1.7 Demostrar que $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ y que $(\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger$.

1.2. Rotación de coordenadas

Consideremos dos sistemas cartesianos bidimensionales $X - Y$ y $X' - Y'$ con el mismo origen. El sistema primado está rotado un ángulo θ con respecto al sistema no primado en el sentido contrario a las manecillas del reloj (ver **Figura 1.1**). Un punto P ubicado a una distancia r del origen tiene coordenadas (x, y) o (x', y') relacionadas por

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Las dos ecuaciones anteriores se pueden escribir en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \vec{r}' = \mathbf{O} \vec{r}, \quad (1.4)$$

donde $\mathbf{O}$ es llamada *matriz de rotación*. Obsérvese que $\det(\mathbf{O}) = 1$ y que el producto de dos filas (o columnas) diferentes es 0, mientras que el producto de cada fila (o columna) por ella misma es 1. Además $\mathbf{O}\mathbf{O}^T = \mathbf{O}^T\mathbf{O} = \mathbf{I}$, donde $\mathbf{O}^T$ es la transpuesta de $\mathbf{O}$, e $\mathbf{I}$ es la matriz identidad. Es decir, la matriz de rotación es ortogonal.

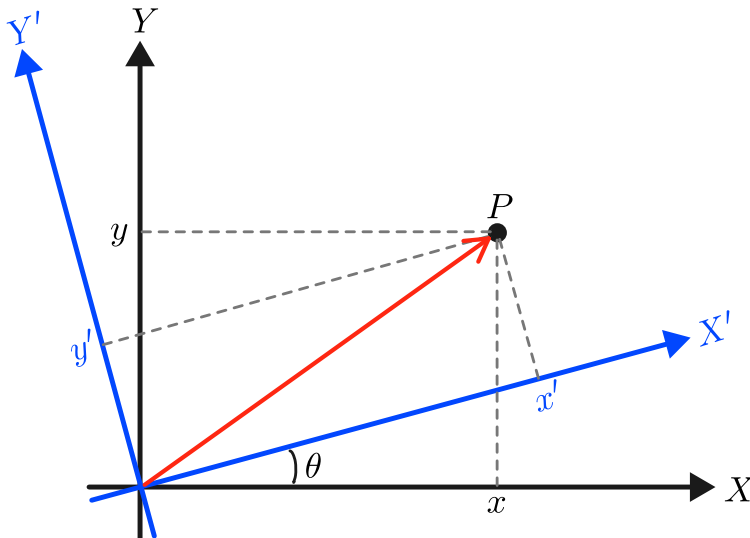


Figura 1.1: Rotación del sistema de coordenadas en un ángulo θ .

En tres dimensiones se tiene que

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o_{11} & o_{12} & o_{13} \\ o_{21} & o_{22} & o_{23} \\ o_{31} & o_{32} & o_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \iff \vec{r}' = \mathbf{O}\vec{r},$$

con

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 o_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, 3.$$

Los elementos o_{ij} son los *cosenos directores* (los cosenos de los ángulos entre los ejes x'_i y x_j dados por $\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$), los cuales satisfacen las condiciones de ortogonalidad

$$\sum_{i=1}^3 o_{ij}o_{ik} = \delta_{jk}, \quad \text{o equivalentemente} \quad \sum_{i=1}^3 o_{ji}o_{ki} = \delta_{jk}, \quad (1.5)$$

donde δ_{jk} es el *Delta de Kronecker*, definido de la siguiente manera:

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases} \quad (1.6)$$

Ejercicios

1.8 Obtener las **Ecuaciones (1.3)**.

1.9 A partir de la **Ecuación (1.4)**, obtener las coordenadas (x, y) en función de las coordenadas (x', y') (transformación inversa).

1.10 Verificar que la matriz de rotación $\mathbf{O}$ dada por la **Ecuación (1.4)** es ortogonal.

1.11 Escribir explícitamente las **Ecuaciones (1.5)**.

1.12 Demostrar que para ángulos pequeños la matriz de rotación $\mathbf{O}_{2 \times 2} \approx \mathbf{I} + i\theta\sigma_2 \approx e^{i\theta\sigma_2}$, donde σ_2 es matriz de Pauli:

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

1.13 Escribir la matriz de rotación asociada a rotaciones alrededor del eje X_3 .

1.3. Escalar

Una función escalar S es aquella que permanece invariante (no cambia) ante una transformación de coordenadas. Esto es: $S(x, y, z) = S(x', y', z')$.

Como ejemplos de escalares tenemos la temperatura, la masa, el tiempo, la carga eléctrica, la distancia entre dos puntos, etc.

Hay algunas cantidades que cambian de signo cuando se hace una inversión de ejes ($x'_i \rightarrow -x_i$); a estas se les llama pseudoescalares. Por ejemplo, el volumen (V) de un cuerpo es un pseudoescalar, ya que $V(x', y', z') = -V(x, y, z)$.

1.4. Vector

La cantidad $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$ es un vector si sus componentes se comportan ante una transformación de coordenadas de la siguiente forma:

$$V'_i = \sum_{j=1}^3 o_{ij} V_j \quad \Longleftrightarrow \quad V'_i = o_{ij} V_j. \quad (1.7)$$

En la última ecuación se ha usado la convención suma de Einstein para abreviar la expresión; en esta notación se entiende que hay una suma sobre el índice repetido. Los elementos o_{ij} corresponden a los elementos de la matriz de rotación O . La relación entre las componentes rotadas (V'_i) y no rotadas (V_i) del vector corresponde a una transformación lineal.

Como ejemplos de vectores tenemos las siguientes observables: desplazamiento, velocidad, aceleración, fuerza, momento lineal, momento angular (o cinético), torque (o momento de fuerza), etc. La **Expresión 1.7** se puede generalizar a un vector de N dimensiones $\vec{V} = (V_1, V_2, \dots, V_N)$. En este caso se tiene:

$$V'_i = o_{ij} V_j, \quad j = 1, \dots, N. \quad (1.8)$$

Todo vector se puede representar en forma general como $\vec{V} = V_i \hat{e}_i$ (usando la convención suma de Einstein), donde los $\hat{e}_i$ son vectores unitarios ortonormales que forman una *base* del espacio vectorial al que pertenecen.

La magnitud de un vector es un escalar y está dada por

$$V = |\vec{V}| = (V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_n^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.9)$$

Ejemplo 1.1

Sea $\vec{V} = (V_1, V_2) = (xyc_x + y^2c_y, -x^2c_x - xyc_y)$. Verificar que V_1 y V_2 satisfacen las reglas de transformación (1.8), donde c_x y c_y son las componentes de un vector constante $\vec{c}$.

Solución.

Las componentes rotadas del vector deben cumplir con la transformación lineal $V'_i = o_{ij}V_j$:

- $i = 1$: $V'_1 = y'(x'c'_x + y'c'_y)$. Desarrollamos primero el término dentro del paréntesis:

$$\begin{aligned} x'c'_x + y'c'_y &= (x \cos \theta + y \sin \theta)(c_x \cos \theta + c_y \sin \theta) \\ &\quad + (-x \sin \theta + y \cos \theta)(-c_x \sin \theta + c_y \cos \theta) \\ &= xc_x(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + yc_y(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= xc_x + yc_y. \end{aligned}$$

Podemos observar que este término es invariante bajo rotaciones (escalar) por lo que:

$$\begin{aligned} V'_1 &= y'(xc_x + yc_y) \\ &= (-x \sin \theta + y \cos \theta)(xc_x + yc_y) \\ &= (xyc_x + y^2c_y) \cos \theta + (-x^2c_x - xyc_y) \sin \theta \\ &= V_1 \cos \theta + V_2 \sin \theta = O_{11}V_1 + O_{12}V_2. \end{aligned}$$

- $i = 2$: $V'_2 = -x'(x'c'_x + y'c'_y)$.

$$\begin{aligned} V'_2 &= -x'(xc_x + yc_y) \\ &= -(x \cos \theta + y \sin \theta)(xc_x + yc_y) \\ &= -(xyc_x + y^2c_y) \sin \theta + (-x^2c_x - xyc_y) \cos \theta \\ &= -V_1 \sin \theta + V_2 \cos \theta = O_{21}V_1 + O_{22}V_2. \end{aligned}$$

De esta manera, se ha mostrado que las componentes V'_1 y V'_2 satisfacen las reglas de transformación (1.8).

Ejercicio

1.14 Demostrar que la magnitud del vector $\vec{V} = (V_1, V_2)$ es invariante ante una transformación de coordenadas.

1.5. Producto de un escalar por un vector

El producto de un escalar (λ) por un vector ($\vec{A}$) produce como resultado otro vector. Algunos observables en física tienen esta estructura. Por ejemplo, $\vec{F} = m\vec{a}$, $\vec{p} = m\vec{v}$ y $\vec{F} = q\vec{E}$, donde los vectores $\vec{F}$, $\vec{a}$, $\vec{p}$, $\vec{v}$, $\vec{E}$ denotan fuerza, aceleración, momento lineal, velocidad y campo eléctrico, respectivamente, y los escalares m y q se refieren a la masa y a la carga, en su orden.

Derivada respecto al tiempo del producto $\lambda\vec{A}$:

$$\frac{d(\lambda\vec{A})}{dt} = \frac{d\lambda}{dt}\vec{A} + \lambda\frac{d\vec{A}}{dt}. \quad (1.10)$$

Los dos términos del lado derecho de la ecuación anterior son vectores. Esta expresión se usa, por ejemplo, en la segunda ley de Newton cuando la masa de la partícula *no es constante*. En este caso la segunda ley de Newton es:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}.$$

Preguntas. (1) ¿Qué efecto se produce en un vector cuando se multiplica por un escalar? ¿Cambia su dirección? ¿Cambia su magnitud? (2) ¿Conoce algunos sistemas físicos donde la masa varíe con el tiempo? Mencione algunos ejemplos.

1.6. Producto escalar de dos vectores

Consideremos los vectores $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \equiv \sum_{i=1}^3 A_i\hat{e}_i$ y $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k} \equiv \sum_{i=1}^3 B_i\hat{e}_i$, donde $\hat{e}_1 = \hat{i}$, $\hat{e}_2 = \hat{j}$ y $\hat{e}_3 = \hat{k}$. El *producto escalar* (o producto punto) entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ está definido por la expresión:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta, \quad (1.11)$$

donde θ es el ángulo entre los dos vectores. Obsérvese que $B\cos\theta$ es la proyección del vector $\vec{B}$ sobre el vector $\vec{A}$ (ver **Figura 1.2**), y que el producto escalar es *cero* cuando los dos vectores son *perpendiculares*. Además, si $0 \leq \theta \leq \pi$, entonces, $-AB \leq \vec{A} \cdot \vec{B} \leq AB$.

Si $\vec{A} = \vec{B}$ en la **Ecuación 1.11**, se obtiene la magnitud del vector mediante el producto escalar:

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{A} &= A^2, \\ A &= \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}.\end{aligned}\tag{1.12}$$

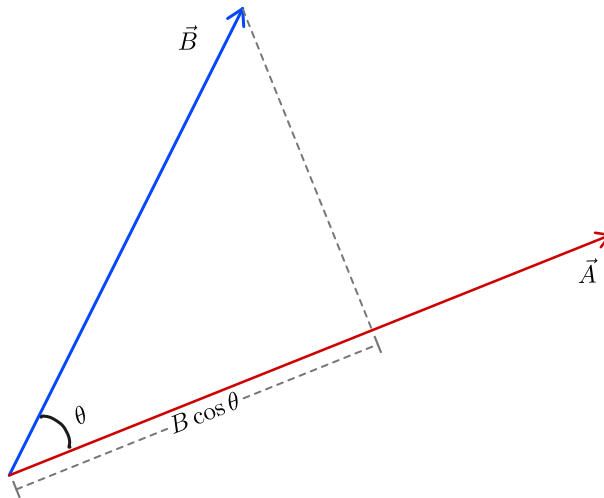


Figura 1.2: Proyección del vector $\vec{B}$ sobre el vector $\vec{A}$.

Una cantidad física que se define mediante el producto escalar es el *trabajo mecánico* (W) realizado por una fuerza $\vec{F}$, cuando la partícula se desplaza de una posición a otra: $W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r} = F(\Delta r) \cos \theta$, donde $\vec{\Delta r}$ es el vector desplazamiento y $\vec{F}$ es la fuerza que actúa sobre la partícula. Nótese que cuando estos dos vectores son perpendiculares, la fuerza $\vec{F}$ no realiza trabajo sobre el cuerpo.

Algunas propiedades del producto escalar:

- Es conmutativo: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
- Es distributivo respecto a la suma de vectores: $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{B}) + (\vec{A} \cdot \vec{C})$
- Es asociativo respecto al producto por un escalar λ : $\lambda(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\lambda\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (\lambda\vec{B})$.

En general,

$$\begin{aligned}
 \vec{A} \cdot \vec{B} &= \left(\sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 B_j \hat{e}_j \right) \\
 &= \sum_{i,j=1}^3 A_i B_j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j \\
 &= \sum_{i=1}^3 A_i B_i = A_i B_i,
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

donde se usó la convención suma o convención de Einstein en el último término. Además, se asumió que

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}, \tag{1.14}$$

con δ_{ij} simbolizando el Delta de Kronecker (ver **Ecuación (1.6)**).

Derivada respecto al tiempo de un producto escalar:

$$\frac{d(\vec{A} \cdot \vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} \tag{1.15}$$

Observe que el resultado de esta derivada es un escalar.

Ejemplo 1.2

Demostrar que para una partícula de masa constante m

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad (1.16)$$

donde $\vec{v}$ es la velocidad de la partícula, T es la energía cinética ($\frac{1}{2}mv^2$) y $\vec{F}$ es la fuerza que actúa sobre la partícula ($\frac{d\vec{p}}{dt}$), con $\vec{p} = m\vec{v}$ denotando el momento lineal.

Solución.

En la **Ecuación (1.15)** asuma que los dos vectores son iguales: $\vec{A} = \vec{B} \equiv \vec{v}$:

$$\frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2 \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}, \quad (1.17)$$

es decir,

$$\frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}.$$

Al multiplicar la ecuación anterior por la masa m se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d(\frac{1}{2}mv^2)}{dt} &= \frac{d(m\vec{v})}{dt} \cdot \vec{v}, \\ \frac{dT}{dt} &= \vec{F} \cdot \vec{v}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Pregunta. ¿Cómo cambia esta ecuación si la masa m no es constante?

Ejercicios

1.15 Utilizando la definición de producto escalar, hallar un vector perpendicular al vector $\vec{M} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$. ¿El vector hallado es único?

1.16 Dados los vectores $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ y $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$, hallar el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ y el ángulo entre los dos vectores.

1.17 Verificar que $\delta_{ii} = 3$ y que $C_i = C_j \delta_{ij}$.

1.18 La ecuación de un plano es $x + y + z = 0$. Escribir esta expresión como un producto escalar entre dos vectores. ¿Qué concluye?

1.19 Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen la misma magnitud. Suponga que la magnitud de la diferencia entre ellos ($|\vec{A} - \vec{B}|$) es 100 veces la magnitud de su suma ($|\vec{A} + \vec{B}|$). ¿Qué ángulo forman los vectores? ¿Podrían ser perpendiculares?

1.20 ¿Cómo cambia el producto escalar de dos vectores ante una inversión de coordenadas ($x_i \rightarrow -x_i, i = 1, 2, 3$)?

1.7. Producto vectorial de dos vectores

El producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es otro vector, perpendicular al plano determinado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Su dirección está determinada por la regla de la mano derecha y su magnitud por

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta, \quad (1.19)$$

donde θ es el ángulo entre los vectores. A partir de esta expresión se concluye que si los dos vectores son *paralelos*, su producto vectorial es *cero*.

En física hay varias cantidades que se definen u obtienen a partir de un producto vectorial. Por ejemplo, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ y $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, donde $\vec{L}$ es el momento cinético o angular, $\vec{\tau}$ es el torque o momento de una fuerza, $\vec{\omega}$ es la velocidad angular y $\vec{r}$ es el vector posición de la partícula; $\vec{v}$, $\vec{p}$ y $\vec{F}$ denotan la velocidad, el momento lineal y la fuerza, respectivamente.

Otra forma de hallar el producto vectorial es a través del determinante

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \quad (1.20)$$

Utilizando propiedades de determinantes se demuestra que $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$. En forma compacta, la i -ésima componente de $\vec{A} \times \vec{B}$ se puede escribir como:

$$(\vec{A} \times \vec{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k, \quad (1.21)$$

donde ϵ_{ijk} es el tensor *Levi-Civita* (ver **Ecuación (1.2)**).

Derivada respecto al tiempo de un producto vectorial:

$$\frac{d(\vec{A} \times \vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}. \quad (1.22)$$

Ejercicios

1.21 Considere la matriz (trabajada al final de la **Sección 1.1**)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Con ayuda del *Mathematica*, comprobar que los autovectores de la matriz $\mathbf{A}$ son perpendiculares entre sí. Como veremos más adelante, en el caso en que $\mathbf{A}$ esté asociada al tensor de inercia de un cuerpo rígido, estos tres vectores indican la dirección de los *ejes principales* del cuerpo rígido. En este ejemplo, uno de ellos corresponde al eje X y los otros dos se encuentran en el plano YZ.

1.22 Demostrar que:

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B})^2 &= (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = A^2 B^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2, \\ \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}), \\ \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}), \\ (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) &= (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C}). \end{aligned}$$

1.23 Demostrar que $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ipq} = \delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kp} \equiv \begin{vmatrix} \delta_{jp} & \delta_{jq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix}$. *Sugerencia:* partir de la tercera ecuación del punto anterior.

1.24 ¿Qué condiciones deben cumplir los vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$ para que el momento angular de un cuerpo, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, sea cero?

1.25 ¿Qué condiciones deben cumplir los vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$ para que el momento angular de un cuerpo, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, sea un valor constante diferente de cero?

1.26 ¿Cómo cambia el producto vectorial de dos vectores ante una inversión de coordenadas ($x_i \rightarrow -x_i, i = 1, 2, 3$)?

1.8. Coordenadas cilíndricas y esféricas

1.8.1. Coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas están dadas por (ver **Figura 1.3**):

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \phi = \arctan \frac{y}{x}; \quad z = z, \quad (1.23)$$

donde

$$x = \rho \cos \phi; \quad y = \rho \sin \phi. \quad (1.24)$$

Los vectores unitarios de las coordenadas cilíndricas en términos de los vectores unitarios cartesianos están dados por:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \frac{\frac{d\vec{r}}{d\rho}}{\left| \frac{d\vec{r}}{d\rho} \right|} = \hat{i} \cos \phi + \hat{j} \sin \phi, \\ \hat{\phi} &= \frac{\frac{d\vec{r}}{d\phi}}{\left| \frac{d\vec{r}}{d\phi} \right|} = -\hat{i} \sin \phi + \hat{j} \cos \phi, \\ \hat{z} &= \hat{z}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Los vectores posición, velocidad y aceleración pueden ser escritos como:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \rho \hat{\rho} + z \hat{z}, \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\hat{\rho}} + \dot{z} \hat{z}, \\ \ddot{\vec{r}} &= \ddot{\rho} \hat{\rho} + 2\dot{\rho} \dot{\hat{\rho}} + \rho \ddot{\hat{\rho}} + \ddot{z} \hat{z}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

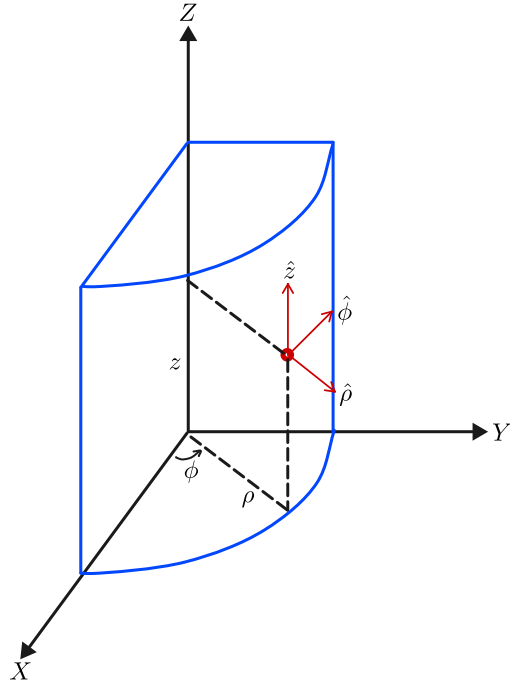


Figura 1.3: Coordenadas cilíndricas.

A partir de las **Ecuaciones (1.25)** se obtiene $\dot{\hat{\rho}} = \dot{\phi}\hat{\phi}$ y $\ddot{\hat{\rho}} = \ddot{\phi}\hat{\phi} - \dot{\phi}^2\hat{\rho}$. Reemplazando estas expresiones en $\ddot{\vec{r}}$ y $\dot{\vec{r}}$ (dadas por las **Ecuaciones (1.26)**) se obtienen las componentes de la velocidad y la aceleración en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} v_{\rho} &= \dot{\rho}, \\ v_{\phi} &= \rho\dot{\phi}, \\ v_z &= \dot{z} \end{aligned} \tag{1.27}$$

y

$$\begin{aligned} a_\rho &= \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2, \\ a_\phi &= \rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}, \\ a_z &= \ddot{z}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

1.8.2. Coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas se definen como (ver **Figura 1.4**):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \theta = \arccos \frac{z}{r}; \quad \phi = \arctan \frac{y}{x}, \quad (1.29)$$

donde $\theta \in [0, \pi]$; $\phi \in [0, 2\pi]$ y

$$x = r \sin \theta \cos \phi; \quad y = r \sin \theta \sin \phi; \quad z = r \cos \theta. \quad (1.30)$$

Los vectores unitarios de las coordenadas esféricas en términos de los vectores unitarios cartesianos están dados por:

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \frac{\frac{d\vec{r}}{dr}}{\left| \frac{d\vec{r}}{dr} \right|} = \hat{i} \sin \theta \cos \phi + \hat{j} \sin \theta \sin \phi + \hat{k} \cos \theta, \\ \hat{\theta} &= \frac{\frac{d\vec{r}}{d\theta}}{\left| \frac{d\vec{r}}{d\theta} \right|} = \hat{i} \cos \theta \cos \phi + \hat{j} \cos \theta \sin \phi - \hat{k} \sin \theta, \\ \hat{\phi} &= \frac{\frac{d\vec{r}}{d\phi}}{\left| \frac{d\vec{r}}{d\phi} \right|} = -\hat{i} \sin \phi + \hat{j} \cos \phi. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Los vectores posición, velocidad y aceleración pueden ser escritos como:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r\hat{r}, \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}}, \\ \ddot{\vec{r}} &= \ddot{r}\hat{r} + 2\dot{r}\dot{\hat{r}} + r\ddot{\hat{r}}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

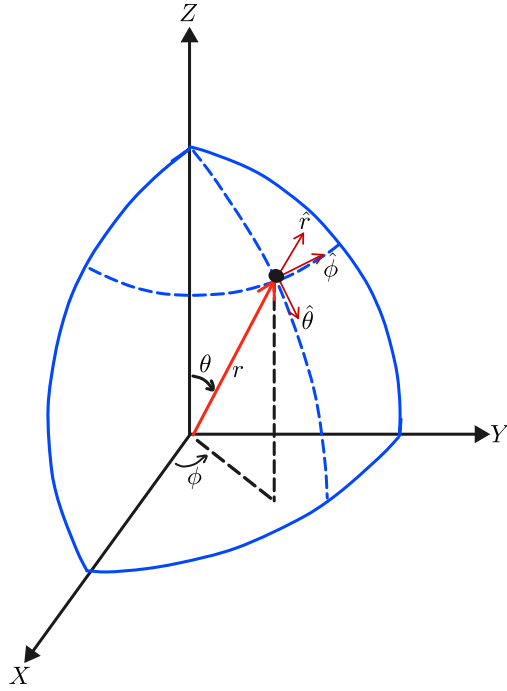


Figura 1.4: Coordenadas esféricas.

A partir de las **Ecuaciones (1.31)** se obtiene $\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}$ y $\ddot{\hat{r}} = -(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta)\hat{r} + (\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta} + (\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\hat{\phi}$. Al sustituir estas expresiones en $\dot{\vec{r}}$ y $\ddot{\vec{r}}$ (dadas por las **Ecuaciones (1.32)**) se obtienen las componentes de la velocidad y la aceleración en coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r}, \\ v_\theta &= r\dot{\theta}, \\ v_\phi &= r\sin\theta\dot{\phi} \end{aligned} \tag{1.33}$$

y

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2, \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2, \\ a_\phi &= r\sin\theta\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Ejemplo 1.3

A partir de las **Ecuaciones (1.31)** obtener $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$, en función de los vectores unitarios en coordenadas esféricas.

Solución.

(a) Tomando la derivada respecto al tiempo de la primera de las **Ecuaciones (1.31)** se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{r}} &= \dot{\hat{i}}\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - \dot{\hat{i}}\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi + \dot{\hat{j}}\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + \dot{\hat{j}}\dot{\phi}\sin\theta\cos\phi - \dot{\hat{k}}\dot{\theta}\sin\theta, \\ \dot{\hat{r}} &= \underbrace{\dot{\theta}(\hat{i}\cos\theta\cos\phi + \hat{j}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta)}_{\hat{\theta}} + \underbrace{\dot{\phi}\sin\theta(-\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi)}_{\hat{\phi}}, \\ \dot{\hat{r}} &= \dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}. \end{aligned}$$

(b) Considerando la derivada respecto al tiempo de la segunda de las **Ecuaciones (1.31)** se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}} &= -\dot{\hat{i}}\dot{\theta}\sin\theta\cos\phi - \dot{\hat{i}}\dot{\phi}\cos\theta\sin\phi - \dot{\hat{j}}\dot{\theta}\sin\theta\sin\phi + \dot{\hat{j}}\dot{\phi}\cos\theta\cos\phi - \dot{\hat{k}}\dot{\theta}\cos\theta, \\ \dot{\hat{\theta}} &= -\underbrace{\dot{\theta}(\hat{i}\sin\theta\cos\phi + \hat{j}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta)}_{\hat{r}} + \underbrace{\dot{\phi}\cos\theta(-\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi)}_{\hat{\phi}}, \\ \dot{\hat{\theta}} &= -\dot{\theta}\hat{r} + \dot{\phi}\cos\theta\hat{\phi}. \end{aligned}$$

(c) Al derivar respecto al tiempo la última de las **Ecuaciones (1.31)** se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\phi}} &= -\dot{\hat{i}}\dot{\phi}\cos\phi - \dot{\hat{j}}\dot{\phi}\sin\phi, \\ \dot{\hat{\phi}} &= -\dot{\phi}(\hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi), \\ \dot{\hat{\phi}} &= -\dot{\phi}(\sin\theta\hat{r} + \cos\theta\hat{\theta}). \end{aligned}$$

1.9. Tensores

Un tensor $\mathbb{T}$ de rango r es una estructura matemática cuyas componentes $T_{ijk\dots r}$ se transforman, bajo una rotación de coordenadas, de la siguiente manera (nos limitaremos solo a este tipo de transformaciones):

$$T'_{ijk\dots}(X') = A_{im}A_{jn}A_{kp}\cdots T_{mnp\dots}(X), \quad (1.35)$$

donde están implícitas sumas entre índices repetidos y $A_{im} = \partial x'_i / \partial x_m$ es el coseno del ángulo entre los ejes x'_i y x_m .

Un tensor $\mathbb{T}$ es totalmente *simétrico* cuando al permutar cualquier par de índices se obtiene la misma componente: $T_{\dots pq\dots} = T_{\dots qp\dots}$. Por otro lado, cuando al permutar un par de índices se obtiene la misma componente multiplicada por -1 , el tensor es *antisimétrico*: $T_{\dots pq\dots} = -T_{\dots qp\dots}$. En física son muy importantes los tensores y es útil determinar si el tensor es simétrico (o antisimétrico).

A continuación se presentan algunos ejemplos de tensores.

- **Escalares:** son tensores de rango 0.
- **Vectores:** son tensores de rango 1.
- **Delta de Kronecker** δ_{jk} (definido en la **Ecuación (1.6)**): es un tensor simétrico de rango 2. En tres dimensiones, tiene seis componentes nulas (cuando $j \neq k$). Sus componentes no nulas (e iguales a 1) son δ_{11} , δ_{22} y δ_{33} . Este tensor se representa por la matriz identidad $\mathbf{I}$.
- **Levi-Civita** ϵ_{ijk} (definido en la **Expresión (1.2)**): es un tensor de rango 3, antisimétrico en cualquier par de índices. En tres dimensiones, tiene 27 componentes de las cuales seis son no nulas: ϵ_{123} , ϵ_{132} , ϵ_{213} , ϵ_{231} , ϵ_{312} y ϵ_{321} .
- **Tensor de Inercia:** para un sistema conformado por N partículas, las componentes del tensor de inercia están definidas por

$$\mathbb{I}_{jk} \equiv \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \left(\delta_{jk} \sum_{i=1}^3 x_{\alpha,i}^2 - x_{\alpha,j} x_{\alpha,k} \right), \quad (1.36)$$

donde m_α es la masa de la α -ésima partícula, $x_{\alpha,j}$ es la j -ésima componente del vector posición de la α -ésima partícula, δ_{jk} es el Delta de Kronecker y $j, k = 1, 2, 3$. La expresión para el tensor de inercia es simétrica, ya que $\mathbb{I}_{jk} = \mathbb{I}_{kj}$. Por lo tanto, tiene seis componentes independientes: $\mathbb{I}_{11}, \mathbb{I}_{22}, \mathbb{I}_{33}, \mathbb{I}_{12}, \mathbb{I}_{13}$ e $\mathbb{I}_{23}$.

Si la distribución de masa en el cuerpo es continua, la expresión para calcular las componentes del tensor de inercia será

$$\mathbb{I}_{jk} \equiv \int \int \int \rho(\vec{r}) \left(\delta_{jk} \sum_i x_i^2 - x_j x_k \right) dV, \quad (1.37)$$

donde ρ es la densidad del cuerpo y dV el diferencial de volumen.

- **Tensor de campo electromagnético:** es un tensor de rango 2, cuyas componentes están dadas por $F_{\alpha,\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$, donde $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$, $A_\alpha = (\Phi/c, \vec{A})$ es el cuadripotencial y $\partial_\alpha = (\frac{\partial}{\partial x_0}, \nabla)$. Este tensor es antisimétrico, ya que $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$ y su representación matricial es

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix},$$

donde E_i son las componentes del campo eléctrico y B_i son las componentes del campo magnético.

Nota. Un tensor de segundo rango se puede representar por una matriz, pero no toda matriz cuadrada corresponde a un tensor.

Producto directo entre tensores. El producto directo de dos tensores es un tensor de rango igual a la suma de los rangos de los dos tensores. Por ejemplo, el producto directo de un tensor de segundo rango con uno de tercer rango da como resultado un tensor de quinto rango: $A_{jk} \otimes B_{mlp} = A_{jk} B_{mlp} = T_{jkm lp}$. Otro ejemplo importante es el producto directo de los vectores $\vec{C} = (C_1, C_2, C_3)$ y $\vec{D} = (D_1, D_2, D_3)$ definido como $\vec{C} \otimes \vec{D} = \vec{C}\vec{D}$ y componentes $C_i D_j \equiv T_{ij}$, el cual da un tensor de segundo rango. En tres dimensiones la representación matricial de este tensor es:

$$\vec{C} \otimes \vec{D} = \vec{C}^T \vec{D} = \begin{pmatrix} C_1 D_1 & C_1 D_2 & C_1 D_3 \\ C_2 D_1 & C_2 D_2 & C_2 D_3 \\ C_3 D_1 & C_3 D_2 & C_3 D_3 \end{pmatrix}.$$

Contracción de tensores. Esta operación entre tensores es una generalización al producto escalar entre dos vectores. Al multiplicar escalarmente dos vectores (tensores de rango 1) se obtiene un escalar (= tensor de rango 0). La suma de los rangos de los tensores que intervienen en el producto es 2 y el rango del tensor final es 0, es decir, disminuye en dos el rango al contraer los índices. Así, se generaliza la contracción de tensores de la siguiente forma:

$$A_{ijkm} B_{pj} = T_{ipkm}.$$

Si en un producto directo de tensores hay dos índices repetidos, el resultado final es un tensor cuyo rango es la suma de los rangos de los tensores menos dos.

Ejemplo 1.4

Demostrar que el producto de un tensor simétrico por uno antisimétrico (en el mismo par de índices) es cero.

Solución.

Asumiendo que $\mathbb{A}$ es un tensor de rango n , simétrico en los índices j, k , y que $\mathbb{B}$ es un tensor de rango m , antisimétrico en los mismos índices j, k , se obtiene:

$$\begin{aligned} A_{...jk...} B_{...jk...} &= A_{...kj...} B_{...kj...} && (\text{intercambiando } j \leftrightarrow k) \\ &= (A_{...jk...})(-B_{...jk...}) && (\text{por ser A simétrico y B antisimétrico}) \\ &= -A_{...jk...} B_{...jk...} \\ &= 0. \end{aligned}$$

De acuerdo con este resultado se obtiene $\delta_{ij} \epsilon_{ijk} = 0$.

Ejemplo 1.5

Obtener la traza del tensor de inercia.

Solución.

La traza del tensor de inercia está dada por:

$$\text{Traza } \mathbb{I} = \mathbb{I}_{11} + \mathbb{I}_{22} + \mathbb{I}_{33}.$$

Utilizando la **Ecuación (1.36)** se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{Traza } \mathbb{I} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{11} \sum_i x_{\alpha,i}^2 - x_{\alpha,1} x_{\alpha,1} \right) + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{22} \sum_i x_{\alpha,i}^2 - x_{\alpha,2} x_{\alpha,2} \right) \\ &\quad + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{33} \sum_i x_{\alpha,i}^2 - x_{\alpha,3} x_{\alpha,3} \right) \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\sum_i x_{\alpha,i}^2 + \sum_i x_{\alpha,i}^2 + \sum_i x_{\alpha,i}^2 - x_{\alpha,1}^2 - x_{\alpha,2}^2 - x_{\alpha,3}^2 \right) \\ \text{Traza } \mathbb{I} &= 2 \sum_{\alpha} m_{\alpha} \sum_i x_{\alpha,i}^2 = 2 \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha}^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.6

Obtener el tensor de inercia para un cuerpo rígido *plano*.

Solución.

Supongamos que el cuerpo está en el plano XY. En este caso el vector posición de la α -ésima partícula es $\vec{r}_{\alpha} = (x_{\alpha}, y_{\alpha}, 0)$. Las componentes del tensor de inercia son (ver **Ecuación (1.36)**):

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{11} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[(x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) - x_{\alpha}^2 \right] = \sum_{\alpha} m_{\alpha} y_{\alpha}^2 \\ \mathbb{I}_{22} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[(x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) - y_{\alpha}^2 \right] = \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha}^2 \\ \mathbb{I}_{33} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[(x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) - 0 \right] = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) \equiv \mathbb{I}_{11} + \mathbb{I}_{22} \end{aligned}$$

Las componentes no diagonales están dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{12} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (0 - x_{\alpha,1} x_{\alpha,2}) = - \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} y_{\alpha} \\ \mathbb{I}_{13} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (0 - x_{\alpha,1} x_{\alpha,3}) = 0 \\ \mathbb{I}_{23} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (0 - x_{\alpha,2} x_{\alpha,3}) = 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.7

Obtener el tensor de inercia de la molécula de agua (ver **Figura 1.5**).

Solución.

La molécula de agua es un cuerpo rígido *plano* conformado por tres masas. Por lo tanto, se pueden aplicar los resultados obtenidos en el ejemplo anterior. Los vectores posición de los átomos son:

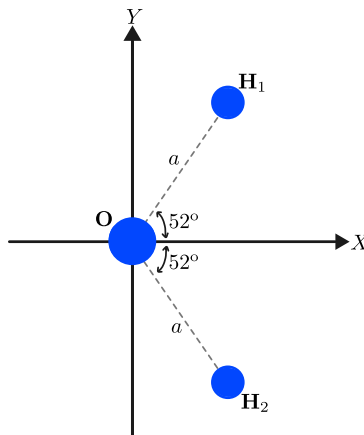


Figura 1.5: Molécula de agua.

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{r}_O = (0, 0, 0), \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_{H_1} = (a \cos 52^\circ, a \sin 52^\circ, 0), \\ \vec{r}_3 &= \vec{r}_{H_2} = (a \cos 52^\circ, -a \sin 52^\circ, 0).\end{aligned}$$

Asumiendo que $m_1 = m_O = 16m$, $m_2 = m_{H_1} = m$ y $m_3 = m_{H_2} = m$, las componentes del tensor de inercia son:

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{11} &= \sum_{\alpha=1}^3 m_{\alpha} y_{\alpha}^2 = 2m(a \sin(52^\circ))^2, \\ \mathbb{I}_{22} &= \sum_{\alpha=1}^3 m_{\alpha} x_{\alpha}^2 = 2m(a \cos(52^\circ))^2, \\ \mathbb{I}_{33} &= \mathbb{I}_{11} + \mathbb{I}_{22} = 2ma^2(\sin^2(52^\circ) + \cos^2(52^\circ)) = 2ma^2, \\ \mathbb{I}_{12} &= -\sum_{\alpha=1}^3 m_{\alpha} x_{\alpha} y_{\alpha} = -ma(\cos 52^\circ \sin 52^\circ - \cos 52^\circ \sin 52^\circ) = 0, \\ \mathbb{I}_{13} &= 0, \\ \mathbb{I}_{23} &= 0.\end{aligned}$$

De esta manera, la matriz asociada al tensor de inercia es

$$\mathbb{I} = 2ma^2 \begin{pmatrix} \sin^2(52^\circ) & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(52^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 1.8

Obtener el tensor de inercia respecto al origen del triángulo rectángulo e isósceles que se muestra en la **Figura 1.6**.

Solución.

Este es otro ejemplo de cuerpo rígido *plano* (de distribución continua de masa) de tal manera que también se pueden aplicar los resultados del **Ejemplo 1.6**, teniendo en cuenta que el triángulo tiene distribución continua de masa.

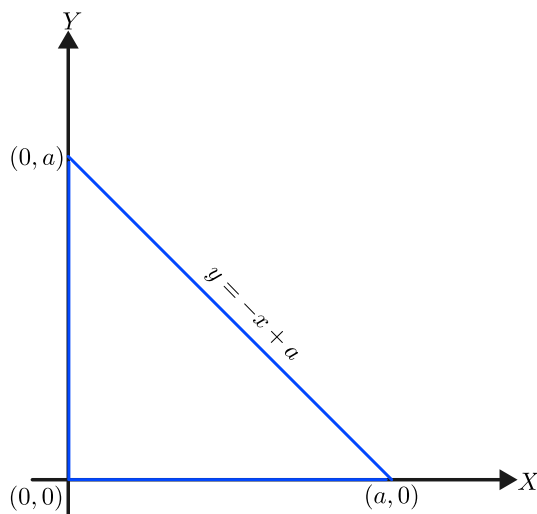


Figura 1.6: Triángulo rectángulo e isósceles.

Como la distribución de masa es superficial, el tensor de inercia es (ver **Ecuación (1.37)**)

$$\mathbb{I}_{ij} = \int \int \sigma \left(r^2 \delta_{ij} - x_i x_j \right) dA = \frac{2m}{a^2} \int \int \left[(x^2 + y^2) \delta_{ij} - x_i x_j \right] dA;$$

En la expresión anterior se tuvo en cuenta que $\sigma = m/A = 2m/a^2$, donde A es el área del triángulo ($= a^2/2$), y que $z = 0$. Teniendo en cuenta que la hipotenusa del triángulo está dada por la ecuación $y = -x+a$, las componentes del tensor de inercia son:

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{11} &= \frac{2m}{a^2} \int_0^a \int_0^{-x+a} y^2 dx dy = \frac{ma^2}{6}, \\ \mathbb{I}_{22} &= \frac{2m}{a^2} \int_0^a \int_0^{-x+a} x^2 dx dy = \frac{ma^2}{6}, \\ \mathbb{I}_{33} &= \mathbb{I}_{11} + \mathbb{I}_{22} = \frac{ma^2}{3}, \\ \mathbb{I}_{12} &= -\frac{2m}{a^2} \int_0^a \int_0^{-x+a} xy dx dy = -\frac{ma^2}{12}, \\ \mathbb{I}_{13} &= 0, \\ \mathbb{I}_{23} &= 0.\end{aligned}$$

Ejercicios

1.27 Demostrar que $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$.

1.28 Demostrar que $\epsilon_{ijk}\epsilon_{pjk} = 2\delta_{ip}$.

1.29 Las componentes del tensor de cuadrupolo eléctrico están dadas por

$$Q_{ij} = \int (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \rho(x_1, x_2, x_3) d^3x,$$

donde ρ es la densidad de carga eléctrica. ¿Es simétrico este tensor? Calcule su traza.

1.10. Derivada total de una función

Consideremos un conjunto de variables $q_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, que dependen de la variable independiente t y una función F que depende de éstas variables, $F = F(q_1, q_2, \dots, q_n; t)$. La derivada total $\frac{dF}{dt}$ está dada por:

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (1.38)$$

En particular, cuando F sea una función que dependa explícitamente de las variables x , y y z : $F = F(x, y, z)$, la derivada total $\frac{dF}{dt}$ estará dada por:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (1.39)$$

La expresión anterior se puede escribir como un producto escalar de la siguiente forma:

$$\frac{dF}{dt} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} = \vec{\nabla} F \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (1.40)$$

donde $\vec{\nabla}$ es un operador diferencial cuya representación en coordenadas cartesianas es $\vec{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$.

En un curso de mecánica clásica se requerirá obtener derivadas totales de funciones con respecto al tiempo. Por ejemplo, obtener $\frac{dE}{dt}$, $\frac{dL}{dt}$ y $\frac{dH}{dt}$, donde E , L y H son la energía total, el lagrangiano y el hamiltoniano, respectivamente.

Ejemplo 1.9

Sea $E = T + U$, donde $T = T(\dot{x}_i)$, $U = U(x_i; t)$ y $E = E(\dot{x}_i, x_i)$, donde $i = 1, 2, 3$, son las energías cinética, potencial y total, respectivamente, y t representa el tiempo. Demostrar que, para un sistema conservativo ($\vec{F} = -\nabla U$), se tiene que $dE/dt = \partial U/\partial t$.

Solución.

Obtenemos $\frac{dE}{dt}$,

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt}, \\ &= \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} + \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t}, \\ &= \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} + \nabla U \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\partial U}{\partial t}, \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial t}.\end{aligned}$$

En el segundo renglón se usó la **Ecuación (1.16)** con la notación $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. El resultado anterior indica que si la energía potencial U no es una función explícita del tiempo, entonces, $\frac{dE}{dt} = 0$, indicando que el campo de fuerzas es conservativo.

Ejemplo 1.10

El lagrangiano de un sistema es una función (realmente es una *funcional*) que depende de las coordenadas generalizadas (q_j) y de las velocidades generalizadas ($\dot{q}_j$), variables que a su vez dependen del tiempo (t): $L = L(q_j, \dot{q}_j; t)$, $j = 1, \dots, 3n - m$, donde n es el número de partículas y m es el número de ligaduras. Hallar $\frac{dL}{dt}$.

Solución.

Aplicando la **Ecuación (1.38)** se obtiene:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right] + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Ahora, utilizando la expresión $\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0$, conocida como *ecuación de Lagrange*, se llega a

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right] + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Usando la regla para derivar un producto, obtenemos la expresión para $\frac{dL}{dt}$:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (1.41)$$

En mecánica clásica es frecuente el uso de la función energía definida como $h = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$. Reorganizando la **Ecuación (1.41)** se puede obtener la razón de cambio de h respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \right) \\ \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Ejemplo 1.11

El hamiltoniano de un sistema es una función (realmente es una *funcional*) que depende de las coordenadas generalizadas (q_j), los momentos generalizados (p_j) y el tiempo (t): $H = H(q_j, p_j; t)$. Hallar $\frac{dH}{dt}$.

Solución.

$$\frac{dH}{dt} = \sum_j \left[\frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j \right] + \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Ejercicios

1.30 El lagrangiano y el hamiltoniano se pueden relacionar mediante una *transformación de Legendre* de la siguiente forma:

$$H(q_k, p_k; t) = \sum_k p_k \dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k; t). \quad (1.43)$$

(a) Obtener el diferencial del lado derecho de la transformación de Legendre (**Ecuación (1.43)**) y demostrar que

$$dH = \sum_k (\dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$

asumiendo que $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ y $\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}$.

(b) Calcular el diferencial del lado izquierdo de la **Ecuación (1.43)** ($dH(q_k, p_k; t)$) y comparar los coeficientes de dq_k y dp_k con los hallados en (a), para obtener

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}.$$

A estas ecuaciones se les conoce como *ecuaciones de Hamilton*.

1.31 Considere el hamiltoniano $H = H(q_j, p_j; t)$. Utilizando las ecuaciones de Hamilton (ver ejercicio anterior) demostrar que $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$ (utilice el resultado del **Ejemplo 1.10**).

1.32 El vector posición de la i -ésima partícula en función de las coordenadas generalizadas q_i , se escribe como $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n; t)$, donde t es el tiempo. Recordando que $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$, muestre que

$$\vec{v}_i = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}. \quad (1.44)$$

A partir de la ecuación anterior demuestre que

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}. \quad (1.45)$$

Tenga en cuenta que $\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_l}$.

Ejemplo 1.12

Demostrar que la energía cinética se puede escribir como la suma de tres términos: $T = T_0 + T_1 + T_2$, donde T_0 es independiente de las velocidades generalizadas, T_1 es lineal en las velocidades generalizadas y T_2 es cuadrática en estas velocidades. Además, mostrar que si el sistema es esclerónimo (es decir, si el tiempo no aparece explícitamente en las ecuaciones de transformación de coordenadas), se cumple que

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T.$$

Solución.

Consideremos un sistema conformado por n partículas. Su energía cinética T está dada por:

$$\begin{aligned} T &= \sum_i^n \frac{1}{2} m_i v_i^2, \\ &= \sum_i^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i, \\ &= \sum_i^n \frac{1}{2} m_i \left[\sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right] \cdot \left[\sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right], \\ &= \sum_i^n \frac{1}{2} m_i \left[\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 + 2 \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \dot{q}_k + \sum_{k,j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_j \right], \\ T &= M_0 + \sum_k M_k \dot{q}_k + \sum_{j,k} M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \equiv T_0 + T_1 + T_2, \end{aligned} \quad (1.46)$$

donde:

$$\begin{aligned} M_0 &= \sum_i^n \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2, \\ M_k &= \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \\ M_{jk} &= \sum_i^n \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Se observa que T_0 es independiente de las velocidades generalizadas mientras que T_1 y T_2 son expresiones lineal y cuadrática en las velocidades generalizadas, respectivamente.

Si el sistema es *esclerónomo*, es decir, si el tiempo no aparece explícitamente en las ecuaciones de transformación, se obtiene $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0$. Esto hace que $M_0 = 0$ y $M_k = 0$, implicando que $T_0 = 0$ y $T_1 = 0$. Por lo tanto, en un sistema esclerónomo la energía cinética es una función cuadrática en las velocidades generalizadas:

$$T = \sum_{j,k} M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (1.48)$$

La derivada de esta expresión respecto a $\dot{q}_l$ es:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_j M_{jl} \dot{q}_j + \sum_k M_{lk} \dot{q}_k;$$

multiplicando por $\dot{q}_l$ y sumando sobre l se obtiene:

$$\sum_l \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j,l} M_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l + \sum_{k,l} M_{lk} \dot{q}_k \dot{q}_l. \quad (1.49)$$

Como k y j son índices mudos, se puede intercambiar a k por j en el segundo término, obteniéndose que los dos términos son semejantes. Por lo tanto,

$$\sum_l \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = 2 \sum_{j,l} M_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l = 2T. \quad (1.50)$$

Esta expresión es importante ya que muestra que para un sistema *esclerónomo* la energía cinética es función *homogénea* de grado **2**. Este resultado es un caso especial del *Teorema de Euler* para una función $f(y_1, \dots, y_k)$ homogénea de grado n , el cual se expresa de la siguiente manera

$$\sum_k y_k \frac{\partial f}{\partial y_k} = n f. \quad (1.51)$$

1.11. Actividades complementarias

1. Consultar sobre los siguientes operadores vectoriales: *gradiente* ($\vec{\nabla}\phi$), *divergencia* ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$), *rotacional* ($\vec{\nabla} \times \vec{A}$) y *laplaciano* ($\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = \nabla^2\phi$), donde ϕ es una función escalar y $\vec{A}$ es una función vectorial.
2. Con el objetivo de reforzar los temas de producto escalar, producto vectorial y tensores se recomienda estudiar el artículo:
 - Heras JA. Decomposition of a symmetric second-order tensor. *Eur J Phys.* 2018; 39.

En este trabajo se descompone un tensor simétrico de segundo orden a partir del producto escalar y vectorial entre un vector y el tensor simétrico. Se presentan ejemplos aplicados al tensor de esfuerzo de Maxwell y a los tensores de inercia de una esfera sólida y de un cubo.

3. Con el propósito de reforzar el tema de matrices complejas y transformaciones de similitud unitarias, se sugiere estudiar el artículo:
 - Haber HE. A tale of three diagonalizations, *Int. Jour Mod Phys A.* 2021; 36.

Este trabajo es una nota pedagógica en la cual se discuten tres procedimientos para diagonalizar una matriz compleja 2×2 lo más general posible. Los tres formalismos utilizados podrían ser de gran utilidad al trabajar con estas matrices.

4. Consultar sobre los grupos de Lie $SU(N)$ y $SO(N)$ y el *homomorfismo* entre los grupos $SU(2)$ y $SO(3)$.

Los elementos de un grupo de Lie se pueden representar de la forma $e^{-i\alpha_n\lambda_n}$, donde α_n son los parámetros continuos del grupo y λ_n son los generadores del grupo (son matrices).

Los grupos de Lie $SU(N)$ están conformados por matrices *unitarias* $n \times n$ con determinante +1.

Los grupos de Lie $SO(N)$ son conjuntos de matrices *ortogonales* $n \times n$ con determinante $+1$.

Sobre el grupo $SU(2)$. Sea $\mathbf{Q}$ una matriz del grupo $SU(2)$. En general, $\mathbf{Q}$ tiene la forma:

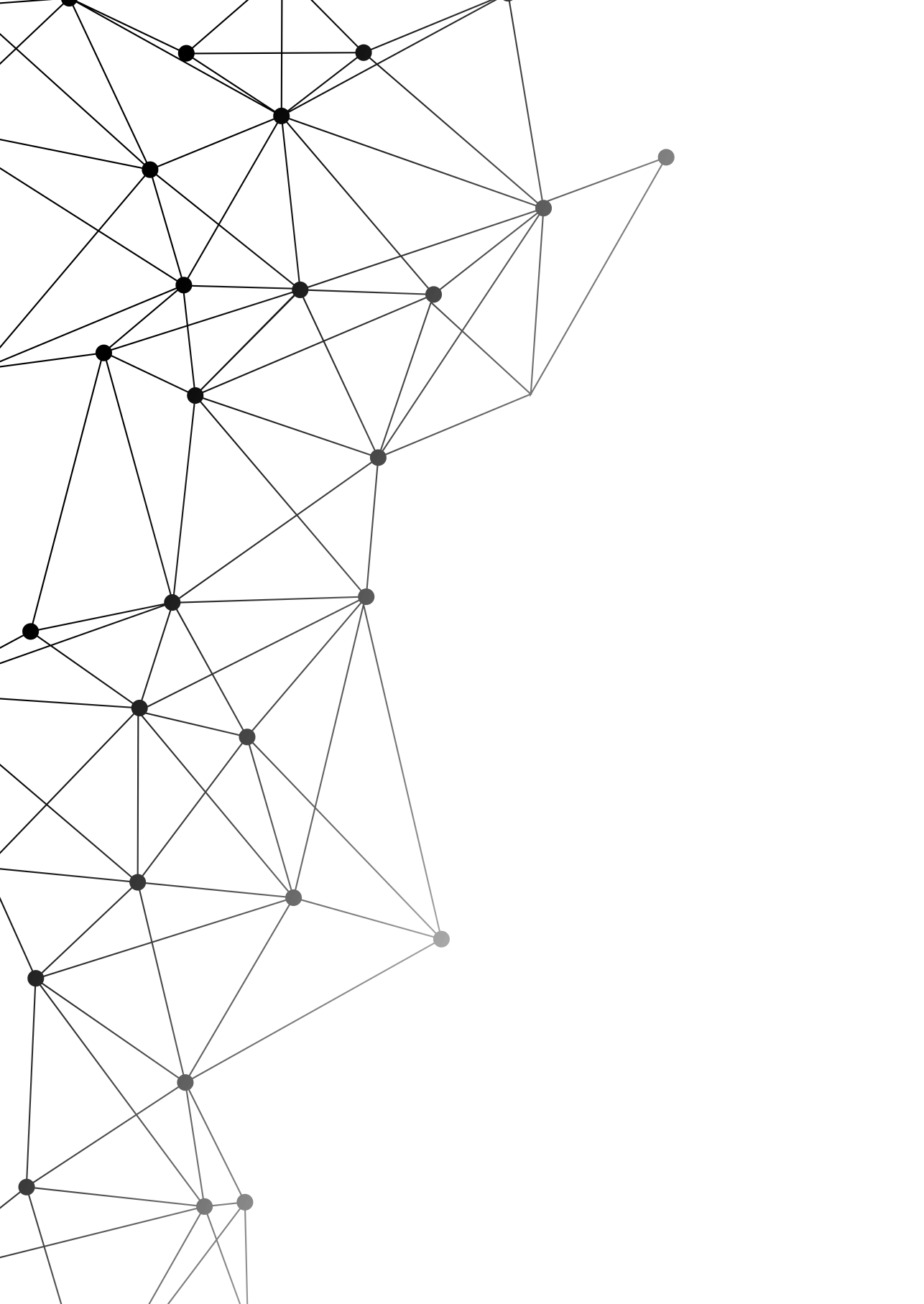
$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

En principio la matriz $\mathbf{Q}$ tiene ocho parámetros. Sin embargo, al imponer la condición $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\dagger = \mathbf{I}$ se obtiene: $\beta = -\gamma^*$ y $\delta = \alpha^*$. Es decir, quedan solo cuatro parámetros y la matriz $\mathbf{Q}$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}.$$

Si además se impone la condición $\text{Det } \mathbf{Q} = 1$, se tienen solo tres parámetros independientes (coincide con el número exigido para especificar la orientación de un cuerpo rígido).

Sobre el grupo $SO(3)$. Está conformado por las matrices ortogonales 3×3 con determinante $+1$. Son las matrices que hacen las rotaciones en un espacio de tres dimensiones.





Capítulo

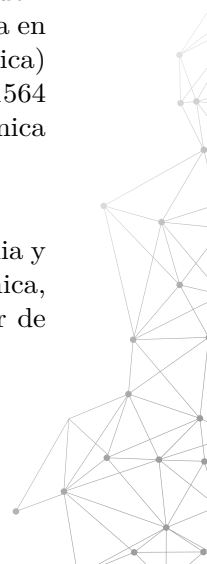
2

Elementos de la mecánica newtoniana

Uno de los aspectos distintivos de la física es la estructura matemática que utiliza para establecer sus leyes. Qué tanto se conoce acerca de algo en física, usualmente se relaciona con lo bien que se pueda medir y/o expresar numéricamente. Cuando las ideas de la física se formulan en términos matemáticos son concretas; esto es lo que permite que cualquiera pueda comprobar o refutar sus predicciones.

La mecánica es la rama de la física que estudia el movimiento de los cuerpos materiales. A pesar de los grandes progresos que tuvo la física en Grecia en los siglos III y IV A.C., el verdadero desarrollo de la mecánica (y de la física) se inicia a partir de las formulaciones de Kepler (1571 - 1630), Galileo (1564 - 1642) y Newton (1643 - 1727) en el siglo XVII. Históricamente, la mecánica fue la primera teoría en ser descrita en forma matemática.

La mecánica se puede subdividir en dos ramas, la cinemática, que estudia y describe las trayectorias de los cuerpos durante su movimiento, y la dinámica, que determina cuáles son las trayectorias o movimientos posibles a partir de las fuerzas que actúan sobre los cuerpos.



2.1. Cinemática de una partícula

La cinemática es el estudio y la descripción matemática de las trayectorias de movimiento de los objetos materiales, sin hacer alusión a las causas de dicho movimiento. Por facilidad, supondremos que el lector tiene una idea básica de los conceptos de longitud y tiempo. Empezaremos con la descripción del movimiento de una partícula (o masa puntual), definiendo esta última como un objeto cuyo tamaño y estructura interna son despreciables en relación con el contexto del problema a estudiar. Por ejemplo, un objeto del tamaño de un balón de fútbol que cae bajo la atracción gravitacional de la tierra, o la tierra misma orbitando alrededor del sol, podrían considerarse en muchos casos como partículas.

Para establecer la ubicación de una partícula se requiere especificar la posición de un punto en el espacio, con respecto a un *sistema de referencia*. Esto se logra, por ejemplo, en un espacio tridimensional, definiendo una tripleta ordenada (x, y, z) con respecto a un sistema de coordenadas cartesiano $X - Y - Z$. Definimos el *vector posición* ($\vec{r}$) como el vector que parte del origen de coordenadas $X - Y - Z$ y llega al punto (x, y, z) donde se encuentra la partícula.

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}. \quad (2.1)$$

Es claro que si definimos un nuevo sistema de coordenadas $X' - Y' - Z'$, cuyo origen no coincida con el del sistema inicial, el vector posición $\vec{r}'$, referido a este nuevo sistema, no será igual a $\vec{r}$.

Ahora, cuando la partícula se desplace desde un punto inicial especificado por el vector $\vec{r}_0$ (en el tiempo t_0), hasta un punto final especificado por el vector $\vec{r}_f$ (en el tiempo t_f), podemos definir el *vector desplazamiento* ($\Delta\vec{r}$), en el intervalo de tiempo $t_f - t_0$, como el vector que parte desde el punto inicial y llega al punto final de la trayectoria (ver **Figura 2.1**):

$$\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_f - \vec{r}_0. \quad (2.2)$$

El símbolo $\equiv$ en la ecuación anterior denota una definición. La magnitud del vector desplazamiento es independiente del sistema de coordenadas elegido. Sin embargo, este vector no necesariamente contiene información precisa acerca de la distancia recorrida por la partícula, ni de la dirección del movimiento.

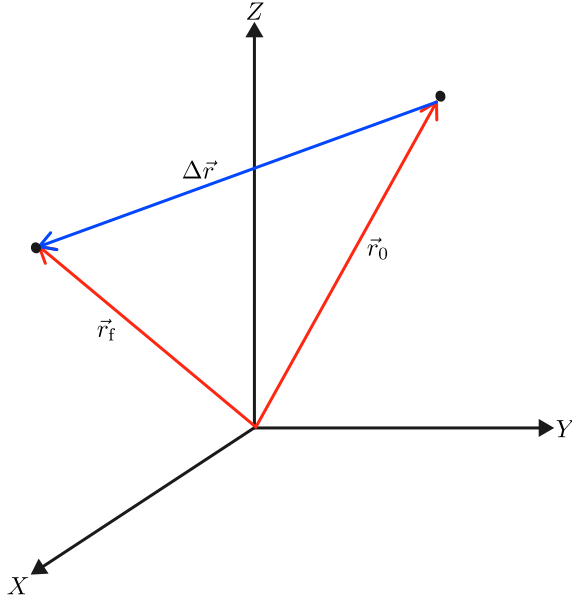


Figura 2.1: Vector desplazamiento.

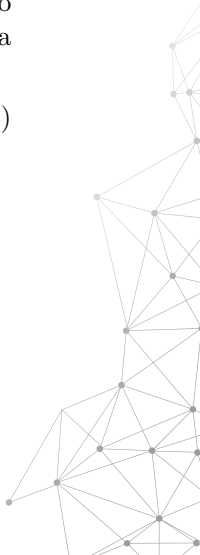
Actividad. Mencione un ejemplo que corrobore esta última afirmación.

Definamos ahora el vector *velocidad promedio* como el desplazamiento sobre el intervalo de tiempo:

$$\vec{v} \equiv \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_0}{t_f - t_0} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (2.3)$$

Si se requiere información acerca de la velocidad en un punto, es necesario considerar el límite cuando el intervalo de tiempo Δt tienda a cero en la **Ecuación (2.3)**,

$$\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2.4)$$



La **Ecuación (2.4)** define la *velocidad instantánea* (en adelante simplemente velocidad) de la partícula en la posición $\vec{r}$. Si se conoce la velocidad como función del tiempo, esta ecuación puede ser reescrita en forma integral para encontrar la posición en cualquier instante:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} d\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^{t_f} \vec{v} dt. \quad (2.5)$$

De forma análoga, definimos la *aceleración promedio* como el cambio de velocidad sobre el intervalo de tiempo:

$$\vec{a} \equiv \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \quad (2.6)$$

y la *aceleración instantánea*,

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (2.7)$$

Si se conoce la aceleración como función del tiempo, la **Ecuación (2.7)** puede ser reescrita en forma integral, para hallar la velocidad en cualquier instante de tiempo,

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_f} d\vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_0 = \int_{t_0}^{t_f} \vec{a} dt. \quad (2.8)$$

Si se conocen las funciones $\vec{v}(t)$ y/o $\vec{a}(t)$, las **Relaciones (2.5)** y **(2.8)** permiten obtener la descripción completa de la posición de la partícula como función del tiempo, es decir, permiten encontrar la función que describe la trayectoria de la partícula, $\vec{r}(t)$, siempre y cuando se conozcan las condiciones iniciales (posición y velocidad en $t = 0$).

Aunque iniciamos la descripción del movimiento tomando como referencia un sistema de coordenadas cartesianas, es importante anotar que, dependiendo de la geometría del problema, el uso de algún otro sistema de coordenadas puede ser más adecuado para especificar la posición de una partícula. Por ejemplo, para una partícula que se mueva sobre la superficie de una esfera, un sistema de coordenadas curvo facilitaría la descripción de la trayectoria. El uso de otros sistemas de coordenadas como esféricas, cilíndricas o polares, entre otras, requiere transformaciones apropiadas para los vectores posición, velocidad y aceleración.



Ejercicios

2.1 Encontrar la función $\vec{r}(t)$, para el caso en que la aceleración de la partícula sea $\vec{a} = -g\hat{j}$, con g constante.

2.2 Con ayuda de las relaciones definidas en esta sección, demostrar que

$$v_f^2 - v_0^2 = 2 \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

2.3 Encontrar la función $\vec{r}(t)$, para el caso en que la aceleración de la partícula sea $\vec{a} = -kv^2\hat{i}$, con k una constante positiva.

2.4 Convertir los puntos (1,3,7) y (0,5,-2) de coordenadas cartesianas a cilíndricas.

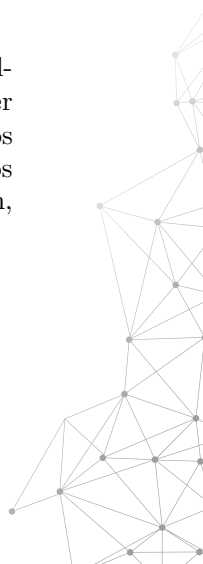
2.5 Transformar el vector

$$\vec{V} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\hat{i} - \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\hat{k}$$

a coordenadas esféricas.

2.2. Dinámica de una partícula

La física es una ciencia natural basada en hechos experimentales. Cualquier concepto en física que apunte a explicar un fenómeno natural, debe ser contrastado y correlacionado con un importante y minucioso número de datos experimentales. Si con esos conceptos se logra interpretar adecuadamente los entre otras, requiere transformaciones apropiadas para los vectores posición, velocidad y aceleración.





La experiencia cotidiana nos indica que el movimiento de los objetos macroscópicos está generalmente asociado a las interacciones (**fuerzas**) gravitacionales o electromagnéticas con otros objetos. El objeto fundamental de la dinámica es, conocidas todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, determinar las posibles trayectorias de movimiento.

Isaac Newton fue el primero en formular un conjunto completo de leyes físicas para describir la dinámica de una partícula. Iniciaremos el estudio de la dinámica con las leyes de Newton. Está fuera del alcance de este texto realizar una discusión en detalle de las implicaciones filosóficas de cada una de estas leyes. En lugar de ello, las enunciaremos en un lenguaje moderno y de manera que nos permita avanzar de forma ágil en la descripción de la mecánica.

2.2.1. Leyes de Newton

Definamos la cantidad de movimiento lineal (o momentum) de una partícula como:

$$\vec{p} \equiv m\vec{v}, \quad (2.9)$$

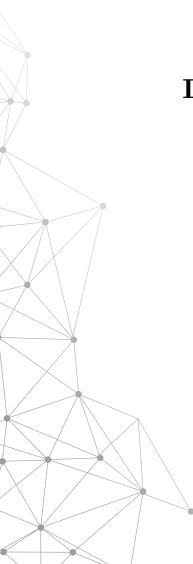
donde m es la masa de la partícula. En términos de la cantidad de movimiento lineal, podemos enunciar las leyes de Newton de la siguiente forma:

- I. Existe un conjunto de sistemas de referencia, denominados inerciales, respecto a los cuales una partícula, sobre la cual la fuerza neta sea nula, conservará constante su cantidad de movimiento lineal.
- II. Cuando sobre una partícula actúen fuerzas, la razón de cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento lineal de la partícula será igual a la fuerza neta (total):

$$\vec{F}_{\text{neta}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}).$$

- III. Para un sistema de n partículas aisladas, es decir, en ausencia de fuerzas externas, la cantidad de movimiento lineal total del sistema, definida como $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n$, permanecerá constante en el tiempo:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n = \text{cte.}$$



Un *sistema de referencia* (o *marco de referencia*) se entiende como un conjunto de convenciones utilizadas para medir las variables físicas de un sistema (posición, velocidad, aceleración, etc.). Si definimos una *partícula libre* como aquella sobre la cual la fuerza neta es cero, la primera ley se podría reescribir como: *respecto a un sistema de referencia inercial, la cantidad de movimiento lineal de una partícula libre permanecerá constante en el tiempo.*

La primera ley afirma la existencia de los *sistemas de referencia inerciales* sin aclarar detalles de cómo encontrarlos. Es decir, se delega en el experimento la tarea de definir los sistemas respecto a los cuales es correcta esa ley.

Al igual que la longitud y el tiempo, la masa es ahora un concepto aceptablemente entendido, por lo que la segunda ley introduce una definición operacional de la fuerza: *las fuerzas producen cambios en la cantidad de movimiento lineal de una partícula.* Para los sistemas físicos más generales, la segunda ley de Newton se expresa como:

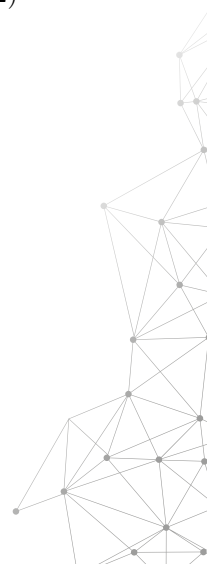
$$\vec{F}_{\text{neto}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (2.10)$$

Si la masa no varía con el tiempo,

$$\vec{F}_{\text{neto}} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}. \quad (2.11)$$

Consideremos ahora un sistema constituido por dos partículas; la cantidad de movimiento lineal de este sistema será $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. Si este es un *sistema aislado*, es decir, un sistema en el cual no actúan fuerzas externas sobre las partículas, de la definición establecida en la tercera ley se tiene que

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0. \quad (2.12)$$



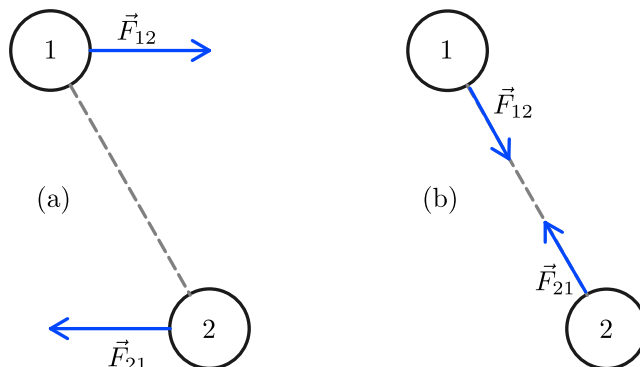


Figura 2.2: Diagrama esquemático de la ley de acción y reacción en sus formas débil (a) y fuerte (b).

En este caso, la única fuerza que actuaría sobre la partícula «uno» sería debida a la partícula «dos», $\vec{F}_{12}$. Con esta notación, la **Ecuación (2.12)** quedaría:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}_1}{dt} &= -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \\ \vec{F}_{12} &= -\vec{F}_{21} \end{aligned} \quad (2.13)$$

La tercera ley de Newton descrita en **(2.13)** se conoce como *ley de acción y reacción* y establece que *en un sistema de dos partículas aisladas, la fuerza que siente la partícula «uno» es igual en magnitud y contraria en dirección a la que siente la partícula «dos»*.

En la **Figura 2.2** se esquematizan dos posibilidades para la ley de acción y reacción: si las fuerzas entre las dos partículas son iguales y contrarias, pero no están sobre la línea que une las dos partículas, la **Relación (2.13)** se denomina *forma débil de la ley de acción y reacción* (ver **Figura 2.2a**). De otro lado, si las fuerzas entre las dos partículas, además de ser iguales y contrarias, están sobre la línea que une las dos partículas, se habla de la *forma fuerte de la ley de acción y reacción* (ver **Figura 2.2b**). Cuando la fuerza está dirigida a lo largo de la línea que une los dos cuerpos y depende solo de la separación entre ellos, se le denomina *fuerza central*.



La tercera ley de Newton no es una ley general de la naturaleza, ya que no aplica para todas las fuerzas. Por ejemplo, las fuerzas entre partículas cargadas en movimiento, las cuales dependen de la velocidad, no obedecen la tercera ley de Newton.

En casos extremos en los que se alcanzan velocidades muy altas o se involucran magnitudes espaciales muy pequeñas, las leyes de Newton pierden su validez. En estos casos no solo las leyes, sino los conceptos fundamentales de la teoría deben ser modificados para dar paso a nuevas teorías. Sin embargo, en una amplia gama de fenómenos naturales la mecánica newtoniana es correcta con un alto grado de precisión. Así mismo, sirve de punto de partida para la formulación de nuevas teorías como la relatividad y la mecánica cuántica.

Con las restricciones señaladas, las leyes de Newton ofrecen una completa descripción de la evolución de los sistemas mecánicos. Si se conoce la fuerza neta (en adelante solo fuerza) como función del tiempo ($F = F(t)$), o de la velocidad ($F = F(v)$), o de la posición ($F = F(x)$), se puede encontrar la función que describe la trayectoria de la partícula a través del siguiente procedimiento:

- Cuando $F = F(t)$: $m \frac{dv}{dt} = F(t) \rightarrow m dv = F(t) dt$, expresión que al ser integrada permite obtener la velocidad en función del tiempo, $v = v(t)$. La posición se obtiene integrando a esta última expresión respecto al tiempo.
- Cuando $F = F(v)$: $m \frac{dv}{dt} = F(v) \rightarrow \frac{dv}{F(v)} = \frac{1}{m} dt$. Al integrar se obtiene a $v = v(t)$. También se puede obtener la posición en función de la velocidad de la siguiente forma: $m \frac{dv}{dt} = F(v) \rightarrow m \frac{dv}{dx} dx = F(v) dx \rightarrow m v dv = F(v) dx \rightarrow \frac{v dv}{F(v)} = \frac{1}{m} dx$.
- Cuando $F = F(x)$: $m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x) \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{m} F(x) = 0$. La solución de esta ecuación diferencial de segundo orden permite obtener la posición en función del tiempo, $x = x(t)$.

Es importante mencionar que en algunas situaciones físicas puede ser complejo obtener una función analítica que describa la fuerza neta que actúa sobre la partícula.



Ejemplo 2.1

Dos masas atadas por una cuerda sobre dos planos inclinados.

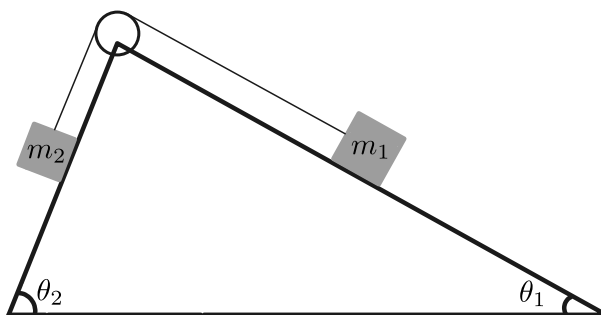


Figura 2.3: Diagrama esquemático del Ejemplo 2.1.

Consideremos dos bloques de masas m_1 y m_2 atados por una cuerda, deslizándose como se muestra en la **Figura 2.3**. Suponiendo que no existe fricción con las superficies y que la cuerda es inextensible y de masa despreciable, encontremos la aceleración de cada bloque.

Solución.

Denotemos como $\vec{F}_g$ la fuerza gravitacional; como $\vec{N}$ la fuerza de contacto entre el bloque y la superficie y como $\vec{T}$ la tensión en la cuerda. Para el bloque m_1 la fuerza neta será:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_g' + \vec{N}_1 + \vec{T}.$$

Las magnitudes de la tensión y la aceleración serán las mismas para los dos bloques, ya que consideramos la cuerda inextensible. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\vec{F}_g' + \vec{N}_1 + \vec{T} = m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2}.$$

Supongamos que el sistema se mueve en la dirección de las agujas del reloj. La anterior ecuación vectorial se puede escribir como dos ecuaciones algebraicas, una en la coordenada x y la otra en y (ver **Figura 2.4**). Tomando $\vec{F}_g^1 = m_1 \vec{g}$ se tiene para la masa m_1 en la coordenada y ,

$$N_1 - m_1 g \cos \theta_1 = 0 \quad (2.14)$$

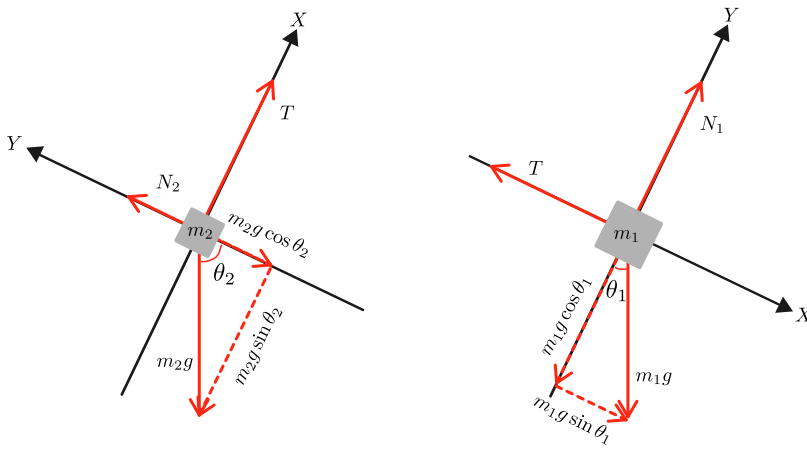


Figura 2.4: Diagrama de fuerzas para los bloques m_1 y m_2 .

La última ecuación es igual a cero, ya que en este caso el movimiento está restringido a la dirección x , por lo que, $\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} \hat{i} = a \hat{i}$. Para la coordenada x se tiene:

$$m_1 g \sin \theta_1 - T = m_1 a \quad (2.15)$$

Análogamente se obtienen dos ecuaciones para la masa m_2 :

$$N_2 - m_2 g \cos \theta_2 = 0 \quad (2.16)$$

$$-m_2 g \sin \theta_2 + T = m_2 a \quad (2.17)$$

Despejando la tensión de (2.15) y reemplazando en (2.17), se obtiene el valor de la aceleración del sistema:

$$a = \left(\frac{m_1 \sin \theta_1 - m_2 \sin \theta_2}{m_1 + m_2} \right) g. \quad (2.18)$$

Observe que si $m_1 g \sin \theta_1 - m_2 g \sin \theta_2 < 0$, el valor de la aceleración será negativo. En este caso, la magnitud de la aceleración seguirá siendo válida, pero el signo menos indicará que el sistema se mueve en el sentido contrario al que se supuso inicialmente.

Ejercicios

2.6 Utilizando el valor de la aceleración dado en (2.18), encontrar la velocidad de las masas como función de la posición.

2.7 Encontrar el valor de la aceleración en el sistema considerando que exista fricción entre los bloques y la superficie, caracterizada por los coeficientes de fricción μ_1 y μ_2 (Nota: considere que la magnitud de la fuerza de fricción sobre cada bloque se puede escribir como $F_f = \mu N$).

Ejemplo 2.2

Masa atada a un resorte.

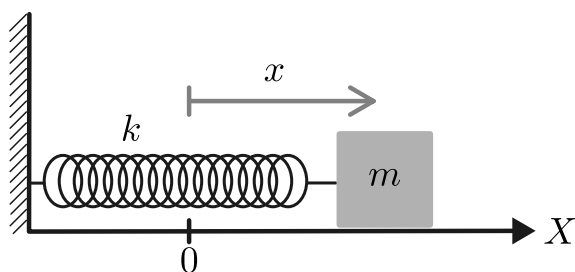


Figura 2.5: Masa atada a un resorte.



Considere un bloque de masa m sujeta a un resorte de constante elástica k , como se muestra en la **Figura 2.5**. Obtener la ecuación de movimiento suponiendo que la fuerza que ejerce el resorte sobre la masa es proporcional a su deformación.

Solución.

La fuerza del resorte sobre la masa m es proporcional y opuesta a la deformación del resorte (x): $\vec{F} = -kx\hat{i}$. A partir de la segunda ley de Newton se obtiene:

$$m\ddot{x} = -kx \quad \rightarrow \quad \ddot{x} + (k/m)x = 0.$$

La solución a esta ecuación diferencial se encuentra desarrollada en el **Capítulo 3**.

Ejemplo 2.3

Sistema de masa variable.

Analicemos ahora el movimiento de un cohete, como un caso particular de un sistema de masa variable. Encontraremos la velocidad del cohete en función del tiempo.

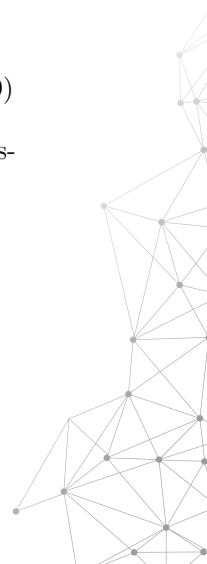
Solución.

En la **Figura 2.6** se esquematiza el problema en un instante de tiempo t y en un instante posterior $t + dt$; $\vec{v}$ representa la velocidad del cohete respecto a la tierra y $\vec{u}$ la velocidad relativa de los gases respecto al cohete. Debido a que el cohete pierde masa con el tiempo, la variación de la masa debe ser negativa, es decir, $dm < 0$. A partir de la segunda ley de Newton, la ecuación de movimiento del sistema se escribe como:

$$m\vec{g} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt}. \quad (2.19)$$

Los momentos lineales, calculados con respecto a la tierra, para los dos instantes de tiempo de la **Figura 2.6** serán:

$$\vec{p}(t) = m\vec{v}$$



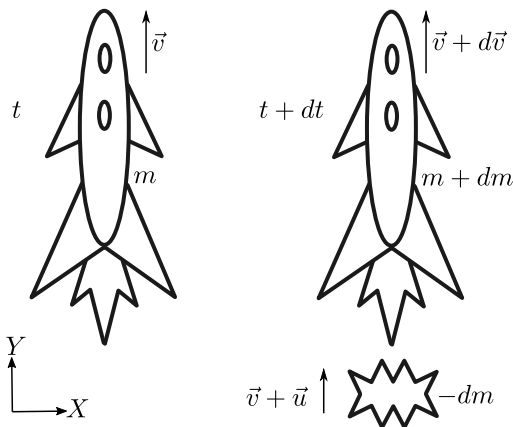


Figura 2.6: Diagrama esquemático de un sistema de masa variable en dos instantes de tiempo: t y $t + dt$.

y

$$\vec{p}(t + dt) = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + (\vec{v} + \vec{u})(-dm),$$

donde $\vec{v} + \vec{u}$ es la velocidad de los gases respecto a la tierra. Entonces,

$$\begin{aligned} \vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) &= m\vec{v} + md\vec{v} + \vec{v}dm + dmd\vec{v} - \vec{v}dm - \vec{u}dm - m\vec{v} \\ &= md\vec{v} - \vec{u}dm, \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde hemos despreciado el término $dmd\vec{v}$. Reemplazando (2.20) en la **Relación (2.19)** y dividiendo a ambos lados de la ecuación por la masa m obtenemos:

$$\vec{g}dt = d\vec{v} - \vec{u}\frac{dm}{m}. \quad (2.21)$$

Si establecemos como condiciones iniciales que en el tiempo $t = 0$, $m = m_0$ y $\vec{v} = \vec{v}_0$, podemos reescribir (2.21) en forma integral:

$$\vec{g} \int_0^t dt = \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} - \vec{u} \int_{m_0}^m \frac{dm}{m},$$

de donde, resolviendo la integral y reorganizando los términos se obtiene la velocidad del cohete como función del tiempo:



$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u} \ln \left(\frac{m}{m_0} \right) + \vec{g}t.$$

Finalmente, si tomamos como sistema de referencia el plano cartesiano mostrado en la **Figura 2.6**, tenemos que $\vec{g} = -g\hat{j}$, $\vec{v} = v\hat{j}$ y $\vec{u} = -u\hat{j}$, por lo que la magnitud de la velocidad (la rapidez) del cohete en el tiempo estará dada por

$$v = v_0 + u \ln \left(\frac{m_0}{m} \right) - gt. \quad (2.22)$$

Ejemplo 2.4

Movimiento parabólico considerando fricción.

Consideremos el movimiento de un proyectil en el aire teniendo en cuenta el efecto retardante de una fuerza proporcional a la velocidad, $\vec{F}_r = km\vec{v} = km(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j})$, donde $\dot{x} = dx/dt$, $\dot{y} = dy/dt$, m es la masa del proyectil y k es una constante positiva que modula la fuerza de resistencia del aire. Sus unidades son s^{-1} .

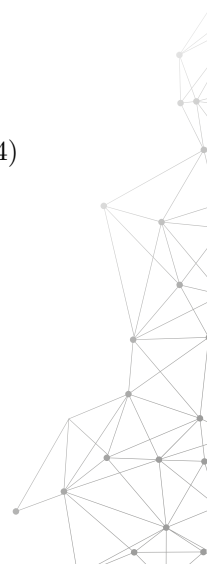
Solución.

Supongamos las siguientes condiciones iniciales: $\vec{r}(t=0) = (0,0)$ y velocidad inicial $\vec{v}(t=0) \equiv \vec{V}_0 = (V_0 \cos \theta, V_0 \sin \theta) = (U, V)$, donde θ es el ángulo de elevación con respecto a la horizontal. Las ecuaciones de movimiento para los ejes de coordenadas horizontales y verticales son:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -km\dot{x} \\ m\ddot{y} &= -km\dot{y} - mg, \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde g es la magnitud de la aceleración de la gravedad. La solución de estas ecuaciones es:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{U}{k} (1 - e^{-kt}) \\ y(t) &= -\frac{gt}{k} + \frac{kV + g}{k^2} (1 - e^{-kt}). \end{aligned} \quad (2.24)$$



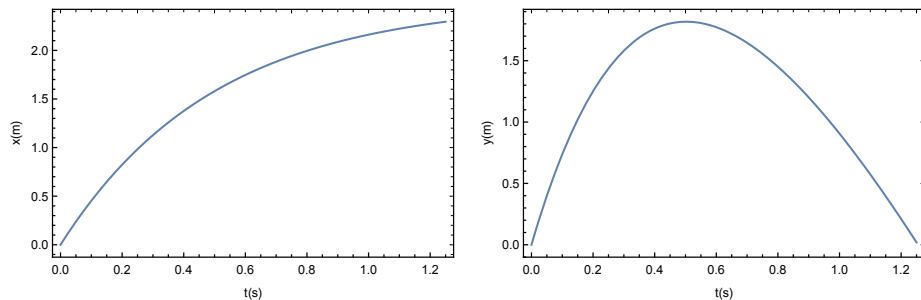


Figura 2.7: Evolución de la posición horizontal x (izquierda) y vertical y (derecha) en función del tiempo con $k = 2 \text{ s}^{-1}$ y $\theta = 30^\circ$.

Las componentes horizontal y vertical de la velocidad son

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ue^{-kt} \\ \dot{y} &= -\frac{g}{k} + \frac{kV + g}{k}e^{-kt},\end{aligned}\tag{2.25}$$

y las componentes de la aceleración están dadas por

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -kUe^{-kt} \\ \ddot{y} &= -(kV + g)e^{-kt}.\end{aligned}\tag{2.26}$$

La **Figura 2.7** muestra la evolución temporal de la posición horizontal, $x(t)$, y de la posición vertical, $y(t)$, según las **Ecuaciones (2.24)**, para $k = 2 \text{ s}^{-1}$, $\theta = 30^\circ$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ y $V_0 = 10 \text{ m/s}$.

El tiempo para alcanzar la máxima altura, o tiempo de subida, se obtiene haciendo $\dot{y} = 0$:

$$t_{\text{subida}} = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{kV + g}{g} \right).\tag{2.27}$$

Sean $(X(Y_{\text{max}}), Y_{\text{max}})$ las coordenadas del punto de altura máxima alcanzada por el proyectil. Estas se obtienen al sustituir el tiempo de subida en las



expresiones para $x(t)$ y $y(t)$:

$$X(Y_{\max}) = \frac{UV}{g} \left(1 + \frac{kV}{g}\right)^{-1} \quad (2.28)$$

$$Y_{\max} = -\frac{g}{k^2} \ln \left(1 + \frac{kV}{g}\right) + \frac{V}{k}. \quad (2.29)$$

A continuación se obtendrá la trayectoria del proyectil despejando el tiempo t de la ecuación $x = x(t)$:

$$t = \frac{1}{k} \ln \left(1 - \frac{k}{U} x\right)^{-1},$$

y sustituyendo este tiempo en la expresión $y = y(t)$:

$$y = \frac{g}{k^2} \ln \left(1 - \frac{k}{U} x\right) + \frac{kV + g}{kU} x. \quad (2.30)$$

La ecuación anterior da la trayectoria $y = y(x)$ del proyectil. En la **Figura 2.8** se muestra esta trayectoria para $k = 2 \text{ s}^{-1}$, $\theta = 30^\circ$, $V_0 = 10 \text{ m/s}$ y $g = 10 \text{ m/s}^2$.

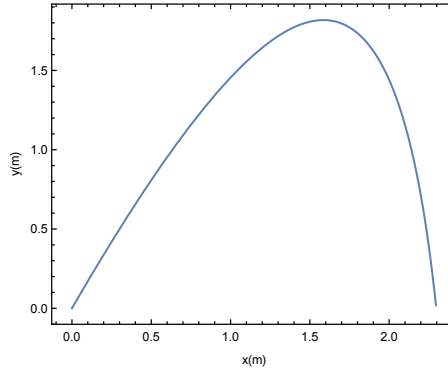
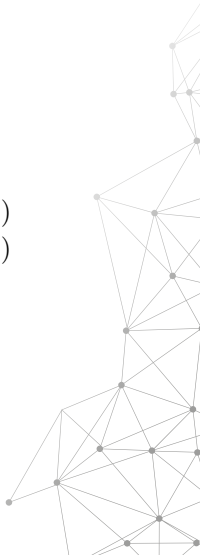


Figura 2.8: Trayectoria del proyectil con $k = 2 \text{ s}^{-1}$ y $\theta = 30^\circ$.

Usando la serie $(1 + z)^{-1} = 1 - z + z^2 - \dots$ en la expresión para $X(Y_{\max})$ y la serie $\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$ en las ecuaciones para $Y_{\max}$ y $y = y(x)$



se obtiene:

$$\begin{aligned}
 X(Y_{\max}) &= \frac{V_0^2 \sin 2\theta}{2g} \left[1 - \frac{kV}{g} + \left(\frac{kV}{g} \right)^2 - \dots \right], \\
 Y_{\max} &= \frac{V_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \left[1 - \frac{2}{3} \frac{kV}{g} + \dots \right], \\
 y &= (\tan \theta)x - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \theta} x^2 - \frac{gk}{3V_0^3 \cos^3 \theta} x^3 + \dots, \quad (2.31)
 \end{aligned}$$

donde se ha asumido que el parámetro perturbativo adimensional $\frac{kV}{g}$ es pequeño. Al hacer $k = 0$ en la ecuaciones anteriores, se obtienen las expresiones –ampliamente conocidas– para el movimiento del proyectil en ausencia de la resistencia del aire.

La *distancia radial* (r) desde el origen hasta el proyectil se puede expresar como una función del tiempo ($r = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$) o de la distancia horizontal ($r = \sqrt{x^2 + y(x)^2}$). En la **Figura 2.9** se muestra a $r(t)$ y a $r(x)$, respectivamente, con $k = 2 \text{ s}^{-1}$, $\theta = 30^\circ$, $V_0 = 10 \text{ m/s}$ y $g = 10 \text{ m/s}^2$. Se observa que la distancia radial presenta un comportamiento especial: crece, luego decrece y vuelve a crecer nuevamente, es decir, hay una oscilación radial. El ángulo crítico a partir del cual se da este comportamiento depende del producto de la velocidad inicial y el parámetro k .

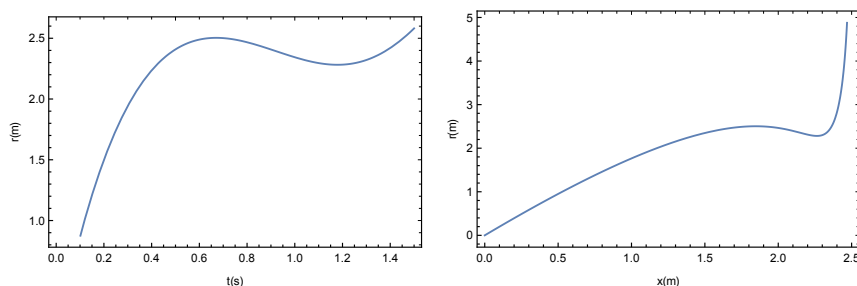


Figura 2.9: Distancia radial desde el origen hasta el proyectil (r) como función del tiempo (izquierda) y de la posición horizontal (derecha), para $k = 2 \text{ s}^{-1}$ y $\theta = 30^\circ$.



A continuación se presenta el código utilizado para obtener las gráficas del **Ejemplo 2.4**.

Código en *Mathematica* para el Ejemplo 2.4

Definiciones:

```

In[1]:= g = 10;
In[2]:= V0 = 10;
In[3]:= θ = π/6;
In[4]:= V = V0 Cos[θ];
In[6]:= k = 2;
In[7]:= x =  $\frac{U}{k} (1 - e^{-k t})$ ;
In[8]:= y =  $-\frac{g}{k} t + \frac{k V + g}{k^2} (1 - e^{-k t})$ ;

```

Código Figura 2.7 izquierda:

```

In[9]:= Plot[x, {t, 0, 1.25}, Frame→True, FrameStyle→Black,
FrameLabel → {"t(s)", "x(m)"}]

```

Código Figura 2.7 derecha:

```

In[10]:= Plot[y, {t, 0, 1.25}, Frame→True, FrameStyle→Black,
FrameLabel → {"t(s)", "y(m)"}]

```

Código Figura 2.8:

```

In[11]:= ParametricPlot[{ $\frac{U}{k} (1 - e^{-k t})$ ,  $-\frac{g}{k} t + \frac{k V + g}{k^2} (1 - e^{-k t})$ },
{t, 0, 1.25}, Frame→True, FrameStyle→Black,
FrameLabel → {"x(m)", "y(m)"}]

```

Definiciones:

```

In[12]:= r =  $\sqrt{x^2 + y^2}$ ;

```

Código Figura 2.9 izquierda:

```

In[13]:= Plot[r, {t, 0, 1.5}, Frame→True, FrameStyle→Black,
FrameLabel → {"t(s)", "r(m)"}]

```

Definiciones:

```

In[14]:= Yx =  $\frac{g}{k^2} \text{Log}[1 - \frac{k}{U} x1] + \frac{k V + g}{k U} x1$ ;
In[15]:= rx =  $\sqrt{(x1)^2 + Yx^2}$ 

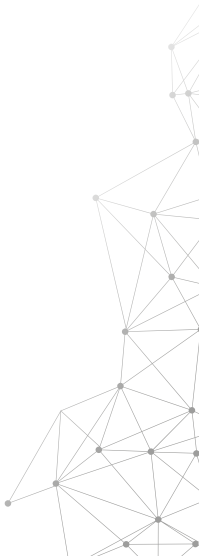
```

Código Figura 2.9 derecha:

```

In[16]:= Plot[rx, {x1, 0, 2.5}, Frame→True, FrameStyle→Black,
FrameLabel → {"x(m)", "r(m)"}]

```



Ejemplo 2.5

Partícula deslizándose sobre un cascarón esférico.

En la parte más alta de medio cascarón esférico (de radio R) se encuentra una partícula de masa m . Si la partícula desciende, encuentre el ángulo o la altura en la cual se desprenderá de la superficie.

Solución.

El movimiento se encuentra restringido a un plano, por lo que podemos plantear las ecuaciones de movimiento en coordenadas cilíndricas (ver **Figura 2.10** y **Ecuaciones (1.28)**):

$$\sum F_{\varphi} = mg \sin \varphi = m(\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}), \quad (2.32)$$

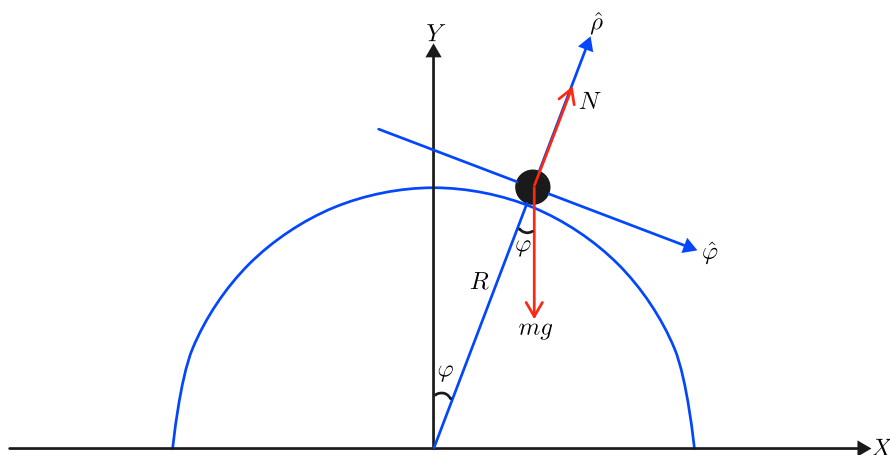


Figura 2.10: Diagrama de fuerzas para el Ejemplo 2.5.



$$\sum F_\rho = N - mg \cos \varphi = m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2). \quad (2.33)$$

Ya que el movimiento se realiza sobre la superficie del cascarón, $\rho = R$ y entonces $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$. Así, las ecuaciones de movimiento se reducen a

$$mg \sin \varphi = mR\ddot{\varphi}, \quad (2.34)$$

$$N - mg \cos \varphi = -mR\dot{\varphi}^2. \quad (2.35)$$

Ahora, si multiplicamos la **Ecuación (2.34)** por $\dot{\varphi}$, tenemos:

$$\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = \frac{g}{R}\dot{\varphi} \sin \varphi,$$

o

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{g}{R} \cos \varphi \right) = 0. \quad (2.36)$$

De otro lado, de la **Ecuación (2.35)** podemos despejar $\dot{\varphi}^2$:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{R} \cos \varphi - \frac{N}{mR}. \quad (2.37)$$

Reemplazando **(2.37)** en **(2.36)**, tenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} \frac{g}{R} \cos \varphi - \frac{N}{2mR} \right) = 0, \quad (2.38)$$

o

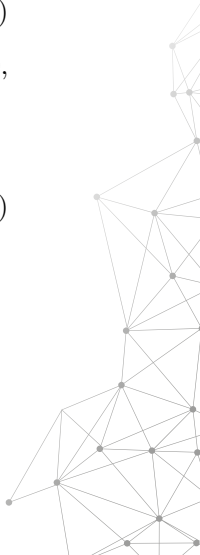
$$\frac{d}{dt} (N - 3mg \cos \varphi) = 0, \quad (2.39)$$

de manera que

$$N - 3mg \cos \varphi = K. \quad (2.40)$$

Para hallar el valor de la constante K , se tiene en cuenta que para $\varphi = 0$, se cumple que $N - mg = -m \frac{v_0^2}{R}$. Así,

$$K = -2mg - m \frac{v_0^2}{R}, \quad (2.41)$$





por lo que la **Ecuación (2.40)** se reescribe como

$$N - 3mg \cos \varphi = -2mg - m \frac{v_0^2}{R}. \quad (2.42)$$

Finalmente, en el instante en que la partícula se desprenda de la superficie la fuerza normal se hará cero. Utilizando esta condición en la **Ecuación (2.42)** encontramos el ángulo buscado,

$$\varphi = \arccos \left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR} \right). \quad (2.43)$$

Como un caso particular, si la partícula parte del reposo se obtiene

$$\varphi = \arccos \left(\frac{2}{3} \right) \rightarrow \varphi \approx 48,19^\circ. \quad (2.44)$$

Ejemplo 2.6

Partícula en el interior de un paraboloide de revolución.

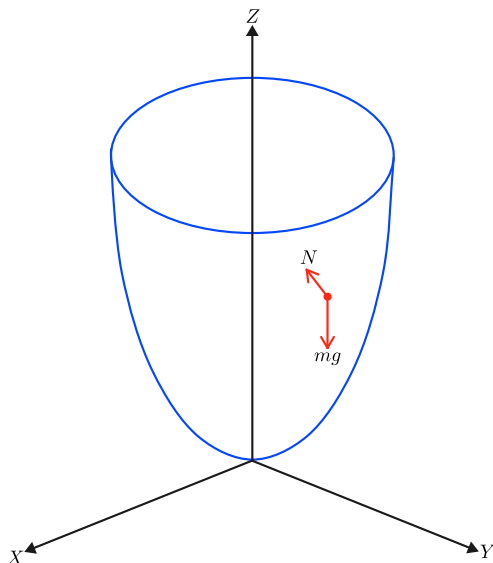


Figura 2.11: Partícula en el interior de un paraboloide de revolución.

Una partícula de masa m se mueve en el interior de un paraboloide de revolución, cuya ecuación es $z = a(x^2 + y^2)$, bajo la acción del campo gravitacional $\vec{g} = -g\hat{z}$ (ver **Figura 2.11**). Suponga que la partícula está inicialmente a una altura h y que se le imprime una velocidad inicial $\vec{v}_0$ en la dirección horizontal y tangente a la superficie de revolución. Encuentre las alturas máxima y mínima que alcanzaría la partícula en su movimiento sobre el paraboloide.

Solución.

El sistema de coordenadas adecuado para resolver este problema es el cilíndrico polar por la simetría que exhibe el problema. Las fuerzas que actúan sobre la partícula se muestran en la **Figura 2.11**.

Si asumimos que no hay fricción entre la superficie del paraboloide y la partícula tendremos que, tanto la fuerza normal como el peso, se encontrarán contenidas en el plano ρ - z , ver **Figura 2.12**.

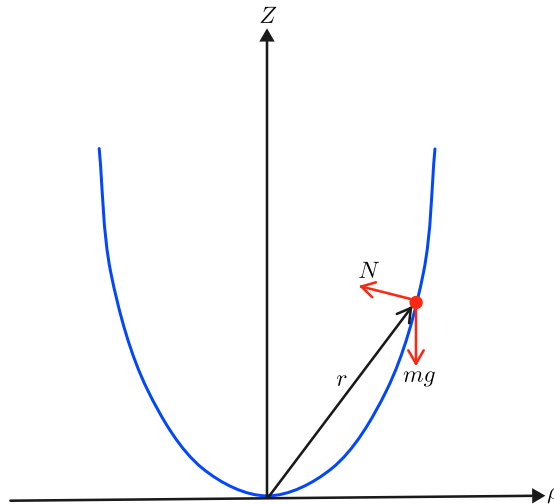
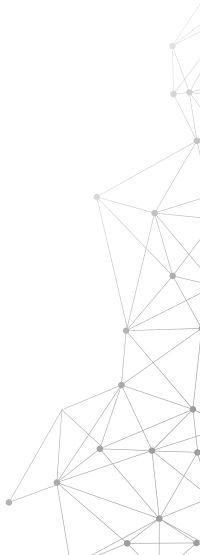


Figura 2.12: Fuerzas en el plano $\rho - z$.



Por otro lado, las expresiones para los vectores posición, velocidad y aceleración en coordenadas cilíndricas polares están dadas por:

$$\begin{aligned}
 \vec{r} &= \rho \hat{\rho} + z \hat{z}, \\
 \dot{\vec{r}} &= \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi} + \dot{z} \hat{z}, \\
 \ddot{\vec{r}} &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{\rho} + (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi}) \hat{\phi} + \ddot{z} \hat{z}.
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Escribiendo la ecuación del paraboloide en coordenadas cilíndricas tenemos: $z = a\rho^2$, por lo que $\dot{z} = 2a\rho\dot{\rho}$ y $\ddot{z} = 2a(\dot{\rho}^2 + \rho\ddot{\rho})$.

Notemos también que la fuerza normal es perpendicular a la velocidad en todo momento, por lo que $\vec{N} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$ y $\vec{N} = -N_\rho \hat{\rho} + N_z \hat{z}$. Así, $N_\rho = 2a\rho N_z$. Haciendo uso de estos resultados podemos ahora escribir las ecuaciones de movimiento para la partícula:

$$\Sigma F_\rho = -2a\rho N_z = m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2), \tag{2.46}$$

$$\Sigma F_\phi = 0 = m(\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi}), \tag{2.47}$$

$$\Sigma F_z = -mg + N_z = 2ma(\dot{\rho}^2 + \rho\ddot{\rho}). \tag{2.48}$$

Estas últimas forman un conjunto de tres ecuaciones con incógnitas ρ , ϕ y N_z . Eliminando N_z de las **Ecuaciones (2.46) y (2.48)**, tenemos

$$-2a\rho g = \ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 + 4a^2\rho(\dot{\rho}^2 + \rho\ddot{\rho}). \tag{2.49}$$

Multiplicando la **Ecuación (2.47)** por ρ tenemos $(\rho^2 \ddot{\phi} + 2\rho\dot{\rho}\dot{\phi}) = \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\phi}) = 0$, por lo que $m\rho^2\dot{\phi} = l$, con l constante. Despejando $\dot{\phi}$ obtenemos

$$\dot{\phi} = \frac{l}{m\rho^2}. \tag{2.50}$$

Sustituyendo en la **Ecuación (2.49)** obtenemos una ecuación diferencial para ρ ,

$$\ddot{\rho} - \frac{l^2}{m^2\rho^3} + 4a^2(\rho\dot{\rho}^2 + \rho^2\ddot{\rho}) + 2a g \rho = 0; \tag{2.51}$$



multiplicando por $\dot{\rho}$ tenemos $\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\rho}^2}{2} + \frac{l^2}{2m^2\rho^2} + 2a^2\rho^2\dot{\rho}^2 + 2ag\rho^2 \right) = 0$, por lo que el término al interior del paréntesis es constante:

$$\frac{\dot{\rho}^2}{2} + \frac{l^2}{2m^2\rho^2} + 2a^2\rho^2\dot{\rho}^2 + 2ag\rho^2 = \text{cte.} \quad (2.52)$$

Esta constante puede ser calculada con las condiciones iniciales del problema $z(0) = h \Rightarrow \rho(0)^2 = h/a$ y $\rho(\dot{0}) = 0$; $\rho(0)\phi(\dot{0}) = v_0 \Rightarrow l^2 = hm^2v_0^2/a$, con lo que $\text{cte} = \frac{1}{2}v_0^2 + gh$. Así,

$$\frac{\dot{\rho}^2}{2} + \frac{l^2}{2m^2\rho^2} + 2a^2\rho^2\dot{\rho}^2 + 2ag\rho^2 = \frac{1}{2}v_0^2 + gh. \quad (2.53)$$

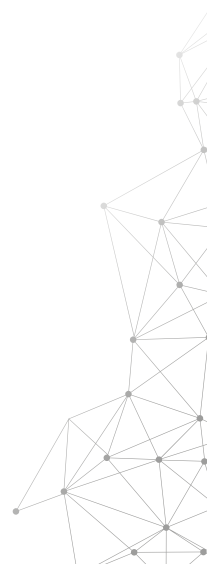
Cuando la partícula se encuentra en su altura máxima (o mínima) $\dot{z} = 0$, lo que equivale a $\dot{\rho} = 0$. Al reemplazar esto en la expresión anterior obtenemos la siguiente ecuación cuadrática en ρ ,

$$2a^2g\rho^4 - (2agh + av_0^2)\rho^2 + hv_0^2 = 0. \quad (2.54)$$

Las soluciones a esta última ecuación son $\rho_1^2 = \frac{h}{a}$ y $\rho_2^2 = \frac{v_0^2}{2ag}$ que, en términos de z , se escriben como:

$$z_1 = h \quad \text{y} \quad z_2 = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (2.55)$$

Se puede ver que si $v_0 < \sqrt{2gh}$ la partícula desciende, por lo que h será la altura máxima; por otra parte, si $v_0 > \sqrt{2gh}$, la partícula ascenderá y h será la altura mínima.



Ejemplo 2.7

Bloque deslizando sobre un plano inclinado con movimiento horizontal.

Un bloque de masa m_2 se desplaza sobre un plano inclinado de masa m_1 que se mueve sobre una superficie horizontal, tirado por una fuerza externa $\vec{F}$ (ver **Figura 2.13**). Asumiendo que hay fuerzas de fricción entre el bloque y el plano inclinado y entre la superficie horizontal y el plano inclinado, obtener las aceleraciones de los dos cuerpos.

Solución.

A partir de la **Figura 2.13** se observa que las variables x_1 , x_2 y y_2 están relacionadas entre sí mediante la siguiente expresión:

$$\tan \theta = \frac{y_2}{x_2 - x_1}.$$

Derivando esta expresión dos veces con respecto al tiempo se tiene:

$$\ddot{y}_2 = (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) \tan \theta. \quad (2.56)$$

En la **Figura 2.14** se muestran los diagramas de cuerpo libre correspondientes a las masas m_1 y m_2 . Descomponiendo las fuerzas mostradas en los diagramas de cuerpo libre, se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

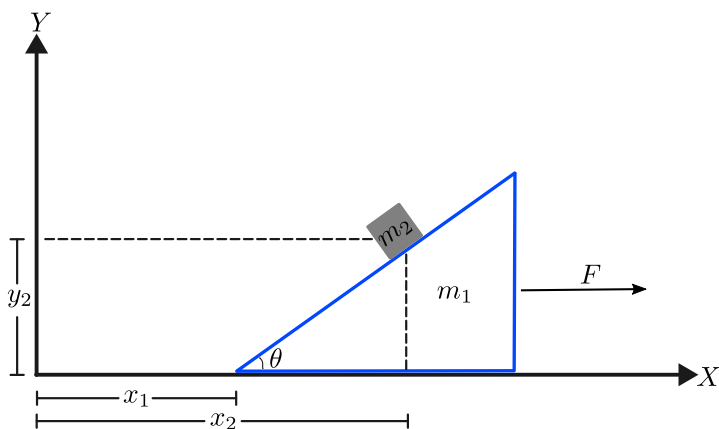


Figura 2.13: Bloque deslizando sobre plano inclinado con movimiento horizontal.

Para m_1 :

$$\sum F_X = -\mu_{k1}N_1 + N_2 (\sin \theta - \mu_{k2} \cos \theta) + F = m_1 \ddot{x}_1, \quad (2.57)$$

$$\sum F_Y = N_1 - N_2 (\cos \theta + \mu_{k2} \sin \theta) - m_1 g = 0. \quad (2.58)$$

Para m_2 :

$$\sum F_X = N_2 (-\sin \theta + \mu_{k2} \cos \theta) = m_2 \ddot{x}_2, \quad (2.59)$$

$$\sum F_Y = N_2 (\cos \theta + \mu_{k2} \sin \theta) - m_2 g = m_2 \ddot{y}_2. \quad (2.60)$$

Las cinco **Ecuaciones (2.56) a (2.60)** forman un sistema de solución única en las variables $\ddot{x}_1$, $\ddot{x}_2$, $\ddot{y}_2$, N_1 y N_2 que puede ser escrito en forma matricial así:

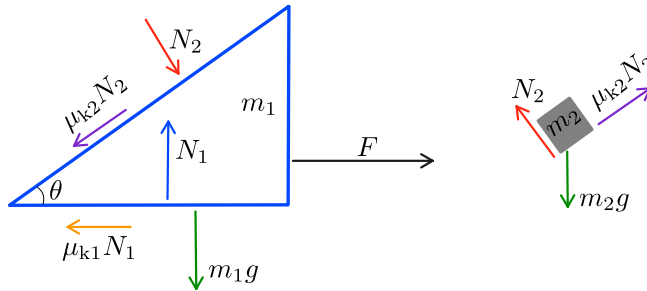
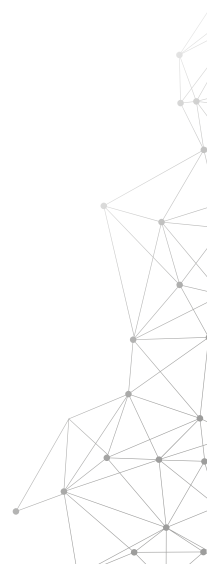


Figura 2.14: Diagramas de cuerpo libre para las masas m_1 y m_2 .



$$\begin{pmatrix} \tan \theta & -\tan \theta & 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_1 & 0 & 0 & \mu_{k1} & -\sin \theta + \mu_{k2} \cos \theta & F \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \cos \theta + \mu_{k2} \sin \theta & -m_1 g \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & \sin \theta - \mu_{k2} \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 & -\cos \theta - \mu_{k2} \sin \theta & -m_2 g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ -m_1 g \\ 0 \\ -m_2 g \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

Solucionando este sistema por el método de Gauss-Jordan tenemos:

$$\ddot{x}_1 = \frac{(-\mu_{k1}\mu_{k2} \cot \theta + \cot \theta + \mu_{k1} + \mu_{k2})m_2 g + (-F + \mu_{k1}(m_1 + m_2)g + \mu_{k2}m_2 g) \csc^2 \theta}{m_1 + m_2 - \mu_{k1}\mu_{k2}m_2 - (\mu_{k1} + \mu_{k2})m_2 \cot \theta + m_1 \cot^2 \theta}, \quad (2.62)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{(\mu_{k2} \cos \theta - \sin \theta)(m_1 g + (-F + \mu_{k1}m_1 g) \tan \theta)}{m_1 \sec \theta - m_2 \sin \theta (\mu_{k1} + \mu_{k2} + (\mu_{k1}\mu_{k2} - 1) \tan \theta)}, \quad (2.63)$$

$$\ddot{y}_2 = -\frac{2 \sin \theta (\sin \theta (\mu_{k2} F - (\mu_{k1}\mu_{k2} - 1)(m_1 + m_2)g) + \cos \theta (F - g(\mu_{k1} + \mu_{k2})(m_1 + m_2)))}{2m_1 - m_2 \sin 2\theta (\mu_{k1} + \mu_{k2}) + m_2 (\mu_{k1}\mu_{k2} - 1) \cos 2\theta - \mu_{k1}\mu_{k2}m_2 + m_2}, \quad (2.64)$$

$$N_1 = \frac{F\mu_{k2}m_2 \cos 2\theta - Fm_2 \sin 2\theta - F\mu_{k2}m_2 + 2m_1 g(m_1 + m_2)}{2m_1 - m_2 \sin 2\theta (\mu_{k1} + \mu_{k2}) + m_2 \cos 2\theta (\mu_{k1}\mu_{k2} - 1) - \mu_{k1}\mu_{k2}m_2 + m_2}, \quad (2.65)$$

$$N_2 = \frac{m_2 (\tan \theta (\mu_{k1}m_1 g - F) + m_1 g)}{m_1 \sec \theta - m_2 \sin \theta (\tan \theta (\mu_{k1}\mu_{k2} - 1) + \mu_{k1} + \mu_{k2})}. \quad (2.66)$$



En el caso especial en que no se tenga la fuerza aplicada $\vec{F}$ y que las superficies sean totalmente lisas, es decir, $\mu_{k1} = \mu_{k2} = 0$, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\ddot{x}_1 = \left(\frac{m_2 \sin \theta \cos \theta}{m_1 + m_2 \sin^2 \theta} \right) g, \quad (2.67)$$

$$\ddot{x}_2 = - \left(\frac{m_1 \sin \theta \cos \theta}{m_1 + m_2 \sin^2 \theta} \right) g, \quad (2.68)$$

$$\ddot{y}_2 = - \left(\frac{(m_1 + m_2) \sin^2 \theta}{m_1 + m_2 \sin^2 \theta} \right) g, \quad (2.69)$$

$$N_1 = \left(\frac{(m_1 + m_2)m_1}{m_1 + m_2 \sin^2 \theta} \right) g, \quad (2.70)$$

$$N_2 = \left(\frac{m_1 m_2 \cos \theta}{m_1 + m_2 \sin^2 \theta} \right) g. \quad (2.71)$$

A continuación se presenta el código en *Mathematica* utilizado para resolver el sistema de **Ecuaciones (2.56)** a **(2.60)** y la aproximación cuando no se considere la fuerza aplicada ni fricción entre las superficies.

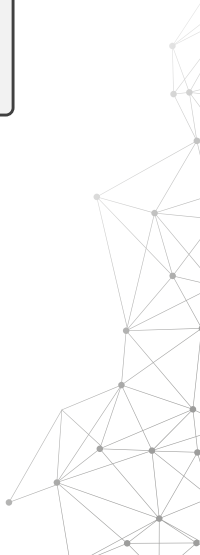
Código en *Mathematica* para el Ejemplo 2.7

Solución al sistema de **Ecuaciones (2.61)**:

```
In[1]:= A=RowReduce[{{Tan[θ],-Tan[θ],1,0,0,0},{m1,0,0,μk1,
-Sin[θ]+μk2*Cos[θ],F},{0,0,0,1,Cos[θ]+μk2*Sin[θ],-m1*g},
{0,m2,0,0,-μk2*Cos[θ]+Sin[θ],0},{0,0,m2,0,-μk2*Sin[θ]
-Cos[θ],-m2*g}}]//FullSimplify
```

Aproximación ($F = 0, \mu_1 = \mu_2 = 0$)

```
In[2]:= A /. {F→0,μk1→0,μk2→0}//FullSimplify
```





Ejercicios

2.8 En relación con el **Ejemplo 2.3** obtener la altura del cohete como función del tiempo, $y(t)$, a partir de (2.22). Asuma que la masa del cohete disminuye linealmente con el tiempo.

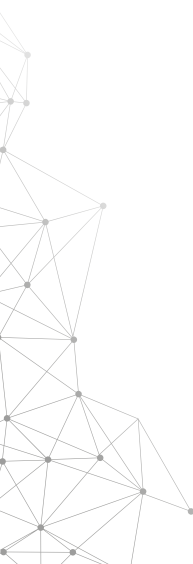
2.9 Obtener las **Ecuaciones (2.24)**.

2.10 Supongamos una partícula de masa m , restringida a moverse sobre la superficie de una esfera de radio R , por la aplicación de una fuerza $\vec{F}(\theta, \phi)$. Escribir la ecuación de movimiento.

2.11 Una partícula esta sujeta a un fuerza unidimensional de la forma $F = te^{t/2}$. Con ayuda de *Mathematica* o de cualquier otro paquete computacional, encuentre la posición, la velocidad y la aceleración como funciones del tiempo.

2.12 Suponga un sistema como el de la **Figura 2.3**, con $\theta_2 = 90^\circ$ y con $m_1 = 2m_2$. Si existe un coeficiente de fricción μ entre el bloque y la superficie, encuentre el valor de θ_1 para el cual el sistema se mueva con velocidad constante.

2.13 Movimiento parabólico sin fricción. Una partícula se lanza desde el piso con una velocidad inicial V_0 formando un ángulo α con la horizontal. Calcule el tiempo requerido para que la partícula intercepte una línea que pase por el origen y forma un ángulo $\beta < \alpha$ con la horizontal. ¿Cuál es la distancia (sobre la recta) alcanzada por la partícula?, ¿para qué ángulo α esta distancia será máxima? ¿Cuál es el rango máximo?



2.14 En relación con el **Ejemplo 2.5** discuta qué sucede en los siguientes casos: (a) cuando la velocidad inicial (v_0) se encuentre en el rango $0 \leq v_0 < \sqrt{gR}$. Grafique el ángulo φ en función de $v_0/\sqrt{gR}$; (b) cuando $v_0 \geq \sqrt{gR}$.

2.15 Dos masas atadas por una cuerda con tensión *variable*. Dos masas en reposo están atadas por una cuerda inextensible como se muestra en la **Figura 2.15**. Demuestre que la tensión T en función del ángulo θ está dada por

$$T(\theta) = \frac{\mu_s mg}{\cos\theta + \mu_s \sin\theta};$$

donde μ_s es el coeficiente de fricción estática entre la superficie horizontal y la masa m . Grafique a T en función de θ . Demuestre que si la tensión es igual en dos ángulos diferentes, $T(\theta_1) = T(\theta_2)$, la condición que deben cumplir estos ángulos es

$$\theta_1 + \theta_2 = 2\tan^{-1}(\mu_s) = 2\theta_{min},$$

donde θ_{min} corresponde al ángulo en el cual la tensión es mínima.

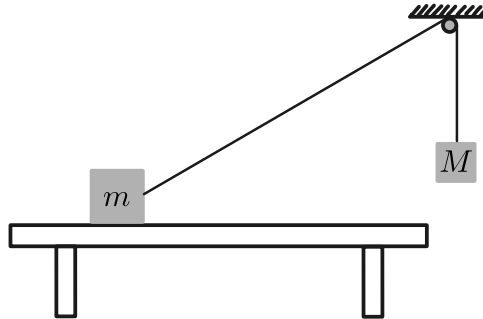


Figura 2.15: Dos masas atadas por una cuerda con tensión variable.

2.2.2. Trabajo y energía

En esta subsección estudiaremos los conceptos de trabajo y energía, los cuales complementan el enfoque vectorial de las leyes de Newton.

Supongamos una partícula que se desplaza del punto A al punto B , por cualquier trayectoria, bajo la acción de una fuerza $\vec{F}$. Definiremos el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ como:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (2.72)$$

Cuando la fuerza $\vec{F}$ sea constante, se obtiene $W_{AB} = F(dr)\cos\theta$. Cuando $\theta = 90^\circ$, la fuerza no realiza trabajo.

Podemos definir un diferencial de trabajo, considerando un desplazamiento infinitesimal de la partícula:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (2.73)$$

De la **Ecuación (2.73)** puede verse que el trabajo en cada desplazamiento infinitesimal será positivo, si el vector fuerza tiene una componente en la dirección del desplazamiento; será negativo, si el vector fuerza tiene una componente en la dirección contraria al desplazamiento; y será cero, si el vector fuerza es perpendicular al desplazamiento. Representar gráficamente estas tres situaciones.

Si $\vec{F}$ representa la fuerza neta sobre la partícula, el lado derecho de la **Ecuación (2.73)** se puede escribir así:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt, \\ &= \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) dt = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (v^2) dt = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right). \end{aligned} \quad (2.74)$$

En el procedimiento anterior se utilizó la **Ecuación (1.16)**.

El trabajo neto para llevar la partícula de A hasta B por cualquier trayectoria se obtiene como:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = T_B - T_A, \quad (2.75)$$

donde $T = \frac{1}{2}mv^2$, se define como la *energía cinética* de la partícula. La **Ecuación (2.75)** se conoce como el *teorema fundamental del trabajo y la energía* y relaciona el trabajo neto hecho sobre una partícula, cuando esta se desplaza entre dos puntos, con la diferencia de la energía cinética de la partícula calculada en esos dos puntos, sin importar la trayectoria.

El teorema del trabajo y la energía permite conocer el trabajo total realizado sobre un objeto, conociendo únicamente los valores de la velocidad en los puntos inicial y final, sin tener información de las fuerzas. De otro lado, existen fuerzas para las cuales el valor de la integral de línea en la **Ecuación (2.75)** depende solo de las posiciones inicial y final y es *independiente* de la trayectoria; estas fuerzas son llamadas *conservativas* y son de gran importancia en el estudio de la mecánica.

Definimos una *fuerza conservativa* como aquella para la cual el trabajo requerido para transportar una partícula solo depende de los valores, en la posición inicial y final, de una función escalar $U(\vec{r})$, así:

$$\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B), \quad (2.76)$$

o, de manera equivalente,

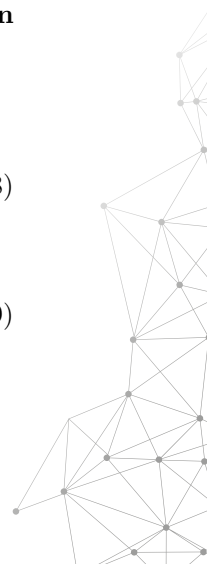
$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r}). \quad (2.77)$$

La función escalar $U(\vec{r})$ se conoce como la *energía potencial* de la partícula. Si combinamos el teorema fundamental del trabajo y la energía (**Ecuación (2.75)**) y la definición de energía potencial (**Ecuación (2.76)**), obtenemos:

$$\begin{aligned} U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B) &= \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2, \\ U(\vec{r}_A) + \frac{1}{2}mv_A^2 &= U(\vec{r}_B) + \frac{1}{2}mv_B^2, \end{aligned} \quad (2.78)$$

o, definiendo la *energía mecánica total del sistema* como $E = T + U$,

$$E_A = E_B. \quad (2.79)$$





La **Relación (2.79)** se conoce como el *teorema de la conservación de la energía mecánica*. Este teorema indica que para un sistema en el cual las fuerzas que actúan sobre la partícula son conservativas, la energía mecánica total, entendida como la suma de la energía cinética más la energía potencial, tiene el mismo valor en cada tiempo y en cada punto de la trayectoria.

Ejemplo 2.8

Partícula bajo la acción de una fuerza conservativa unidimensional.

Consideremos una partícula bajo la influencia de una fuerza conservativa representada mediante un potencial $U(x)$ dado por la **Figura 2.16**. Hacer un análisis cualitativo exhaustivo a partir de la gráfica del potencial para diversos valores de la energía total.

Solución.

El teorema de la conservación de la energía mecánica establece que

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + U(x),$$

de donde se puede encontrar la velocidad como:

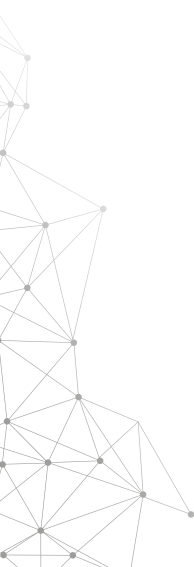
$$v(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que $v = \frac{dx}{dt}$, se obtiene

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}.$$

Si en el tiempo inicial t_0 la partícula se encontraba en la posición x_0 ,

$$\int_{t_0}^t dt = t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}. \quad (2.80)$$



Si se conoce la expresión para la energía potencial $U(x)$ solo se requiere integrar esta última ecuación para obtener la posición como función del tiempo. En muchas ocasiones no es posible obtener una solución analítica por lo que se debe recurrir a soluciones numéricas.

Sin embargo, aun sin resolver la **Ecuación (2.80)**, se puede realizar un análisis *cualitativo* del movimiento de la partícula a partir de la gráfica de la energía potencial.

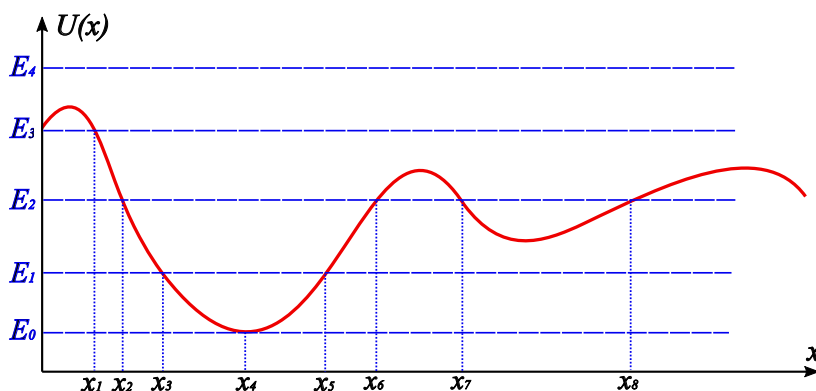


Figura 2.16: Curva de energía potencial $U(x)$ con algunos valores de la energía total indicados.

Supongamos que la partícula se encuentra bajo la acción de un potencial de la forma representada en la **Figura 2.16**. Debemos anotar que ya que la energía cinética siempre es positiva, la energía total debe ser mayor o igual que la energía potencial ($E \geq U$), para que el movimiento corresponda a un caso físico real.

Cuando la partícula tenga una energía total E_1 , su movimiento estará restringido a la zona comprendida entre los puntos x_3 y x_5 . Si la función $U(x)$ en esta región es, por ejemplo, parabólica, la partícula realizará un *movimiento armónico simple*, con x_4 como punto de equilibrio. Debido a la importancia del *movimiento armónico* en diferentes campos de la física, en el **Capítulo 3** se estudia en detalle este tema.



Si la energía total de la partícula es E_2 su movimiento será similar, pero restringido a una de dos regiones: $x_2 < x < x_6$ o $x_7 < x < x_8$; si está inicialmente en una de ellas, no podrá pasar a la otra. La región $x_6 < x < x_7$ es prohibida porque en ella $U(x) > E$.

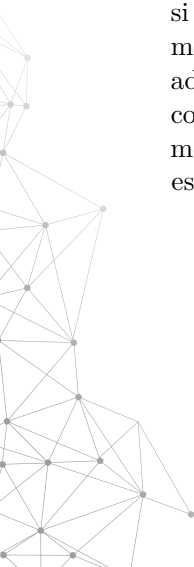
Si su energía total es E_0 , toda su energía será potencial; su energía cinética será cero, es decir, estará en reposo en la posición x_4 .

Con energía total E_3 , la partícula será libre de moverse en $x > x_1$. Si la partícula se acerca al origen, rebotará en la barrera de potencial en x_1 , invertirá su velocidad y regresará hacia el infinito. La región $0 < x < x_1$ es prohibida.

Por último, si la partícula tiene energía total E_4 , se podrá mover en cualquier lugar del espacio, pero su velocidad cambiará de acuerdo con las variaciones de $U(x)$.

De la definición dada en la **Ecuación (2.77)**, se puede apreciar que a la energía potencial se le puede agregar una constante sin alterar el resultado de la fuerza. Esto implica que la energía potencial, por sí sola, no tiene ningún significado físico, lo que realmente importa son los cambios de energía potencial. Así mismo, ya que la velocidad de una partícula depende del sistema de referencia desde el que se mida, son las diferencias de energía cinética las que tienen sentido físico.

Si las fuerzas que actúan sobre la partícula no son conservativas, es decir, si no se puede definir una energía potencial o si la energía potencial definida mediante la **Ecuación (2.76)** no depende únicamente de la posición, sino además, por ejemplo, del tiempo y/o la velocidad y/o la aceleración, no se conserva la energía mecánica, aún cuando esta se pueda seguir definiendo como $E = T + U$. El ejemplo más representativo de una fuerza no conservativa es el rozamiento.





Vale la pena destacar que los dos teoremas de conservación enunciados en esta sección (conservación de la cantidad de movimiento lineal y conservación de la energía mecánica total) no fueron demostrados. Ellos surgieron de forma natural como consecuencia de las leyes de Newton. En este mismo sentido, existe una cantidad adicional que se conserva: el *momento angular*. El momento angular es de gran importancia en el estudio de las fuerzas centrales.

Ejemplo 2.9

Considere una partícula que se mueve bajo la influencia del potencial

$$U(x) = U_0 \left(\frac{a}{x^p} + \frac{x^p}{a} \right),$$

donde $x > 0$, p es un parámetro y las unidades de a son $[x]^p$. Asuma el valor fijo $U_0 = 1$ J y $a > 0$. Hacer el gráfico de $U(x)$ Vs. x para $p = 1, 2, 3, 4$ y determinar si el potencial tiene mínimos (o máximos) y en cuáles regiones el movimiento de la partícula es restringido (o acotado).

Solución.

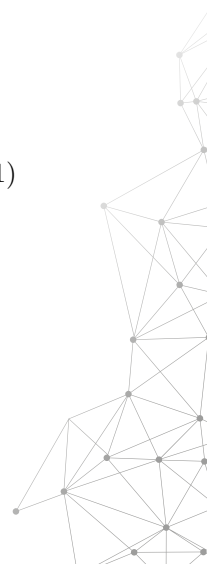
(a) Con el objetivo de analizar la contribución de cada uno de los términos que conforman el potencial, en la **Figura 2.17** se muestra la variación en función de x de a/x^p , x^p/a y $a/x^p + x^p/a$, con $a = 1$ y $p = 1, 2, 3, 4$. En estas gráficas se observa que para valores pequeños de x domina $1/x^p$ y para valores grandes de x domina el término x^p . Como se tomó a positivo, el potencial siempre será positivo y va a tener un mínimo.

(b) La derivada del potencial $U(x)$ respecto a x está dada por:

$$\frac{dU}{dx} = -\frac{ap}{x^{p+1}} + \frac{p}{a}x^{p-1}.$$

Aplicando la condición $\frac{dU}{dx} = 0$, se obtiene que hay puntos críticos en

$$x = a^{\frac{1}{p}}. \quad (2.81)$$



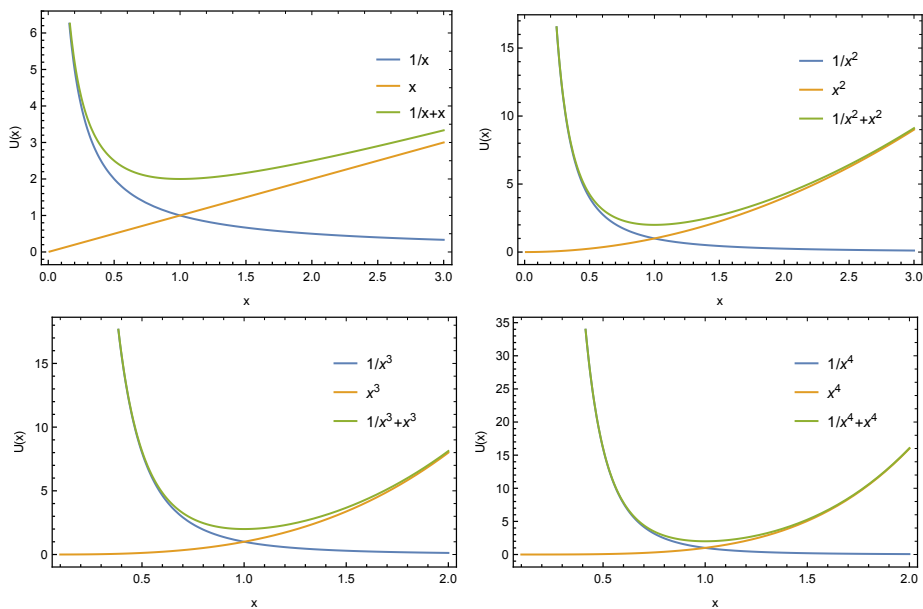


Figura 2.17: Variación de $1/x^p$, x^p y $1/x^p + x^p$ en función de x .

Para determinar si el potencial es máximo o mínimo en este punto crítico se obtiene la segunda derivada del potencial y se evalúa en $x = a^{\frac{1}{p}}$:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{ap(p+1)}{x^{2+p}} + \frac{p(p-1)}{ax^{2-p}},$$

$$\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=a^{\frac{1}{p}}} = 2p^2 > 0;$$

por lo tanto, el potencial es mínimo en $x = a^{\frac{1}{p}}$ y su valor está dado por

$$U_{min} = U(x = a^{\frac{1}{p}}) = 2.$$

Se concluye que el mínimo del potencial es independiente de los valores de p y a .

(c) Cuando la energía total del sistema sea mayor que U_{min} el sistema estará acotado. Una situación especial se muestra en la **Figura 2.18** con la energía total $E = 3 > U_{min}$, y con $a = 4$ y $p = 7$ (aunque U_{min} es independiente de estos valores).

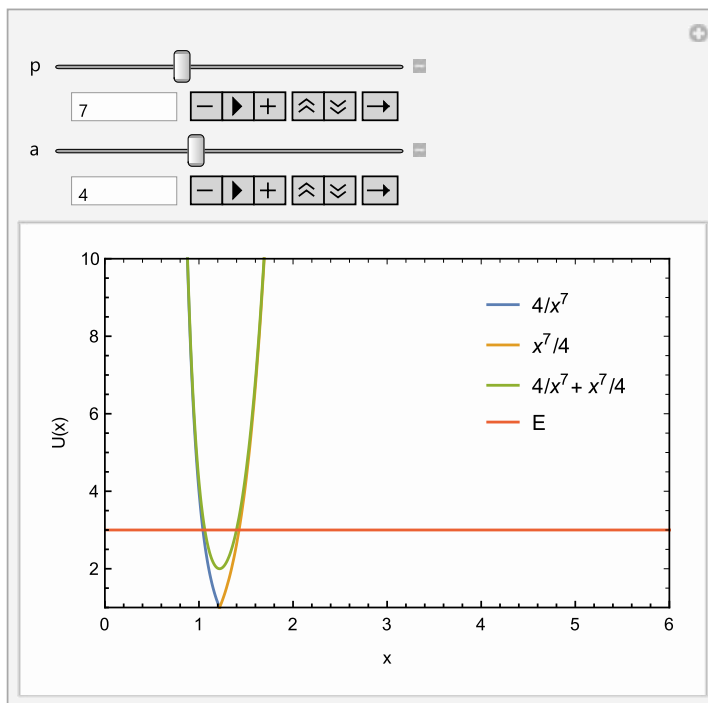
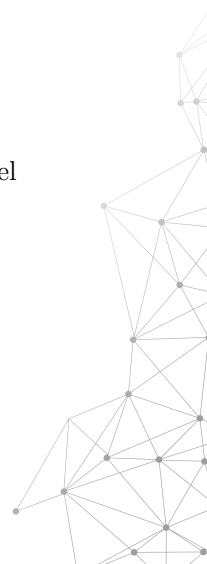


Figura 2.18: Variación de $4/x^7$, $x^7/4$ y $4/x^7 + x^7/4$ en función de x . Parámetros $a = 4$, $p = 7$ y $E = 3$.

A continuación se presenta el código utilizado para obtener las gráficas del **Ejemplo 2.9**.



Código en Mathematica para el Ejemplo 2.9

Definiciones:

```
In[1]:= U0 = 1;
```

```
In[2]:= U[x_, p_, a_] := U0( $\frac{a}{x^p} + \frac{x^p}{a}$ );
```

```
In[3]:= U[x, 1, 2];
```

Código Figuras 2.17

```
In[4]:= Manipulate[Plot[{ $\frac{U_0 a}{x^p}$ ,  $\frac{U_0 x^p}{a}$ , U[x,p,a]}, {x, 0.1, 5},
  Frame→True, FrameStyle→Black, FrameLabel → {"x", "U(x)"},
  PlotLegends→Placed[{1/x4, x4, 1/x4+x4},{0.8, 0.7}]],
  {p, 0, 10}, {a, 0.1, 10}]
```

Código Figura 2.18

```
In[5]:= Manipulate[Plot[{ $\frac{U_0 a}{x^p}$ ,  $\frac{U_0 x^p}{a}$ , U[x,p,a], 3}, {x, 0, 10},
  Frame→True, FrameStyle→Black, FrameLabel → {"x", "U(x)"},
  PlotLegends→Placed[{4/x7, x7/4, 4/x7+x7/4, "E"},
  {0.8, 0.7}], PlotRange → {{0, 6},{1, 10}}], {p, 0, 20},
  {a, 0.1, 10}]
```

Pregunta. Asumiendo que

$$U(x) = U_0 \left(\frac{a}{x^p} + \frac{x^q}{b} \right),$$

con $a, b, p, q > 0$ y $p \neq q$, ¿tiene el potencial un valor mínimo? Si es así, ¿para qué valor de x ?

Ejemplo 2.10

Resolveremos el problema del **Ejemplo 2.5** utilizando la conservación de la energía.

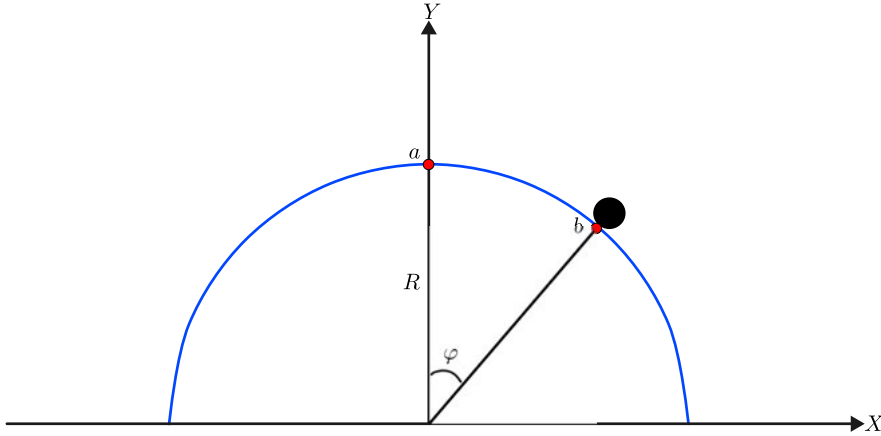


Figura 2.19: Partícula descendiendo sobre la superficie de un cascarón esférico.

Solución.

Ya que no consideramos la fricción, podemos igualar las energías mecánicas en los puntos a (donde $\varphi = 0$) y b (donde se desprende la partícula) de la **Figura 2.19**,

$$E_a = E_b,$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgR \cos \varphi. \quad (2.82)$$

Ahora, en el instante en que se desprende la partícula la fuerza normal debe anularse, por lo que, al aplicar la segunda ley de Newton en el punto b , se obtiene:

$$mg \cos \varphi = m \frac{v^2}{R}. \quad (2.83)$$

Despejando el valor de v^2 en (2.83) y reemplazándolo en (2.82), obtenemos:

$$\varphi = \arccos \left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR} \right). \quad (2.84)$$



Ejercicios

2.16 Para una fuerza conservativa, demostrar la equivalencia entre las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r}) &= -\nabla U(\vec{r}) ; & \nabla \times \vec{F}(\vec{r}) &= 0 ; \\ \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B) ; & \oint \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= 0 .\end{aligned}$$

2.17 Demostrar que si la energía potencial depende explícitamente del tiempo, no se conserva la energía mecánica.

2.18 Para cada una de las siguientes fuerzas unidimensionales, encuentre la energía potencial asociada. Haga una gráfica (con ayuda del *Mathematica* o de cualquier otro programa computacional) y un análisis del movimiento de la partícula (k es una constante positiva): **a.** $F = \frac{k}{x^2}$. **b.** $F = kx - kx^3$. **c.** $F = -kx$.

2.19 Cuando dos átomos o moléculas se acercan, sus nubes electrónicas empiezan a interactuar y aparecen fuerzas que pueden variar rápidamente con la distancia (ver simulación disponible en https://phet.colorado.edu/sims/html/atomic-interactions/latest/atomic-interactions_en.html).

Un modelo matemático sencillo para representar este comportamiento es el llamado *potencial de Lennard-Jones*:

$$U(r) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right],$$

donde r es la distancia entre las partículas, ϵ es la llamada profundidad del potencial y σ es la distancia en la que el potencial entre las partículas es cero. Con ayuda del *Mathematica* graficar el potencial para diferentes valores de σ y ϵ y analizar el movimiento de la partícula. ¿Para qué valor de r el potencial tiene un mínimo? ¿En qué regiones el movimiento de la partícula está restringido (o acotado)?

Nota. El potencial de Lennard-Jones es un caso particular del potencial de Mie: $U(r) = k_p/x^p - k_q/x^q$, donde k_p y k_q son constantes.

2.2.3. Momento angular

El *momento angular* ($\vec{L}$) de una partícula, respecto al origen de un sistema de coordenadas desde el que se define el vector posición $\vec{r}$, está dado por:

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}. \quad (2.85)$$

El *torque o momento de fuerza* $\vec{N}$, respecto al mismo origen de coordenadas, se define como:

$$\vec{N} \equiv \vec{r} \times \vec{F}. \quad (2.86)$$

Si se toma la derivada del momento angular,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}), \quad (2.87)$$

se obtiene (ver **Capítulo 1**):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{N}. \quad (2.88)$$

La **Ecuación (2.88)** implica que si no hay un torque neto actuando sobre la partícula, el momento angular se conserva, es decir, no varía en el tiempo. Ya que el torque depende del sistema de referencia, la adecuada elección del sistema de coordenadas puede facilitar el análisis del problema.

2.3. Dinámica de un sistema de partículas

Hasta aquí hemos estudiado la dinámica de una partícula. Como lo expresamos anteriormente, en diversas situaciones podemos considerar como partícula algunos objetos macroscópicos, despreciando las interacciones entre las partículas que constituyen ese objeto. En lo que sigue, extenderemos nuestra discusión a sistemas formados por muchas partículas. Este estudio será de especial interés cuando se estudie la mecánica del cuerpo rígido.



2.3.1. Centro de masa

Consideremos ahora un sistema compuesto por n partículas cuyas masas sean $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$. La masa total del sistema M , será

$$M = \sum_{i=1}^n m_i. \quad (2.89)$$

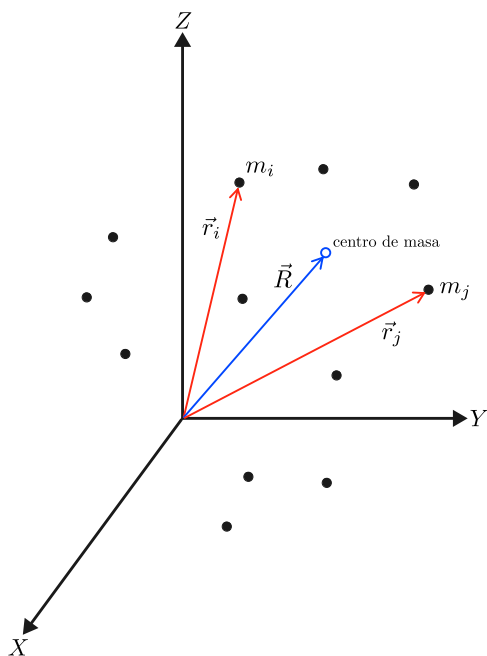


Figura 2.20: Vector posición del centro de masa para un sistema de partículas.

Se define el *centro de masa* de un sistema como el punto geométrico que se comporta como si sobre él actuara la resultante de todas las fuerzas externas al sistema.



Si respecto al sistema de referencia escogido, $\vec{r}_i$ representa el vector posición de la i -ésima partícula, se define el vector *posición del centro de masa* $\vec{R}$ como:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i; \quad (2.90)$$

En la **Figura 2.20** se puede ver que el vector $\vec{R}$ depende del sistema de coordenadas elegido.

Para un sistema en el que la distribución de la masa sea continua, la suma en (2.90) se reemplaza por una integral,

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm, \quad (2.91)$$

donde $dm = \rho dV$, siendo ρ la densidad del cuerpo. La integral considerada en esta ecuación es triple.

Ejercicios

2.20 Considere dos masas m_1 y m_2 ubicadas en los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$, respectivamente. Obtener el centro de masa en los siguientes casos: (a) $m_1 = m_2 = m$; (b) $m_1 = m$ y $m_2 = 2m$; (c) $m_1 = m$ y $m_2 = 100m$. ¿Qué concluye?

2.21 Calcular la posición del centro de masa de la distribución mostrada en la **Figura 2.21**



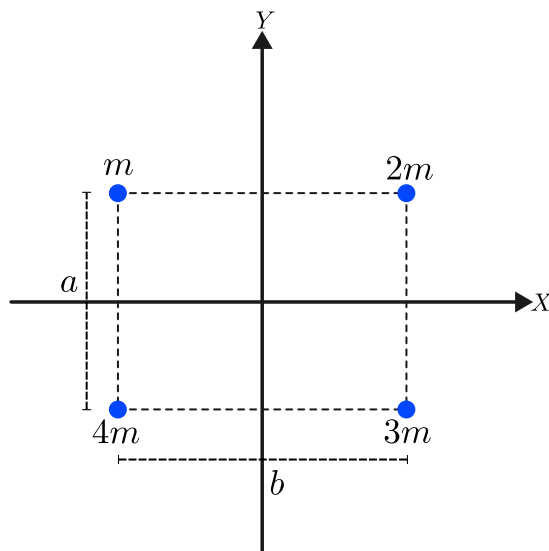


Figura 2.21: Cuatro masas ubicadas en los vértices de un rectángulo de lados a y b .

2.22 Obtener la posición del centro de masa de un sistema formado por tres masas $m_1 = m$, $m_2 = 2m$ y $m_3 = 3m$ ubicadas en los puntos $(b, 0, b)$, $(0, b, 2b)$ y $(0, 2b, b)$, respectivamente.

2.23 Calcular la posición del centro de masa del hemisferio superior de un cascarón esférico de radio R y densidad (masa por unidad de área) constante σ .

2.24 Mostrar que

$$M^2 R^2 = M \sum_i m_i r_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_i m_j r_{ij}^2.$$

Tener en cuenta que $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$, lo cual implica $r_{ij}^2 = \vec{r}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij} = r_i^2 + r_j^2 - 2\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j$.

2.25 Obtener la posición del centro de masa para la molécula de agua (ver **Figura 1.5**, en el **Capítulo 1**, en la sección de Tensores).

2.26 Obtener la posición del centro de masa para los triángulos de densidad uniforme que se muestran en las **Figuras 1.6 y 2.22**.

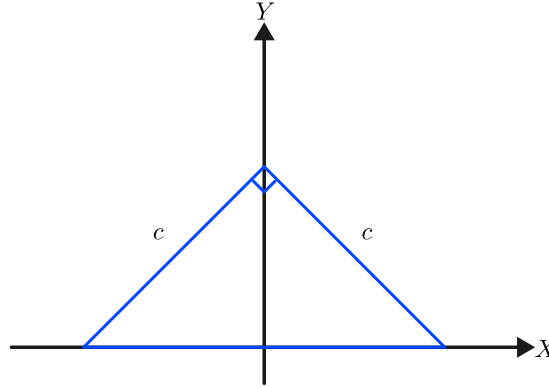


Figura 2.22: Triángulo rectángulo e isósceles ubicado en los cuadrantes I y II.

2.3.2. Momento lineal del sistema

Denotemos con $\vec{F}_i$ la fuerza neta que actúa sobre la i -ésima partícula del sistema. Esta fuerza se puede descomponer en dos: la fuerza neta hecha desde el exterior del sistema sobre la i -ésima partícula, que denotaremos fuerza externa, $\vec{F}_i^{(e)}$; y la resultante de la suma de las fuerzas internas debida a las restantes $n - 1$ partículas del sistema,

$$\vec{f}_i = \sum_{j \neq i}^n \vec{f}_{ij}, \quad (2.92)$$

donde $\vec{f}_{ij}$ representa la fuerza sobre la partícula i , debida a la partícula j ; el término $i = j$ no entra en la suma, ya que $\vec{f}_{ii} = 0$. La fuerza total sobre la partícula i -ésima será:





$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{f}_i. \quad (2.93)$$

Aplicando la segunda ley de Newton a la partícula i -ésima,

$$\vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt} = m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{j \neq i}^n \vec{f}_{ij}. \quad (2.94)$$

La relación **(2.94)** constituye la ecuación dinámica de movimiento para la partícula i -ésima. Sumemos ahora las ecuaciones para cada una de las partículas del sistema,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \vec{f}_{ij}, \quad \text{ó} \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \right) &= \vec{F}^{(e)} + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \vec{f}_{ij}. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Donde hemos definido la *fuerza externa neta* como la suma de todas las fuerzas externas actuando sobre cada partícula del sistema, $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(e)} \equiv \vec{F}^{(e)}$. El último término de la derecha de la **Ecuación (2.95)** desaparece considerando que, de acuerdo con la tercera ley de Newton, $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$ (verificar para $n = 3$). Utilizando la definición del vector posición del centro de masa:

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \vec{F}^{(e)}. \quad (2.96)$$

Este importante resultado indica que el centro de masa del sistema se mueve como si fuera una única partícula de masa M sobre la que actúa la fuerza externa total $\vec{F}^{(e)}$, sin importar las fuerzas internas.

Ejercicio

2.27 Completar los pasos intermedios para obtener la **Ecuación (2.96)**

Ya definimos anteriormente el *momento lineal del sistema* $\vec{P}$ como la suma de los momentos lineales de cada partícula,

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \frac{d}{dt} (M\vec{R}) = M \frac{d\vec{R}}{dt}, \quad (2.97)$$

o, de manera alternativa

$$\vec{P} = M\vec{V}, \quad (2.98)$$

donde hemos definido la *velocidad del centro de masa* como $\vec{V} \equiv \frac{d\vec{R}}{dt}$. Así, el *momento lineal total del sistema* es el mismo que tendría una partícula de masa M moviéndose con la velocidad del centro de masa. Si tomamos la derivada de $\vec{P}$,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}^{(e)}. \quad (2.99)$$

La **Relación (2.99)** indica que *cuando no existen fuerzas externas sobre el sistema, el momento lineal total del sistema se conserva y su valor es igual al del momento lineal del centro de masa, $\vec{P} = M\vec{V}$.*

2.3.3. Momento angular y torque en un sistema de partículas

Definamos como $\vec{r}_i'$ la posición relativa de la i -ésima partícula con respecto al centro de masa (ver **Figura 2.23**),

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{R}. \quad (2.100)$$

Derivando respecto al tiempo obtendremos las relaciones para las velocidades

$$\vec{v}_i' = \vec{v}_i - \vec{V}, \quad (2.101)$$

donde $\vec{v}_i'$ representa la velocidad de la partícula respecto al centro de masa, y $\vec{V}$ la velocidad del centro de masa.

De manera análoga a como se definió para el caso de una partícula, en un sistema de n partículas se define el momento angular de la i -ésima partícula como:



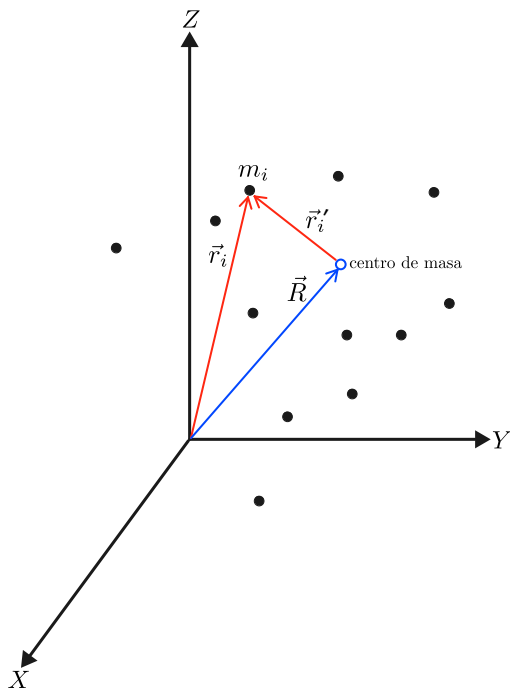


Figura 2.23: Posición relativa de una partícula respecto al centro de masa.

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i; \quad (2.102)$$

y el momento angular total del sistema:

$$L = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i). \quad (2.103)$$

Utilizando la **Ecuación (2.100)**, podemos reescribir el momento angular total en términos del centro de masa:

$$L = \sum_i^n (\vec{r}'_i + \vec{R}) \times m_i (\vec{v}'_i + \vec{V}); \quad (2.104)$$

esto es,

$$L = \sum_i^n (\vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i') + \sum_i^n (m_i \vec{r}_i') \times \vec{V} + \vec{R} \times \sum_i^n (m_i \vec{v}_i') + \vec{R} \times \sum_i^n (m_i \vec{V}) \quad (2.105)$$

El segundo y tercer término de la derecha de la **Ecuación (2.105)** se anulan (demostrarlo o argumentar cualitativamente). Por lo tanto,

$$\vec{L} = \sum_i^n (\vec{r}_i' \times \vec{p}_i') + \vec{R} \times M\vec{V}. \quad (2.106)$$

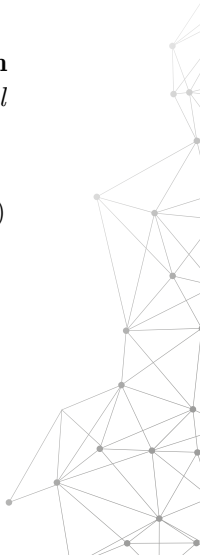
Es decir, *el momento angular total del sistema $\vec{L}$, se puede escribir como la suma de dos contribuciones: el momento angular relativo al centro de masa ($\sum_i^n (\vec{r}_i' \times \vec{p}_i')$) y el momento angular del centro de masa ($\vec{R} \times M\vec{V}$).*

Tomemos ahora la derivada temporal del momento angular total (**Ecuación (2.103)**),

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_i^n \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i), \\ &= \sum_i^n (\vec{v}_i \times m \vec{v}_i) + \sum_i^n (\vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}), \\ &= \sum_i^n \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i^{(e)} + \sum_{j \neq i}^n \vec{f}_{ij} \right), \\ &= \sum_i^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} + \sum_i^n \sum_{j \neq i}^n (\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}). \end{aligned} \quad (2.107)$$

Teniendo en cuenta la tercera ley de Newton, el último término de la **Ecuación (2.107)** se anula (demostrarlo). Por lo tanto, definiendo el *torque total del sistema* como $\vec{N} = \sum_{i=1}^n \vec{N}_i$, la **Ecuación (2.107)** queda:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} = \sum_i \vec{N}_i = \vec{N}. \quad (2.108)$$



La **Ecuación (2.108)** define la conservación del momento angular para un sistema de partículas: si el torque total externo sobre un sistema de partículas es cero, el momento angular total del sistema permanecerá constante en el tiempo.

2.3.4. Teorema del trabajo y la energía en un sistema de partículas

Definamos la *energía cinética total del sistema* (T) de n partículas, como la suma de las energías cinéticas de cada partícula,

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^n m_i v_i^2. \quad (2.109)$$

En coordenadas del centro de masa,

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{V}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i^n m_i (\vec{v}_i' + \vec{V}) \cdot (\vec{v}_i' + \vec{V}), \\ &= \frac{1}{2} \sum_i^n m_i V^2 + \frac{1}{2} \sum_i^n m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} (2) \vec{V} \cdot \sum_i^n m_i \vec{v}_i'. \end{aligned} \quad (2.110)$$

El último término de la derecha de la **Ecuación (2.110)** es $\sum_i^n m_i \vec{v}_i' = 0$. Por lo tanto, la energía cinética total del sistema será:

$$T = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum_i^n m_i v_i'^2. \quad (2.111)$$

La energía cinética de un sistema de muchas partículas es igual a la energía cinética del centro de masa más la suma de las energías cinéticas, relativas al centro de masa, de todas las partículas del sistema.

Definamos ahora el trabajo neto para llevar el sistema de partículas de un estado A , a un estado B así:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \sum_i^n \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i, \\ &= \sum_i^n \int_A^B m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot (\vec{v}_i dt) = \frac{1}{2} \sum_i^n m_i \int_A^B d(v_i^2). \end{aligned} \quad (2.112)$$

Con esta definición:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \frac{1}{2} \left(\sum_i^n m_i v_i^2 \right)_B - \frac{1}{2} \left(\sum_i^n m_i v_i^2 \right)_A, \\ W_{AB} &= T_B - T_A. \end{aligned} \quad (2.113)$$

La **Relación (2.113)** representa el *teorema del trabajo y la energía para un sistema de partículas*.

Energía potencial en un sistema de partículas

Recordemos que la fuerza total sobre la partícula i -ésima de un sistema es

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{j \neq i}^n \vec{f}_{ij}. \quad (2.114)$$

Si sumamos sobre todas las partículas y aplicamos la tercera ley de Newton,

$$\vec{F} = \sum_i^n \vec{F}_i = \sum_i^n \vec{F}_i^{(e)}. \quad (2.115)$$

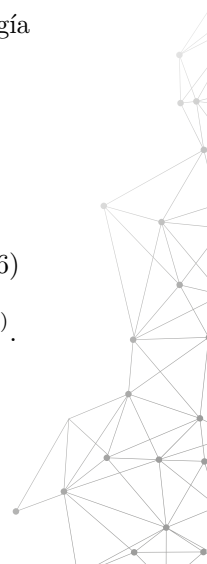
Ahora, si $\vec{F}_i^{(e)}$ es conservativa, podemos definirla en términos de la energía potencial como $\vec{F}_i^{(e)} = -\nabla U_i^{(e)}$, entonces

$$\vec{F} = -\nabla \left(\sum_i^n U_i^{(e)} \right)$$

o

$$\vec{F} = -\nabla U_T, \quad (2.116)$$

donde hemos definido la energía potencial total del sistema como $U_T \equiv \sum_i^n U_i^{(e)}$.



**Ejercicio**

2.28 Demostrar que para el caso en que $\vec{F}_i^{(e)}$ sea conservativa, se puede definir el teorema de conservación de la energía mecánica, de manera análoga a como se definió para una partícula.

2.3.5. Caso especial: cuerpo rígido

Un *cuerpo rígido* es un objeto cuya forma no cambia bajo la acción de fuerzas externas. Por lo tanto, las distancias relativas entre las partículas que conforman el cuerpo están fijas, es decir, no varían. Si el cuerpo rígido está fijo en un punto, entonces, no se trasladará, sino que rotará con velocidad angular instantánea $\vec{\omega}$ alrededor del punto fijo. A continuación se obtendrán las expresiones para el momento angular y la energía cinética para un cuerpo rígido.

Momento angular ($\vec{L}$) de un cuerpo rígido. Tal como se definió previamente, el momento angular para un sistema conformado por n partículas es:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} \times \vec{v}_{\alpha}), \\ &= \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha})), \\ &= \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} (\vec{\omega} r_{\alpha}^2 - \vec{r}_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} \cdot \vec{\omega})).\end{aligned}\tag{2.117}$$

Para obtener la última expresión se utilizó la tercera de las ecuaciones mostradas en el **Ejercicio 1.22**, con $\vec{A} = \vec{C} \equiv \vec{r}_{\alpha}$ y $\vec{B} \equiv \vec{\omega}$.

La k -ésima componente de $\vec{L}$ está dada por:

$$\begin{aligned}
 L_k &= \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \left[\omega_k \sum_{i=1}^3 x_{\alpha,i}^2 - x_{\alpha,k} \sum_{j=1}^3 x_{\alpha,j} \omega_j \right], \\
 L_k &= \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \left[\sum_{j=1}^3 \omega_j \delta_{kj} \sum_{i=1}^3 x_{\alpha,i}^2 - x_{\alpha,k} \sum_{j=1}^3 x_{\alpha,j} \omega_j \right], \\
 L_k &= \sum_{j=1}^3 \underbrace{\left[\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \left(\delta_{kj} \sum_{i=1}^3 x_{\alpha,i}^2 - x_{\alpha,k} x_{\alpha,j} \right) \right]}_{\mathbb{I}_{kj}} \omega_j, \\
 L_k &= \sum_{j=1}^3 \mathbb{I}_{kj} \omega_j;
 \end{aligned} \tag{2.118}$$

donde $\mathbb{I}$ es el *tensor de inercia* y $x_{\alpha,i}$ es la i -ésima componente del vector posición de la α -ésima partícula. En notación compacta, la expresión anterior se puede ver como el producto escalar entre un tensor de segundo rango y un vector:

$$\vec{L} = \mathbb{I} \cdot \vec{\omega}.$$

Este tensor relaciona una suma sobre las componentes de la velocidad angular con la k -ésima componente del momento angular. Sus componentes están dadas por (ver **Ecuación (1.36)**)

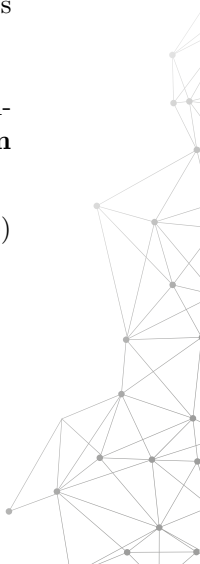
$$\mathbb{I}_{kj} \equiv \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \left(\delta_{kj} \sum_{i=1}^3 x_{\alpha,i}^2 - x_{\alpha,k} x_{\alpha,j} \right). \tag{2.119}$$

Las componentes $\mathbb{I}_{11}$, $\mathbb{I}_{22}$ e $\mathbb{I}_{33}$ se llaman *momentos de inercia*, mientras que las componentes $\mathbb{I}_{12}$, $\mathbb{I}_{13}$ e $\mathbb{I}_{23}$ se denominan *productos de inercia*. Todas estas componentes dependen de la dirección del eje de rotación.

Si el cuerpo corresponde a una distribución continua de materia con densidad de masa $\rho = \rho(\vec{r})$, el tensor de inercia está dado por (ver **Ecuación (1.37)**)

$$\mathbb{I}_{jk} \equiv \int_V \rho(\vec{r}) \left(\delta_{jk} \sum_i x_i^2 - x_j x_k \right) dV, \tag{2.120}$$

donde dV es el diferencial de volumen.





Pregunta. ¿Cuáles son las unidades de las componentes del tensor de inercia? (ver **Ecuaciones (2.119)** o **(2.120)**).

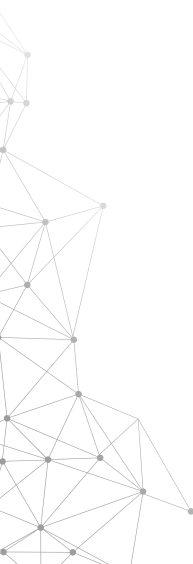
Nota. En la **Sección 1.9**, se explican detalladamente algunas propiedades del tensor de inercia y se obtiene el tensor de inercia para algunos cuerpos.

La **Ecuación (2.118)** indica que cada una de las componentes del momento angular está dada por una función lineal de todas las componentes del vector velocidad angular. Es decir, *el momento angular y la velocidad angular están relacionados mediante una transformación lineal*. A continuación se mostrará explícitamente esto, haciendo $k = 1, 2, 3$ en la **Ecuación (2.118)**:

$$\begin{aligned} L_1 &= \mathbb{I}_{11}\omega_1 + \mathbb{I}_{12}\omega_2 + \mathbb{I}_{13}\omega_3, \\ L_2 &= \mathbb{I}_{21}\omega_1 + \mathbb{I}_{22}\omega_2 + \mathbb{I}_{23}\omega_3, \\ L_3 &= \mathbb{I}_{31}\omega_1 + \mathbb{I}_{32}\omega_2 + \mathbb{I}_{33}\omega_3. \end{aligned}$$

A partir de la **Ecuación (2.119)**, los momentos de inercia, en forma explícita, son:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{11} &= \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \left(\sum_{i=1}^3 x_{\alpha,i}^2 - x_{\alpha,1}x_{\alpha,1} \right) = \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} (r_{\alpha}^2 - x_{\alpha}^2) \\ \mathbb{I}_{22} &= \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \left(\sum_{i=1}^3 x_{\alpha,i}^2 - x_{\alpha,2}x_{\alpha,2} \right) = \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} (r_{\alpha}^2 - y_{\alpha}^2) \\ \mathbb{I}_{33} &= \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \left(\sum_{i=1}^3 x_{\alpha,i}^2 - x_{\alpha,3}x_{\alpha,3} \right) = \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} (r_{\alpha}^2 - z_{\alpha}^2). \end{aligned}$$





Y los productos de inercia son:

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{12} &= -\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} x_{\alpha,1} x_{\alpha,2} = -\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} x_{\alpha} y_{\alpha}, \\ \mathbb{I}_{13} &= -\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} x_{\alpha,1} x_{\alpha,3} = -\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} x_{\alpha} z_{\alpha}, \\ \mathbb{I}_{23} &= -\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} x_{\alpha,2} x_{\alpha,3} = -\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} y_{\alpha} z_{\alpha};\end{aligned}$$

donde $x_{\alpha,1} = x_{\alpha}$, $x_{\alpha,2} = y_{\alpha}$, $x_{\alpha,3} = z_{\alpha}$ y $\sum_{i=1}^3 x_{\alpha,i}^2 = x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2 = r_{\alpha}^2$. Como el tensor de inercia es simétrico (ver **Sección 1.9**), entonces $\mathbb{I}_{12} = \mathbb{I}_{21}$, $\mathbb{I}_{13} = \mathbb{I}_{31}$ e $\mathbb{I}_{23} = \mathbb{I}_{32}$.

El tensor de inercia se puede representar por una matriz cuadrada 3×3 . Cuando todos los productos de inercia son cero, entonces, el tensor de inercia se representa por una matriz diagonal: $\mathbb{I}_{kj} = I_k \delta_{kj}$, donde los I_k son los elementos de la diagonal de esta matriz. En este caso,

$$L_k = \sum_j \mathbb{I}_{kj} \omega_j = \sum_j I_k \delta_{kj} \omega_j = I_k \omega_k. \quad (2.121)$$

Los ejes del sistema coordinado en el cual el tensor de inercia es diagonal, se llaman *ejes principales de inercia*.

Energía cinética de un cuerpo rígido. La energía cinética rotacional de un cuerpo rígido, formado por n partículas y fijo en un punto, está dada por:





-

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} v_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot \vec{v}_{\alpha},$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}),$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_{\alpha} \times \vec{v}_{\alpha}) \text{ (se aplicó la segunda ecuación del **Ejercicio 1.22**)},$$

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_{\alpha=1}^n \vec{r}_{\alpha} \times m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha},$$

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_{\alpha=1}^n \vec{r}_{\alpha} \times \vec{p}_{\alpha},$$

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L},$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \omega_i L_i;$$

De acuerdo con la **Ecuación (2.118)**, $L_i = \sum_{j=1}^3 \mathbb{I}_{ij} \omega_j$. Al sustituirlo en la ecuación anterior se obtiene:

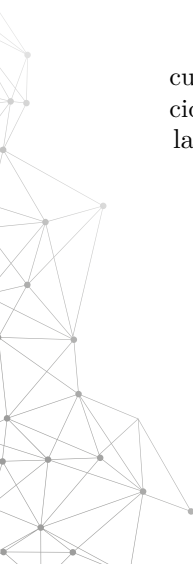
$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \mathbb{I}_{ij} \omega_i \omega_j. \quad (2.122)$$

En notación compacta, la expresión anterior se puede escribir como:

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbb{I} \cdot \vec{\omega}.$$

Pregunta. A partir de la **Ecuación (2.122)**, ¿cuáles son las unidades del tensor de inercia?

De acuerdo con la **Ecuación (2.122)**, la energía cinética (rotacional) del cuerpo rígido que está fijo en un punto es una función cuadrática de las velocidades angulares y el tensor de inercia es el factor de proporcionalidad entre la energía cinética y la velocidad angular.



Cuando todos los productos de inercia son nulos, es decir, cuando el tensor de inercia se representa por medio de una matriz cuadrada, la **Ecuación (2.122)** se transforma en:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mathbb{I}_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} \sum_i \mathbb{I}_i \omega_i^2 = \frac{1}{2} (\mathbb{I}_1 \omega_1^2 + \mathbb{I}_2 \omega_2^2 + \mathbb{I}_3 \omega_3^2).$$

Esta expresión indica que al considerar los ejes principales de inercia, la energía cinética se representa por un elipsoide. Si $\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_2 = \mathbb{I}_3$, la energía cinética corresponde a la superficie de una esfera; y si $\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_2 \neq \mathbb{I}_3$, está dada por un esferoide.

Finalmente, reemplazando a la velocidad angular por $\dot{\theta}$, la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \mathbb{I}_{ij} \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j.$$

Si $\dot{\theta}_i$ y $\dot{\theta}_j$ son independientes, se obtiene:

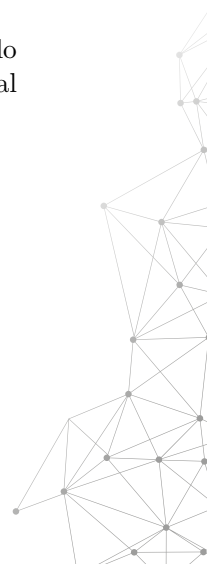
$$\sum_l \dot{\theta}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_l} = 2T,$$

donde se usó la **Ecuación (1.50)**.

Ejercicios

2.29 Obtener el momento angular y la energía cinética para la molécula de agua (ver **Ejemplo 1.7**) en el caso que gire en torno al eje Z con velocidad angular constante.

2.30 Obtener el momento angular y la energía cinética para el triángulo mostrado en la **Figura 1.6** (ver **Ejemplo 1.8**) en el caso que gire en torno al eje Z con velocidad angular constante.





2.31 Obtener el tensor de inercia, el momento angular y la energía cinética para el cuerpo rígido mostrado en la **Figura 2.21**, con respecto al centro de masa. Hallar un sistema de ejes principales.

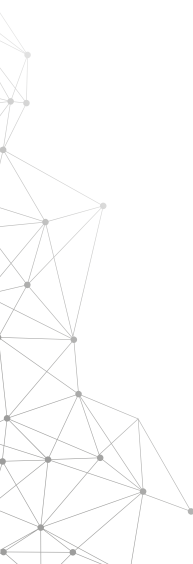
2.32 Considere un cuerpo rígido formado por tres masas $m_1 = m$, $m_2 = 2m$ y $m_3 = 3m$ ubicadas en los puntos $(b, 0, b)$, $(0, b, 2b)$ y $(0, 2b, b)$, respectivamente (ver **Ejercicio 2.21**). Hallar el tensor de inercia, el momento angular y la energía cinética asumiendo que el cuerpo está fijo en su centro de masa. Hallar un sistema de ejes principales.

2.4. Actividades complementarias

A continuación se listan algunos artículos con el objetivo de complementar, profundizar o extender los temas tratados en el presente capítulo.

1. Los sistemas con *masa variable* son poco tratados en la mayoría de libros de texto de mecánica clásica. Sin embargo, es un tema que tiene aplicaciones prácticas y sobre el cual se puede investigar. Algunos autores plantean que la **Ecuación (2.10)** viola el principio de relatividad bajo transformaciones galileanas. Los siguientes artículos son una motivación para profundizar en este tema:

- Thomaz MT, Correa EV. Center of mass of a system of variable mass particles. *Rev Bras Ens Fis.* 2019; 41(3).
- Thomaz MT. Newton's Second Law of a particle with variable mass. *Rev Bras Ens Fis.* 2021; 43.
- Plastino AR, Muzzio JC. On the use and abuse of Newton's second law for variable mass problems. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy.* 1992; 53.
- Koczan GM. Defining of three-dimensional acceleration and inertial mass leading to the simple form $F=MA$ of relativistic motion equation. [Physics.hist-ph]. [Fecha desconocida].

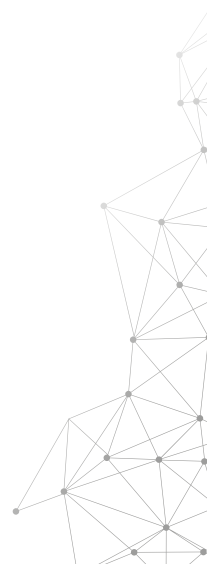




- Pesce CP, Casseta L. Variable mass systems dynamics in engineering mechanics education *Proceedings of COBEM, 19th Int. Int Con Mech Eng.* 2007.
- Wolny J, Strzalka R. Momentum in the dynamics of variable-mass systems: classical and relativistic case. *Acta Physica Polonica A.* 2019; 135(3): 475–9.
- Awrejcewicz J. Dynamics of Systems of Variable Mass. *Classical Mechanics*, chapter. 2012; 341–57.
- Eke FO, Mao TC. On the dynamics of variable mass systems. *International Journal of Mechanical Engineering Education.* 2002; 30(2).

2. El movimiento parabólico de un proyectil sin considerar la fricción que ejerce el medio en el cual la partícula se mueve, es un caso ideal. Una manera de incluir la fricción es considerar fuerzas que dependan de la velocidad ($\sim v^n$). Este tema da la oportunidad de explorar este movimiento tomando diferentes valores para n , usando herramientas computacionales. En los siguientes artículos se trabaja movimiento parabólico asumiendo fuerzas de fricción que varían lineal o cuadráticamente con la velocidad:

- Stewart SM. An analytic approach to projectile motion in a linear resisting medium. *Int J Math Educ Sci Technol.* 2006; 37(4).
- Hernandez-Saldana H. On the locus formed by the maximum heights of projectile motion with air resistance *Eur. J Phys.* 2010; 31.
- Morales DA. A generalization on projectile motion with linear resistance *Can. J Phys.* 2011; 89.
- Ivchenko V. On projectile motion with the quadratic drag force. *Eur J Phys.* 2018; 39.
- Belgacem CH. Range and flight time of quadratic resisted projectile motion using the Lambert W function. *Eur J Phys.* 2014; 35.
- Benacka J. Solution to projectile motion with quadratic drag and graphing the trajectory in spreadsheets. *Int J Math Educ Sci Tech.* 2010; 41(3).
- Karkantzakos PA. Time of flight and range of the motion of a projectile in a constant gravitational field under the influence of a retarding force proportional to the velocity. *J Eng Sci Tech Rev.* 2009; 2(1).
- De Alwis T. Projectile motion with Mathematica *Int. J Math Educ Sci Technol.* 2000; 31.
- Morales CA, Muñoz JH, Vera CE. Some remarks on projectile motion with a linear resistance force, working paper. 2019.
- Ribeiro WJM, Souza JR. Projectile Motion: The “Coming and Going” Phenomenon. *Phys Teach.* 2021; 59.





- Sarafian H. What projective angle makes the arc-length of the trajectory in a resistive media maximum? A reverse engineering approach. *American Journal of Computational Mathematics*. 2021; 11: 71–82.
3. Un caso especial del **Ejemplo 2.7**, asumiendo que la fuerza de fricción y la fuerza externa $\vec{F}$ son cero, se presenta en el artículo:

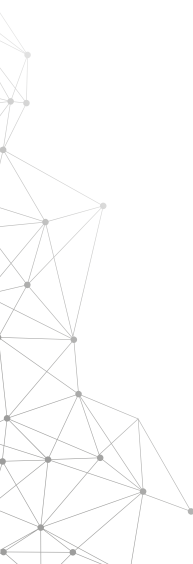
- Bollina O, Parreira JR. A problem of relative, constrained motion. *Phys Teach*. 1998; 36.

En este trabajo se desarrolló un nuevo método para determinar la aceleración relativa de un bloque que desliza sobre un plano inclinado que se mueve horizontalmente.

4. Con el propósito de estudiar la conexión entre teoría de grupos (ver la **Actividad complementaria 4** en el **Capítulo 1**) y las transformaciones entre sistemas de referencia, se recomienda estudiar el artículo:

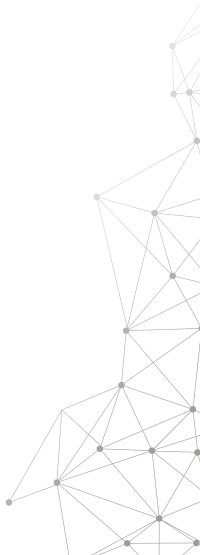
- Rocha AN, Rizzuti BF, Mota DS. Galileo and Lorentz Transformations: A study via group theory. *Rev Bras Ens Fis*. 2013; 35(4).

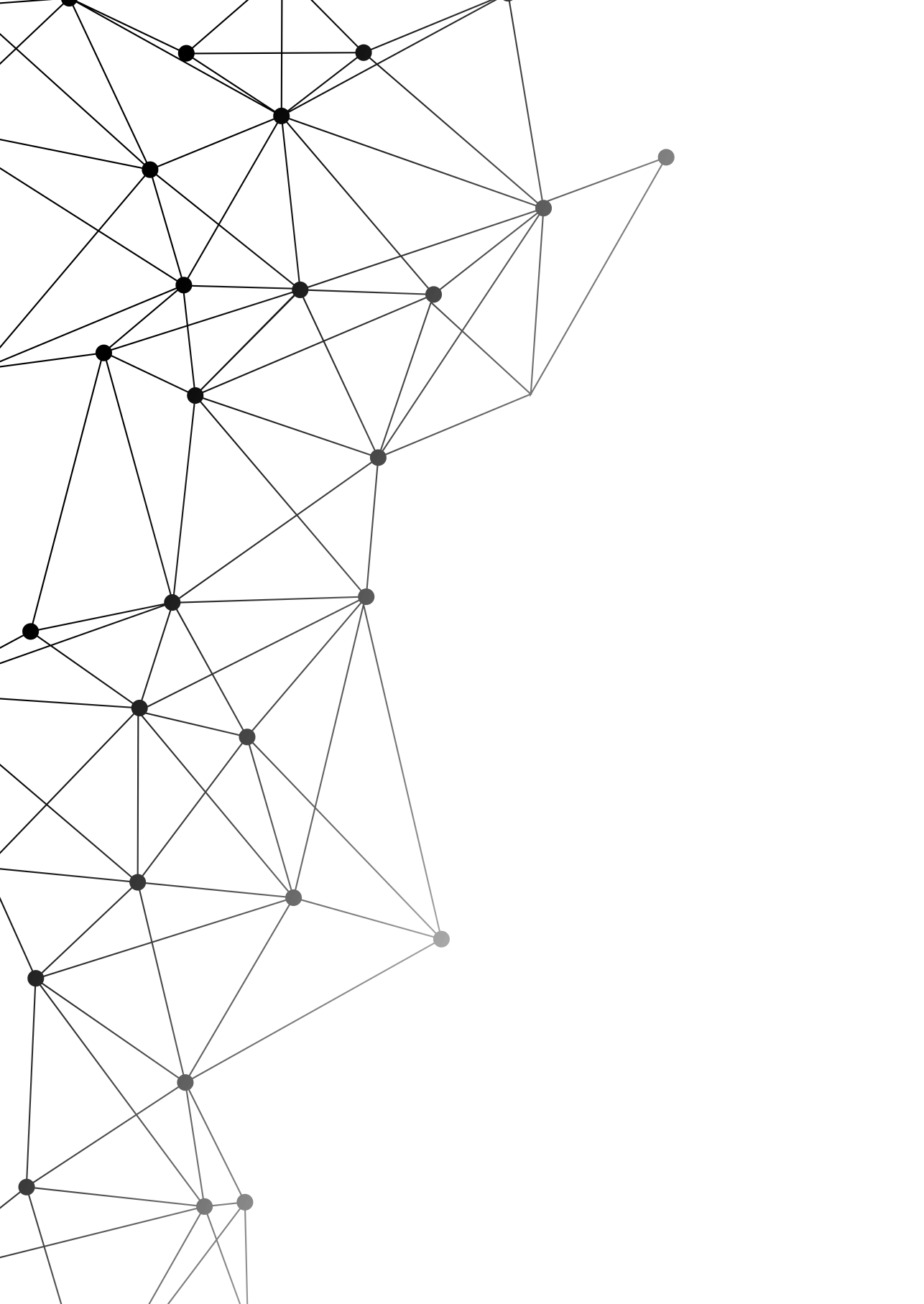
5. En el **Ejemplo 2.1**, la tensión en la cuerda a la que están unidos los dos cuerpos es constante. Sin embargo, en algunos casos, como el presentado en el **Ejercicio 2.15**, la tensión es variable. Este montaje sencillo (ver **Figura 2.15**) ofrece la posibilidad de explorar el uso de herramientas computacionales con el experimento en mecánica clásica. Recientemente, en los siguientes artículos se ha profundizado en este sistema físico:





- Benítez D, Herrera HJ, Muñoz JH. Symmetry in the system of two blocks connected by a string with variable tension. *Rev Cubana Fis.* 2019; 36(2): 139–43.
- Herrera-Suárez H, Muñoz J. Two blocks connected by a string with variable tension: a dynamic case. *Physics Education.* 2020; (5).
- Mungan CE. Comment on “Two blocks connected by a string with variable tension: a dynamic case”. *Phys Educ.* 2021; 56(2).
- Franco A, El mejor ángulo para arrastrar un bloque. *Curso Interactivo de Física en Internet* [internet]; [citado el 29 de septiembre de 2022]. Disponible en: <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/dinamica/arrastra/arrastra.html>





3

Oscilaciones

En este capítulo se hace una introducción a las oscilaciones lineales a través de desarrollos matemáticos detallados. Se consideran oscilaciones libres, amortiguadas, forzadas y acopladas.

3.1. Oscilaciones libres o armónicas

En esta sección se describen tres sistemas físicos que presentan la misma ecuación de movimiento y su respectiva solución.

3.1.1. Masa atada a un resorte

Consideremos una masa m atada a un resorte de constante elástica k , sometida a una fuerza recuperadora $\vec{F} = -k\vec{x}$, donde $\vec{x}$ es la deformación unidimensional del resorte (ver **Figura 2.5**). A este tipo de fuerza *central*, de carácter *lineal*, se le conoce como *ley de Hooke*. El signo menos indica que es una fuerza restauradora.

En lo que sigue se adopta como notación $\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$ y $\ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}$, es decir, un punto sobre la variable representa su derivada temporal y dos puntos sobre la variable simbolizan la segunda derivada respecto al tiempo.



La *ecuación de movimiento* para el sistema masa-resorte se obtiene a partir de la segunda ley de Newton, $\vec{F}_{\text{total}} = m\vec{a}$, donde $\vec{F}_{\text{total}}$ es la fuerza total que actúa sobre la partícula en la dirección del movimiento ($\vec{F}_{\text{total}} = -k\vec{x}$, en este caso), y $\vec{a}$ es su aceleración. Usando la notación mencionada anteriormente se obtiene:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx, \\ m\ddot{x} + kx &= 0, \\ \ddot{x} + \frac{k}{m}x &= 0. \end{aligned}$$

Así, la ecuación de movimiento se escribe como:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3.1)$$

donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, se llama *frecuencia propia* del sistema. La solución para la **Ecuación (3.1)** se presenta al final de esta sección.

Pregunta. ¿Cuál es la unidad de medida de la frecuencia propia ω_0 ?

Respuesta. En primer lugar se obtienen las unidades de la constante elástica k . Como $k = \frac{|F|}{x}$, se obtiene: $[k] = \frac{\text{N}}{\text{m}} = \left(\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}\right)\left(\frac{1}{\text{m}}\right) = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$, donde N, kg, m y s denotan Newtons, kilogramos, metros y segundos, respectivamente. Por lo tanto, las unidades de ω_0 son $[\omega_0] = \left(\frac{[k]}{[m]}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\text{s}}$. Es decir, las unidades de ω_0 son el inverso del tiempo.

Otro camino para obtener las unidades de ω_0 es a partir de la **Ecuación (3.1)**: $[\omega_0] = \left(\frac{[\ddot{x}]}{[x]}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{\text{m}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\text{s}}$.

3.1.2. Péndulo simple

Un péndulo plano está conformado por una masa m atada a una cuerda inextensible de longitud l , que oscila respecto a la vertical (ver **Figura 3.1**). Las fuerzas que actúan sobre la partícula son el peso (denotado por $\vec{w}$ y cuya magnitud es mg , donde g es la magnitud de la aceleración de la gravedad en



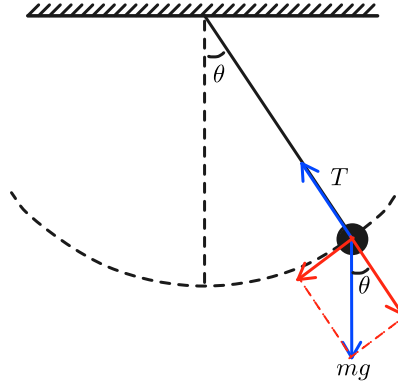


Figura 3.1: Péndulo simple.

la tierra) y la tensión ($\vec{T}$) de la cuerda.

Respecto a un sistema de coordenadas polares (caso particular de un sistema de coordenadas cilíndricas con $z = 0$ y $\phi = \theta$, ver **Sección 1.8.1**), se observa, en la **Figura 3.6**, que el vector peso se puede descomponer en dos componentes: una a lo largo de la dirección radial $\hat{\rho}$, cuya magnitud es igual a $mg \cos \theta$, y la otra en la dirección contraria al vector $\hat{\theta}$. Las ecuaciones de movimiento, en coordenadas polares, a partir de la segunda ley de Newton se escriben como:

$$T - mg \cos \theta = ma_{\rho} = \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2, \quad (3.2)$$

y

$$-mg \sin \theta = ma_{\theta} = \rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}, \quad (3.3)$$

donde hemos utilizado las aceleraciones obtenidas en (1.28). Ya que hemos considerado una cuerda inextensible ($\rho = l = \text{cte}$), las **Ecuaciones (3.2) y (3.3)** se transforman en

$$T - mg \cos \theta = -l\dot{\theta}^2, \quad (3.4)$$

y

$$-mg \sin \theta = l\ddot{\theta}. \quad (3.5)$$

Asumiendo que las oscilaciones son pequeñas, en la última ecuación se puede utilizar la aproximación $\sin \theta \approx \theta$ para obtener la ecuación de movimiento del denominado *péndulo simple*:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad (3.6)$$

donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, se conoce como la *frecuencia propia* del sistema. Es importante resaltar que esta frecuencia es independiente del valor de la masa suspendida.

Pregunta. ¿Cuál es la unidad de medida de la frecuencia propia del péndulo simple?

Respuesta. A partir de la expresión $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ se obtiene $[\omega_0] = \sqrt{\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \frac{1}{\text{m}}} = \frac{1}{\text{s}}$. Es decir, la frecuencia propia tiene unidades del inverso del tiempo (si el tiempo está en segundos, la unidad se denomina Hertz y se abrevia como Hz).

3.1.3. Péndulo físico

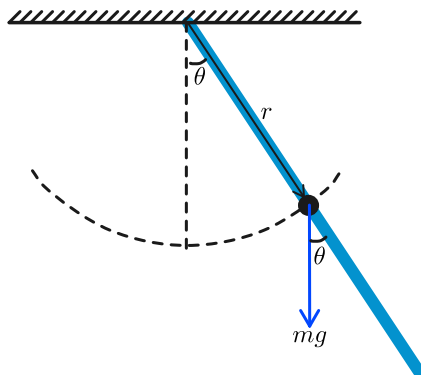


Figura 3.2: Péndulo físico.

Un péndulo físico (o péndulo compuesto) es un cuerpo rígido que oscila libremente alrededor de un eje fijo que está a una distancia r del centro de

masa (ver **Figura 3.2**). Este eje fijo corresponde al eje principal de inercia del péndulo físico, por lo que su momento angular esta dado por

$$\vec{L} = I\dot{\theta}\hat{k}.$$

Usando la **Ecuación (2.108)** y teniendo en cuenta que la única fuerza que produce torque (o momento de fuerza) es el peso del cuerpo tenemos

$$\frac{d}{dt} (I\dot{\theta}\hat{k}) = \vec{r} \times (-mg\hat{j}),$$

por lo que

$$I\ddot{\theta} = -mgr \sin \theta.$$

Considerando solo oscilaciones pequeñas (sen $\theta \approx \theta$.) la *ecuación de movimiento* es

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad (3.7)$$

donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgr}{I}}$ es la *frecuencia propia* del péndulo físico. Nuevamente se obtiene una ecuación diferencial de *segundo orden, lineal, homogénea con coeficientes constantes*.

Ejercicios

3.1 Considerando que las unidades del momento de inercia son $[I] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$, verificar que las unidades de la frecuencia propia del péndulo físico son s^{-1} .

3.2 Asumiendo $I = mr^2$, ¿cuál es la frecuencia propia del péndulo físico? Compare esta frecuencia con la del péndulo simple, ¿qué concluye?

3.1.4. Solución de la ecuación diferencial $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

De las Relaciones (3.1), (3.6) y (3.7) se concluye que las ecuaciones de movimiento para los sistemas masa-resorte, péndulo simple y péndulo físico



tienen la misma forma: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Esta última expresión es una *ecuación diferencial de segundo orden, lineal, homogénea y con coeficientes constantes*. Los objetos descritos por esta ecuación experimentan lo que se conoce como un *movimiento armónico simple*. Es importante estudiar esta ecuación diferencial porque una gran variedad de sistemas en diferentes áreas de la física se describen, con buena aproximación, por medio de ella.

Una ecuación diferencial de segundo orden, lineal y homogénea, tiene dos soluciones *linealmente independientes*. Por lo tanto, si x_1 y x_2 son soluciones, la combinación lineal de ellas, $ax_1 + bx_2$ también es solución.

Se propone $x = e^{\lambda t}$ como solución a la ecuación diferencial $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. La primera y segunda derivada de x respecto al tiempo están dadas por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda e^{\lambda t}, \\ \ddot{x} &= \lambda^2 e^{\lambda t}.\end{aligned}$$

Al sustituir estas dos expresiones en la ecuación diferencial se obtiene:

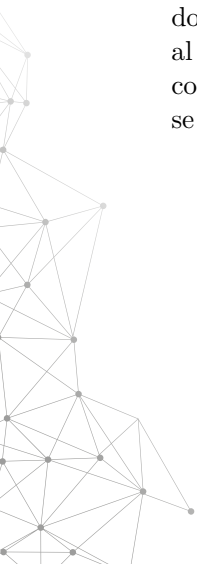
$$\begin{aligned}\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} &= 0, \\ (\lambda^2 + \omega_0^2) e^{\lambda t} &= 0, \\ (\lambda^2 + \omega_0^2) &= 0, \\ \lambda &= \pm i\omega_0.\end{aligned}$$

Así, se tienen dos soluciones: $x_1 = e^{+i\omega_0 t}$ y $x_2 = e^{-i\omega_0 t}$. La solución general será una combinación lineal de ellas:

$$x(t) = C_1 e^{+i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}, \quad (3.8)$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración. La ecuación anterior pertenece al campo de los números complejos. Utilizando la ecuación de Euler $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ y construyendo las siguientes combinaciones lineales de x_1 y x_2 se obtienen soluciones reales:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \frac{1}{2} (e^{+i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) = \cos \omega_0 t, \\ \bar{x}_2 &= \frac{1}{2i} (e^{+i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) = \sin \omega_0 t.\end{aligned}$$



Con la combinación lineal de estas expresiones se construye una solución general que pertenece al campo de los números reales:

$$\begin{aligned}x &= b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2, \\x &= b_1 \cos \omega_0 t + b_2 \sin \omega_0 t.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Si las constantes de integración $\{b_1, b_2\}$ se transforman en las constantes $\{A, \phi\}$ mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned}b_1 &= A \cos \phi, \\b_2 &= A \sin \phi,\end{aligned}$$

se puede representar la relación entre ellas mediante el triángulo rectángulo de la **Figura 3.3**.

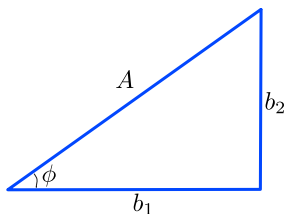


Figura 3.3: Relación entre las constantes de integración.

De esta manera, la solución a la ecuación diferencial será

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t - \phi).\tag{3.10}$$

Ya que la ecuación es de segundo orden, su solución tiene dos constantes: A y ϕ que son la *amplitud* y la *fase inicial*, respectivamente. La velocidad v y la aceleración a en función del tiempo, están dadas por

$$\begin{aligned}v(t) = \frac{dx}{dt} &= -\omega_0 A \sin(\omega_0 t - \phi), \\a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t - \phi).\end{aligned}\tag{3.11}$$



Pregunta. ¿Cuál es el *período* del movimiento?

Respuesta. Sea T el período del movimiento. Por lo tanto, se debe cumplir que $x(t) = x(t + T)$. Esto implica

$$\begin{aligned} A \cos(\omega_0 t - \phi) &= A \cos[\omega_0(t + T) - \phi], \\ \cos(\omega_0 t - \phi) &= \cos[(\omega_0 t - \phi) + \omega_0 T]. \end{aligned}$$

Así, se debe cumplir que $\omega_0 T = 2\pi$, por lo que el *período* estará dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (3.12)$$

Sustituyendo la expresión para ω_0 obtenida para cada uno de los sistemas físicos tratados en las subsecciones anteriores, se obtiene el período de estos sistemas (ver **Tabla 3.1**).

Pregunta. ¿Qué información contiene la *fase inicial* ϕ ?

Respuesta. La fase inicial ϕ contiene información acerca de la posición de la partícula en $t = 0$. Supóngase que en $t = 0$, $x = x_0$. Así, de la **Ecuación (3.10)** se obtiene

$$x(t = 0) = x_0 = A \cos \phi.$$

En la **Tabla 3.2** se presentan valores de la fase inicial ϕ , para algunos valores de x_0 . Por otra parte, en la **Figura 3.4** se presentan la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo, tomando como condiciones iniciales $x(0) = 3$ cm y $\dot{x}(0) = 0$, y haciendo $\phi = 0$, $A = 3$ cm y $\omega_0 = 2$ s⁻¹. En este caso, el período es $T = \pi$.

Ejemplo 3.1

Demuestre que la *energía mecánica total* del sistema masa-resorte es constante y está dada por $E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2$. Adicionalmente, grafique las energías cinética, potencial y mecánica total en función del tiempo.





Tabla 3.1: Período para algunos sistemas físicos que presentan movimiento armónico simple.

Sistema físico	Período ($T = \frac{2\pi}{\omega_0}$)	Análisis
Masa atada a un resorte	$\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	El período del sistema masa-resorte varia inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la constante elástica del resorte y directamente proporcional a la raíz cuadrada de la masa.
Péndulo simple	$\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$	El período del péndulo simple es <i>independiente</i> de la masa m suspendida de la cuerda. Solo depende de la longitud de la cuerda de la forma $T \propto l^{\frac{1}{2}}$
Péndulo físico	$\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{mgr}{I}}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr}}$	A partir de esta expresión se puede obtener el momento de inercia del cuerpo que está oscilando, calculando inicialmente el período. De igual manera, se puede hallar la longitud del péndulo simple equivalente igualando los períodos para los péndulos simple y físico.

Solución.

La energía total es la suma de la energía cinética ($T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$) más la energía potencial ($U = \frac{1}{2}kx^2$), donde:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m[-\omega_0 A \text{sen}(\omega_0 t - \phi)]^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \text{sen}^2(\omega_0 t - \phi),$$
$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t - \phi) = \frac{1}{2}(m\omega_0^2)A^2 \cos^2(\omega_0 t - \phi).$$

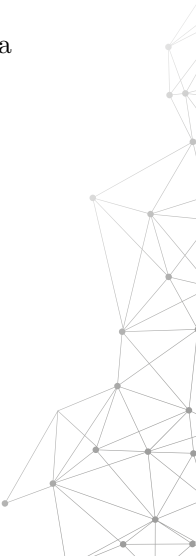




Tabla 3.2: Fase inicial ϕ para algunos valores de $x(t=0) = x_0$.

x_0	ϕ
$-A$	π
$-A/2$	$2\pi/3$
0	$\pi/2$
$A/2$	$\pi/3$
A	$0; 2\pi$

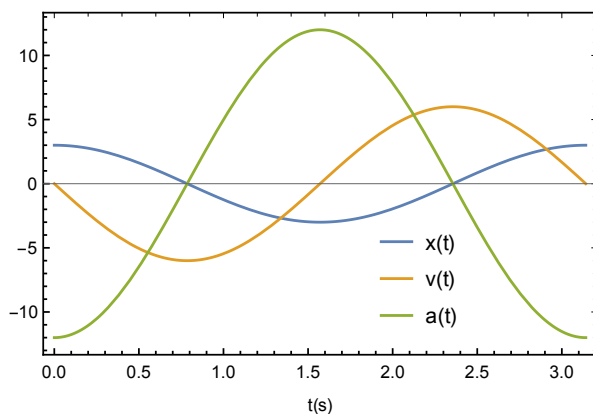
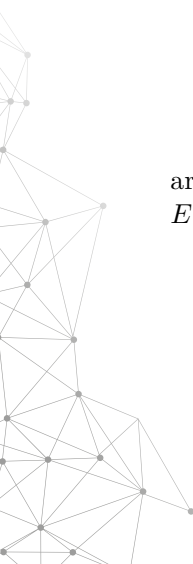


Figura 3.4: Posición (color azul), velocidad (color naranja) y aceleración (color verde) en función del tiempo para el oscilador armónico simple.

Por lo tanto,

$$E = T = U = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 [\sin^2(\omega_0 t - \phi) + \cos^2(\omega_0 t - \phi)] = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2. \quad (3.13)$$

Este resultado demuestra que la energía mecánica total para un oscilador armónico simple es *constante* y proporcional al cuadrado de la amplitud: $E \propto A^2$.



La **Figura 3.5** muestra la evolución de las energías cinética, potencial y total en función del tiempo. En esta gráfica se aprecia que la energía total es constante y que en el instante en el cual la energía cinética es máxima, la energía potencial es cero, y viceversa.

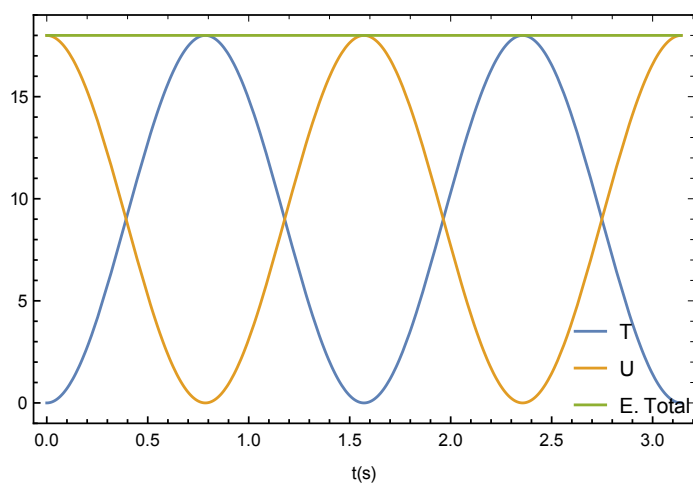


Figura 3.5: Energías cinética (color azul), potencial (color naranja) y total (color verde) para el oscilador libre en función del tiempo.

A continuación se presenta el código utilizado para obtener las gráficas del **Ejemplo 3.1.**

Código en *Mathematica* para el Ejemplo 3.1

Definiciones:

```
In[1]:= A = 3;
      k = 4;

In[2]:= W0= k/m; (*frecuencia propia al cuadrado*)
```

Solución de la ecuación diferencial:

```
In[3]:= x[t_]:= A Cos[√W0 t]
```

Código Figura 3.4:

```
In[4]:= Plot[{x[t], x'[t], x''[t]}, {t, 0, π}, Frame→True,
      FrameStyle→Black, FrameLabel → {"t(s)", ""},
      PlotLegends→ Placed[{"x(t)", "v(t)", "a(t)"}, Center]]
```

Definiciones:

```
In[5]:= T = (0.5)*m*(x'[t])^2;

In[6]:= U = (0.5)*k*(x[t])^2;

In[7]:= EM = T + U;
```

Código Figura 3.5:

```
In[8]:= Plot[{T, U, EM}, {t, 0, π}, Frame→True,
      FrameStyle→Black, FrameLabel → {"t(s)", ""},
      PlotLegends→ Placed [{"T", "U", "E. Total"}, Center]]
```

Ejercicio

3.3 El valor promedio de una función $f = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ está definido por

$$\langle f \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Considere el sistema masa-resorte (oscilador armónico simple) y demuestre que los promedios *temporales* de la energía cinética (T) y la energía potencial (U) en una oscilación son iguales:

$$\langle T \rangle = \langle U \rangle = \frac{1}{4} m \omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2} E.$$



En este caso el intervalo de integración está dado por $[0, T = \frac{2\pi}{\omega_0}]$ (esta T significa período).

Calcular también el promedio *espacial* de la energía cinética y la energía potencial en un ciclo. ¿Son iguales estos promedios?

3.1.5. Trayectoria del oscilador armónico simple en el espacio de fase

El *espacio de fase* de un sistema es una construcción matemática que permite representar el conjunto de las posiciones y las velocidades de una partícula. Para obtener la trayectoria de la partícula en este espacio se debe expresar la posición en función de la velocidad, eliminando el parámetro tiempo. Utilizando la **Ecuación (3.10)**:

$$\begin{aligned} x^2 &= A^2 \cos^2(\omega_0 t - \phi) \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{A^2} = \cos^2(\omega_0 t - \phi), \\ \dot{x}^2 &= \omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t - \phi) \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2 A^2} = \sin^2(\omega_0 t - \phi). \end{aligned}$$

Sumando las dos ecuaciones anteriores se obtiene

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2 A^2} = \cos^2(\omega_0 t - \phi) + \sin^2(\omega_0 t - \phi) = 1,$$

por lo tanto,

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2 A^2} = 1, \tag{3.14}$$

de donde se concluye que la trayectoria en el espacio de fase ($\dot{x}$ vs x) del oscilador libre es una *elipse*. En la **Figura 3.6** se muestra esta trayectoria, obtenida con el comando *ParametricPlot* del paquete Mathematica a través de las siguientes instrucciones:



Código en *Mathematica* para la Figura 3.6

Definiciones:

```
In[4]:=      A = 3;
              k = 4;

In[5]:=      W0= k/m; (*frecuencia propia al cuadrado*)

In[6]:=      x[t_]:= A Cos[ $\sqrt{W0}$  t]
```

Código Figura 3.6:

```
In[7]:= ParametricPlot[{x[t]/A2, x'[t]/(A2*W0)}, {t, 0,  $\pi$ },
          Frame→True, FrameStyle→Black, FrameLabel→{"x(t)", "v(t)"}]
```

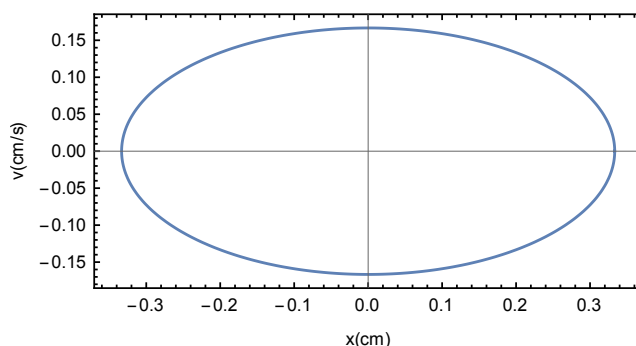


Figura 3.6: Trayectoria en el espacio de fase para el oscilador libre.

Ejercicios

3.4 Obtener la constante elástica de un resorte aplicando la ley de Hooke utilizando la aplicación *Masas y Resortes* o *Ley de Hooke* del simulador *PhET*; disponibles en <https://phet.colorado.edu/es/>. Suspenda de un resorte diferentes masas y mida el estiramiento del resorte para cada masa.

Luego grafique estos datos (puede ser en *Excel*, *GoeGebra* o *Mathematica*); esta función debe ser una línea recta cuya pendiente será igual al valor de la constante elástica del resorte.



3.5 Verificar que el período de un péndulo simple es independiente de la masa y que varía al modificar la longitud de la cuerda utilizando la aplicación *Lab de péndulo* en el *simulador PhET*.

3.6 Hacer un análisis del péndulo simple por medio del analizador de videos *Tracker* (disponible en <https://physlets.org/tracker/>).

3.7 Obtener el valor de la gravedad por medio de un péndulo simple. Hallar el período de un péndulo simple variando la longitud de la cuerda. Con estos datos hacer la gráfica T^2 Vs l y determinar la gravedad a partir de la pendiente de esta recta.

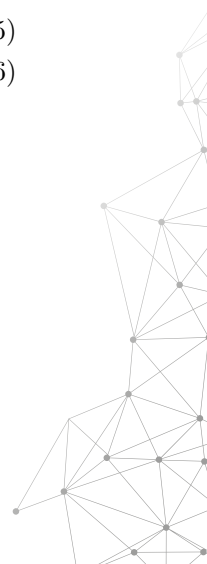


3.2. Osciladores libres en dos dimensiones

Consideremos una partícula atada a dos resortes que tienen la misma constante elástica y están ubicados perpendicularmente. La fuerza, de tipo *central*, que actúa sobre la partícula es $\vec{F} = -k\vec{r} = -k(x \hat{i} + y \hat{j})$. La evolución temporal de estos dos osciladores está dada por:

$$x = A \cos(\omega_0 t - \phi), \quad (3.15)$$

$$y = B \cos(\omega_0 t - \alpha). \quad (3.16)$$



A continuación se obtendrá la trayectoria de la partícula eliminando el tiempo de las expresiones anteriores:

$$\begin{aligned}
 y &= B \cos(\omega_0 t - \alpha + \phi - \phi), \\
 &= B \cos[(\omega_0 t - \phi) + (\phi - \alpha)], \\
 &= B \cos[(\omega_0 t - \phi) + \delta] \quad (\text{donde } \delta = \phi - \alpha \equiv \text{diferencia de fase}), \\
 &= B [\cos(\omega_0 t - \phi) \cos \delta - \sin(\omega_0 t - \phi) \sin \delta], \\
 &= B [\cos(\omega_0 t - \phi) \cos \delta - \sqrt{1 - \cos^2(\omega_0 t - \phi)} \sin \delta].
 \end{aligned}$$

Como $x = A \cos(\omega_0 t - \phi)$, entonces $\frac{x}{A} = \cos(\omega_0 t - \phi)$. Sustituyendo esta expresión en la anterior se obtiene:

$$\begin{aligned}
 y &= B \left[\frac{x}{A} \cos \delta - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin \delta \right], \\
 Ay &= Bx \cos \delta - B \sqrt{A^2 - x^2} \sin \delta, \\
 Ay - Bx \cos \delta &= -B \sqrt{A^2 - x^2} \sin \delta, \\
 A^2 y^2 + B^2 x^2 \cos^2 \delta - 2ABxy \cos \delta &= B^2 (A^2 - x^2) \sin^2 \delta, \\
 A^2 y^2 + B^2 x^2 (\cos^2 \delta + \sin^2 \delta) - 2ABxy \cos \delta &= B^2 A^2 \sin^2 \delta.
 \end{aligned}$$

Así, la trayectoria de la partícula está determinada por la ecuación

$$B^2 x^2 - 2ABxy \cos \delta + A^2 y^2 = B^2 A^2 \sin^2 \delta. \quad (3.17)$$

En general, la ecuación anterior corresponde a una ecuación cuadrática o, mas estrictamente, una *forma cuadrática*. A continuación se considerarán algunos casos especiales:

- $\delta = 0^\circ$ (o 360°): $B^2 x^2 - 2ABxy + A^2 y^2 = 0 \rightarrow (Bx - Ay)^2 = 0 \rightarrow y = \frac{B}{A}x$. Es decir, la partícula recorre una trayectoria lineal con pendiente positiva.
- $\delta = 180^\circ$: $B^2 x^2 + 2ABxy + A^2 y^2 = 0 \rightarrow (Bx + Ay)^2 = 0 \rightarrow y = -\frac{B}{A}x$. En este caso la partícula se mueve sobre una recta de pendiente negativa.
- $\delta = 90^\circ$: $B^2 x^2 + A^2 y^2 = B^2 A^2 \rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$. La partícula recorre una elipse en el sentido de las manecillas del reloj. Si $A = B$, la trayectoria es circular. Para $\delta = 270^\circ$ la partícula describe la misma figura recorriéndola en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

- $\delta = 150^\circ$: $B^2x^2 + 2ABxy\frac{\sqrt{3}}{2} + A^2y^2 = B^2A^2(\frac{1}{2})^2 \rightarrow 4B^2x^2 + 4\sqrt{3}ABxy + 4A^2y^2 = B^2A^2$. La trayectoria corresponde a la de una elipse que no tiene sus semiejes paralelos a los ejes $x - y$ recorrida en el sentido de las manecillas del reloj. Sus nuevos ejes normales $x' - y'$ están rotados un ángulo θ , con respecto a los ejes $x - y$.
- $\delta = 300^\circ$: $B^2x^2 - 2ABxy(\frac{1}{2}) + A^2y^2 = B^2A^2(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 \rightarrow 4B^2x^2 - 4ABxy + 4A^2y^2 = 3B^2A^2$. En este caso la partícula recorre, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, una elipse que está rotada un ángulo θ con respecto a los ejes $x - y$.

La **Ecuación (3.17)** se puede graficar con el programa *Mathematica* a través de la siguiente rutina: **(1)** Se despeja a y en función de x por medio del comando *Solve*; **(2)** Se obtienen dos expresiones para y en función de x ; **(3)** Por medio del comando *Plot* se grafican estas dos expresiones para $y = y(x)$ y, seguidamente, se utiliza el comando *Manipulate*. De esta manera, podemos ver la trayectoria para cualquier valor de δ . A continuación se muestra esta rutina y la trayectoria para dos osciladores libres perpendiculares con una diferencia de fase $\delta = 5,81823$ radianes ($\approx 333,36^\circ$) y amplitudes $A = 5$ cm, $B = 2$ cm (ver **Figura 3.7**).

Código en *Mathematica* para la Figura 3.7

```
In[1]:= Solve[B^2 x^2 - 2 A B x y Cos[δ]+A^2 y^2 ==
B^2 A^2 (Sin[δ])^2,y]

Out[1]= {{y -> (A B x Cos[δ]+√(A^4 B^2 Sin[δ]^2-A^2 B^2 x^2 Sin[δ]^2))/
A^2},
{y -> (A B x Cos[δ]-√(A^4 B^2 Sin[δ]^2-A^2 B^2 x^2 Sin[δ]^2))/
A^2}}

In[2]:= Manipulate[Plot[{(A B x Cos[δ]+√(A^4 B^2 Sin[δ]^2-A^2 B^2 x^2 Sin[δ]^2))/
A^2,
A B x Cos[δ]-√(A^4 B^2 Sin[δ]^2-A^2 B^2 x^2 Sin[δ]^2)/
A^2}, {x,-5,5},
Frame->True, FrameStyle->Black, FrameLabel -> {"x(cm)",
"y(cm)"}, {δ,0, 2Pi},{A,-5,5},{B,-4,4}]
```

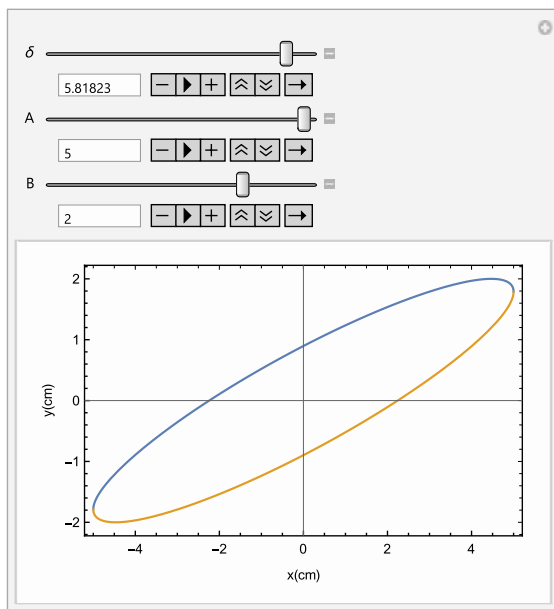


Figura 3.7: Trayectoria de dos osciladores armónicos perpendiculares con una diferencia de fase $\delta \approx 333,36^\circ$.

Nota. Cuando las frecuencias propias de los dos movimientos son diferentes, $(\omega_0)_x \neq (\omega_0)_y$, las trayectorias se denominan *Curvas de Lissajous*.

La **Ecuación (3.17)** se puede escribir en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^2 & -AB \cos \delta \\ -AB \cos \delta & A^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B^2 A^2 \sin^2 \delta.$$

Definiendo el vector columna $\vec{r}$ y la matriz $Q_{2 \times 2}$ por

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} B^2 & -AB \cos \delta \\ -AB \cos \delta & A^2 \end{pmatrix},$$

se obtiene

$$\vec{r}^T Q \vec{r} = B^2 A^2 \sin^2 \delta. \quad (3.18)$$

Considerando la matriz de rotación O , tal que $OO^T = O^TO = I$, el lado izquierdo de la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\vec{r}^T Q \vec{r} &= \vec{r}^T (O^T O) Q (O^T O) \vec{r}, \\ &= (\vec{r}^T O^T) (O Q O^T) (O \vec{r}), \\ &= (O \vec{r})^T (O Q O^T) (O \vec{r}), \\ &= (\vec{r}')^T O_{\text{dg}} \vec{r}'\end{aligned}$$

donde O_{dg} es una matriz diagonal dada por la transformación de similaridad ortogonal $O_{\text{dg}} = O Q O^T$ y $\vec{r}' = O \vec{r}$ es el vector rotado de componentes x' y y' ,

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

De esta manera

$$\vec{r}^T Q \vec{r} = (\vec{r}')^T O_{\text{dg}} \vec{r}' = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2.$$

Se aprecia que ya no aparece un término de acople $x'y'$. Por lo tanto, la **Ecuación (3.17)** en el sistema rotado un ángulo θ es

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 = B^2 A^2 \sin^2 \delta. \quad (3.19)$$

Ejercicio

3.8 Encontrar los autovalores y los autovectores de la matriz Q (Sugerencia: utilizar el paquete *Mathematica*). ¿Es posible encontrar una relación entre el ángulo de rotación θ y la diferencia de fase δ ?

3.3. Oscilaciones amortiguadas

Un caso más real de las oscilaciones se da cuando se incluye una fuerza de amortiguamiento adicional a la fuerza restauradora $-kx$. Una aproximación buena es asumir que esta fuerza es proporcional a la velocidad: $-b\dot{x}$. Las unidades de b son $\frac{\text{N}}{\text{s}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}}$, donde m, kg y s denotan metros, kilogramos y segundos, respectivamente. La *ecuación de movimiento* para el oscilador amortiguado está dada por

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

ó

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0,$$

donde m representa la masa de la partícula (el lector no debe confundirla con la m utilizada para simbolizar metros: en general, las variables se denotan con letras en cursiva « m » y las unidades en letras redondas «m»). De la última ecuación se obtiene:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2x = 0, \quad (3.20)$$

donde $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ es la frecuencia propia y $\beta = \frac{b}{2m}$ es el *parámetro de amortiguamiento* del sistema con unidades de s^{-1} . Esta ecuación diferencial es de segundo orden, lineal, homogénea con coeficientes constantes. El procedimiento para hallar la solución es similar al desarrollado anteriormente para obtener la solución de la ecuación $\ddot{x} + \omega_0^2x = 0$.

Se propone como solución $x = e^{\lambda t}$. Luego se deriva esta expresión una y dos veces respecto al tiempo: $\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$ y $\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$. Ahora se sustituyen estas expresiones en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \lambda^2 e^{\lambda t} + 2\beta\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} &= 0, \\ (\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2)e^{\lambda t} &= 0, \\ \lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 &= 0. \end{aligned}$$

Al resolver la ecuación cuadrática en λ se obtiene $\lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$. Así, se tienen dos soluciones:

$$x_{\pm} = e^{\lambda_{\pm} t} = e^{(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} = e^{-\beta t} e^{\pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t}.$$

La solución general a la ecuación diferencial está dada por la combinación lineal de $x_{\pm}$:

$$x = e^{-\beta t} (C_1 e^{+\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t}), \quad (3.21)$$

donde $C_{1,2}$ son constantes de integración. Para determinar el tipo de movimiento se requiere analizar la cantidad subradical, es decir, comparar la frecuencia propia del sistema correspondiente a la oscilación libre con el parámetro de amortiguamiento relacionado con la fuerza de amortiguamiento; se presentan tres casos:

- $\omega_0^2 > \beta^2$. A este movimiento se le llama *subamortiguado*.
- $\omega_0^2 = \beta^2$. En este caso el movimiento se llama *amortiguamiento crítico*.
- $\omega_0^2 < \beta^2$. Este movimiento se denomina *sobreamortiguado*.

3.3.1. Movimiento subamortiguado

En este caso $\omega_0^2 > \beta^2$, por lo que la cantidad subradical en la **Ecuación (3.21)** es negativa. Por lo tanto, se obtiene una cantidad *imaginaria*:

$$\begin{aligned} \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} &= \sqrt{-(\omega_0^2 - \beta^2)}, \\ &= i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \\ &= i\omega_1, \end{aligned}$$

donde $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$. De esta manera, la **Ecuación (3.21)** se puede reescribir de la siguiente forma:

$$x = e^{-\beta t} (C_1 e^{+i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t}).$$



La cantidad dentro del paréntesis en esta ecuación es idéntica a la del lado derecho de la **Ecuación (3.8)**. Por lo tanto, al hacer el mismo desarrollo matemático que condujo a la ecuación (3.10) se obtiene $C_1 e^{+i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t} = A \cos(\omega_1 t - \beta)$. Así, la ecuación anterior se transforma en

$$x = Ae^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \phi). \quad (3.22)$$

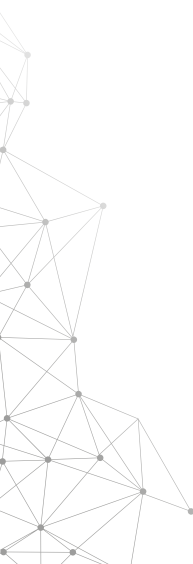
Esta ecuación describe el movimiento subamortiguado. Puede observarse que, aunque permanece el término oscilatorio, la amplitud del movimiento de la partícula disminuye en el tiempo, debido al término envolvente $Ae^{-\beta t}$.

La velocidad de la partícula está dada por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A[-\beta e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \phi) - \omega_1 e^{-\beta t} \sin(\omega_1 t - \phi)], \\ &= -Ae^{-\beta t}[\beta \cos(\omega_1 t - \phi) + \omega_1 \sin(\omega_1 t - \phi)]; \end{aligned} \quad (3.23)$$

y la aceleración se obtiene derivando respecto al tiempo a la velocidad.

En la **Figura 3.8** se muestran la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo para el oscilador subamortiguado, con las condiciones iniciales $x(0) = 0,1 \text{ m}$ y $\dot{x}(0) = -0,1 \text{ m/s}$, y los valores numéricos $\phi = 0$, $k = 4 \text{ kg/s}^2$, $m = 1 \text{ kg}$, $A = 0,1 \text{ m}$, $\beta = 1 \text{ s}^{-1}$ y $\omega_0^2 = 4 \text{ s}^{-2}$. Es importante tener en cuenta que se debe cumplir la condición $\omega_0^2 > \beta^2$. En la gráfica se observa que en este caso, la partícula alcanza a oscilar.



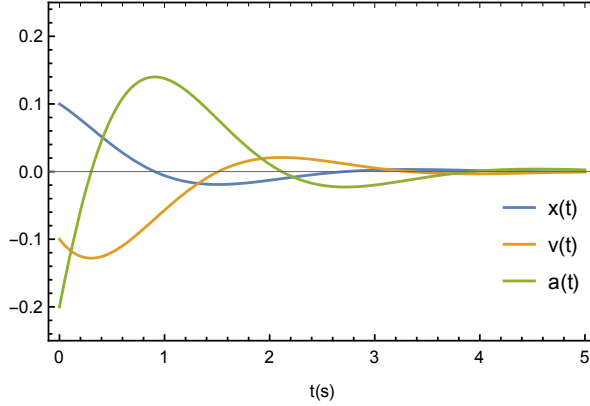


Figura 3.8: Posición (color azul), velocidad (color naranja) y aceleración (color verde) en función del tiempo para el oscilador subamortiguado.

Pregunta. ¿Es la energía total (E) del oscilador *subamortiguado* constante?

Respuesta. Recordemos que para el oscilador masa-resorte, la energía total es constante. En el caso de la oscilación subamortiguada se tiene $E = T + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$. Reemplazando a $x(t)$ y $\dot{x}(t)$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
 E(t) &= \frac{1}{2}mA^2e^{-2\beta t}[\beta \cos(\omega_1 t - \phi) + \omega_1 \sin(\omega_1 t - \phi)]^2 + \frac{1}{2}kA^2e^{-2\beta t} \cos^2(\omega_1 t - \phi), \\
 &= \frac{A^2}{2}e^{-2\beta t}[m\beta^2 \cos^2(\omega_1 t - \phi) + m\omega_1^2 \sin^2(\omega_1 t - \phi) + 2m\beta\omega_1 \cos(\omega_1 t - \phi) \times \\
 &\quad \sin(\omega_1 t - \phi) + k \cos^2(\omega_1 t - \phi)], \\
 &= \frac{A^2}{2}e^{-2\beta t}[(m\beta^2 + k) \cos^2(\omega_1 t - \phi) + m\omega_1^2 \sin^2(\omega_1 t - \phi) + \\
 &\quad 2m\beta\omega_1 \cos(\omega_1 t - \phi) \sin(\omega_1 t - \phi)].
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

De acuerdo a la expresión anterior se concluye que la energía total para el oscilador subamortiguado no es constante.

La **Figura 3.9** muestra las energías cinética, potencial y total en función del tiempo para el oscilador subamortiguado. Se observa que las energías

cinética y potencial presentan un mínimo y que a partir de cierto tiempo tienden a cero. Por otra parte, la **Figura 3.10** muestra la variación temporal de la energía total en función del tiempo, la cual presenta un mínimo y tiende a cero después de cierto tiempo. Los valores numéricos que se consideraron para obtener estas gráficas son los mismos utilizados en la **Figura 3.8**.

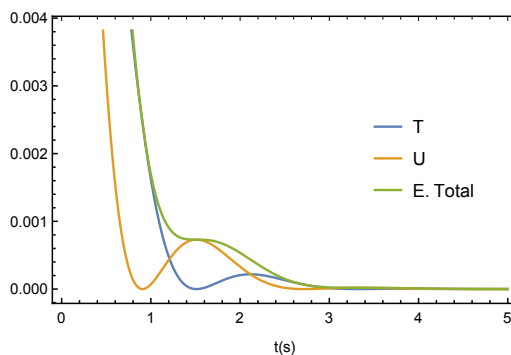


Figura 3.9: Energías cinética (color azul), potencial (color naranja) y total (color verde) en función del tiempo para el oscilador subamortiguado.

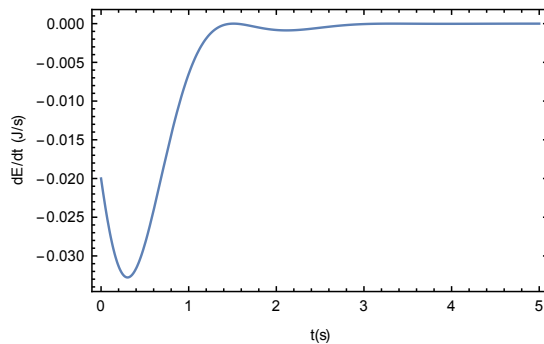


Figura 3.10: Variación temporal de la energía total en función del tiempo para el oscilador subamortiguado.

Finalmente, la **Figura 3.11** muestra la trayectoria en el espacio de fase de la partícula en movimiento subamortiguado, la cual corresponde a una espiral.

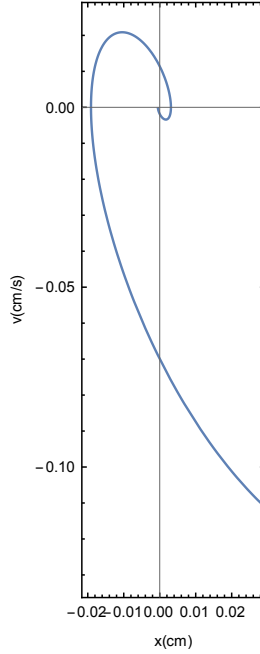


Figura 3.11: Trayectoria en el espacio de fase para el oscilador subamortiguado.

Nota. Las **Figuras 3.8, 3.9, 3.10 y 3.11** se crearon con *Mathematica* siguiendo la rutina presentada en la **Página 134** con $x[t_+] := Ae^{-\beta t} \cos \omega_1 t$, donde $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

3.3.2. Movimiento con amortiguamiento crítico

El movimiento con amortiguamiento crítico se da cuando $\omega_0^2 = \beta^2$. En este caso las dos raíces de la cuadrática en λ son iguales: $\lambda_1 = \lambda_2 = -\beta$.

La **Ecuación (3.21)** se transforma en $x = Ae^{-\beta t}(C_1 + C_2) = Ce^{-\beta t}$, donde $C = A(C_1 + C_2)$ es otra constante. Se puede verificar por sustitución directa que $x = Ce^{-\beta t}$ es solución a la **Ecuación diferencial (3.20)**.

Otra solución a la ecuación diferencial $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ es $x = te^{-\beta t}$, la cual es linealmente independiente de $e^{-\beta t}$. A continuación se verificará, por sustitución directa, que esta expresión también es solución:

$$\begin{aligned} x &= te^{-\beta t}, \\ \dot{x} &= e^{-\beta t} - \beta te^{-\beta t}, \\ \ddot{x} &= -\beta e^{-\beta t} - \beta[e^{-\beta t} - \beta te^{-\beta t}] = -2\beta e^{-\beta t} + \beta^2 te^{-\beta t}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación diferencial se obtiene

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x &= [-2\beta + \beta^2 t + 2\beta(1 - \beta t) + \omega_0^2 t] e^{-\beta t}, \\ &= (\beta^2 t - 2\beta^2 t + \omega_0^2 t) e^{-\beta t}, \\ &= (-\beta^2 t + \omega_0^2 t) e^{-\beta t}, \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde hemos usado en la última línea el hecho de que $\omega_0^2 = \beta^2$. De esta manera, la solución general a la **Ecuación de movimiento (3.20)** es la combinación lineal de $e^{-\beta t}$ y $te^{-\beta t}$,

$$x = D_1 e^{-\beta t} + D_2 te^{-\beta t} = (D_1 + D_2 t) e^{-\beta t}. \quad (3.26)$$

Cuando el sistema se encuentra en el estado de amortiguamiento crítico, la amplitud se acerca a cero más rápidamente que los estados sub y sobre-amortiguado. La **Figura 3.12** presenta la evolución temporal de la posición, la velocidad y la aceleración para el caso en el cual el cuerpo experimenta amortiguamiento crítico, tomando como condiciones iniciales $x(0) = -0,5$ m y $\dot{x}(0) = 2$ m/s, y asignando los siguientes valores numéricos: $k = 4$ kg/s², $m = 1$ kg, $\omega_0^2 = 4$ s⁻², $\beta = 2$ s⁻¹, $D_1 = -0,5$ m y $D_2 = 1$ m. Es importante tener en cuenta que en este caso $\omega_0^2 = \beta^2$. Se observa que la partícula no alcanza a completar una oscilación, para este caso.

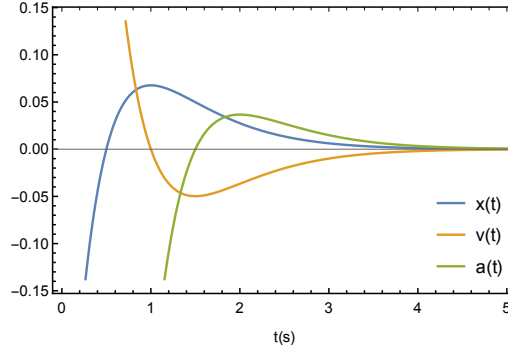


Figura 3.12: Posición (color azul), velocidad (color naranja) y aceleración (color verde) en función del tiempo para el oscilador con amortiguamiento crítico.

Por otra parte, las **Figuras 3.13** y **3.14** muestran la evolución temporal de las energías cinética, potencial y total, y la variación de la energía total como función del tiempo, respectivamente. Los valores numéricos utilizados son los mismos que se consideraron en la **Figura 3.12**. Se observa que estos observables se hacen cero a partir de $t \approx 2,4$ s.

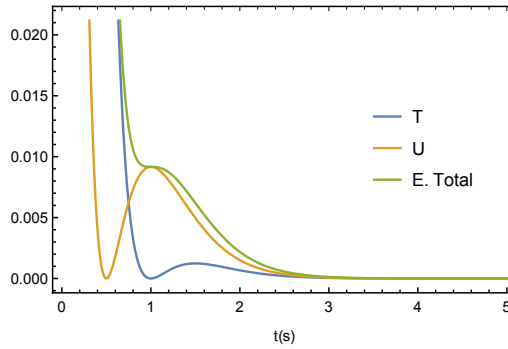


Figura 3.13: Energías cinética (color azul), potencial (color naranja) y total (color verde) en función del tiempo para el oscilador con amortiguamiento crítico.

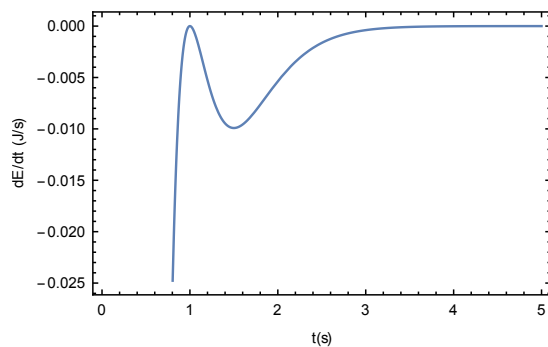


Figura 3.14: Variación de la energía total en función del tiempo para el oscilador con amortiguamiento crítico.

Finalmente, la **Figura 3.15** muestra la trayectoria en el espacio de fase de la partícula en situación de amortiguamiento crítico.

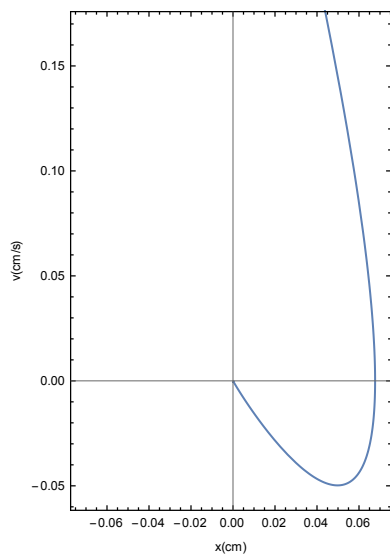


Figura 3.15: Trayectoria en el espacio de fase para el oscilador con amortiguamiento crítico.



3.3.3. Movimiento sobrearmortiguado

El movimiento sobrearmortiguado se da cuando $\omega_0^2 < \beta^2$. En este caso, la evolución temporal de la posición, dada por la **Ecuación (3.21)**, se transforma en:

$$x = e^{-\beta t}(C_1 e^{+\omega_2 t} + C_2 e^{-\omega_2 t}), \quad (3.27)$$

donde $\omega_2 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ (no tiene el carácter de frecuencia angular porque el movimiento no es periódico).

La **Figura 3.16** muestra la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo para el caso sobrearmortiguado, considerando como condiciones iniciales $x(0) = 0$ m, $\dot{x}(0) \approx 10,4$ m/s y tomando los siguientes valores numéricos $C_1 = 3$ m, $C_2 = -3$ m, $k = 4$ kg/s², $m = 1$ kg, $\omega_0^2 = 1$ s⁻² y $\beta = 2$ s⁻¹. Así, se cumple la condición $\beta^2 > \omega_0^2$. En la gráfica se observa que tampoco se alcanza una oscilación en este caso.

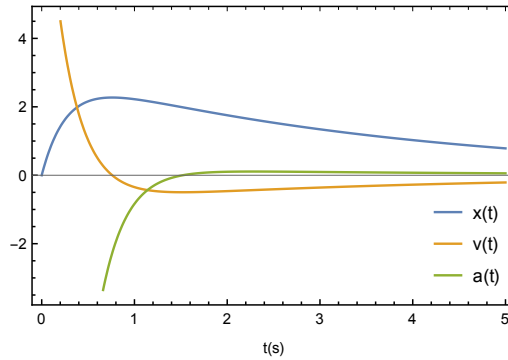


Figura 3.16: Posición (color azul), velocidad (color naranja) y aceleración (color verde) en función del tiempo para el oscilador sobrearmortiguado.

Las **Figuras 3.17** y **3.18** presentan la evolución temporal de las energías cinética, potencial y total, y de la variación de energía total, respectivamente. Se observa que la energía cinética de la partícula rápidamente se hace cero y que dE/dt presenta un máximo.



Por otra parte, la **Figura 3.19** muestra la trayectoria de la partícula en el espacio de fase para el caso sobreamortiguado. Los valores numéricos utilizados en estas figuras son los mismos que se asignaron en la **Figura 3.16**.

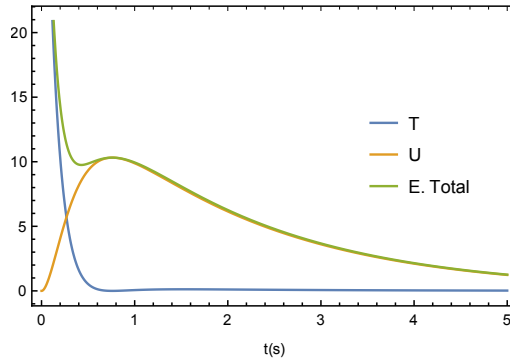


Figura 3.17: Energías cinética (color azul), potencial (color naranja) y total (color verde) en función del tiempo para el oscilador sobreamortiguado.

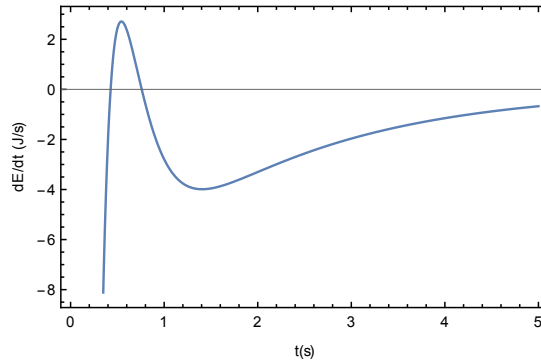


Figura 3.18: Variación de la energía total en función del tiempo para el oscilador sobreamortiguado.

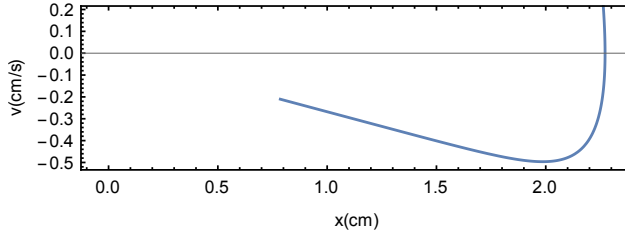


Figura 3.19: Trayectoria en el espacio de fase para el oscilador sobreamortiguado.

3.4. Oscilaciones forzadas

Considere un oscilador amortiguado al que se le aplica una fuerza *externa* periódica $F = F_0 \cos \omega t$, con ω la frecuencia angular. La fuerza total que actúa sobre la partícula en la dirección de movimiento será

$$F_{total} = -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t.$$

Por lo tanto, la ecuación de movimiento se escribe como

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t.$$

Al dividir ambos lados de la ecuación por m , se obtiene

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = A \cos \omega t, \quad (3.28)$$

donde $A = \frac{F_0}{m}$, $\beta = \frac{b}{2m}$ y $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

Esta ecuación diferencial *no es homogénea*; su solución está conformada por la solución general de la ecuación diferencial homogénea respectiva (x_{hom}), más una solución *particular* (x_{par}). Así, la solución general a la ecuación del oscilador forzado se puede expresar como

$$x = x_{hom} + x_{par},$$

donde x_{hom} corresponde a la solución a la ecuación diferencial $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, dada por la **Ecuación (3.21)**.



Se propone como solución particular la expresión

$$x_{\text{par}} = D \cos(\omega t - \delta), \quad (3.29)$$

donde δ representa la diferencia de fase entre la fuerza externa periódica y el movimiento resultante. A partir de esta expresión se obtiene $\dot{x} = -D\omega \sin(\omega t - \delta)$ y $\ddot{x} = -D\omega^2 \cos(\omega t - \delta)$. Si se sustituye x , $\dot{x}$ y $\ddot{x}$ en la **Ecuación (3.28)**, obtenemos

$$\begin{aligned} -D\omega^2 \cos(\omega t - \delta) - 2\beta D\omega \sin(\omega t - \delta) + \omega_0^2 D \cos(\omega t - \delta) &= A \cos \omega t, \\ D(\omega_0^2 - \omega^2)(\cos \omega t \cos \delta + \sin \omega t \sin \delta) - 2D\beta\omega(\sin \omega t \cos \delta - \cos \omega t \sin \delta) &= A \cos \omega t, \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} \{D(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + 2D\beta\omega \sin \delta - A\} \cos \omega t \\ + \{D(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \delta - 2D\beta\omega \cos \delta\} \sin \omega t = 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

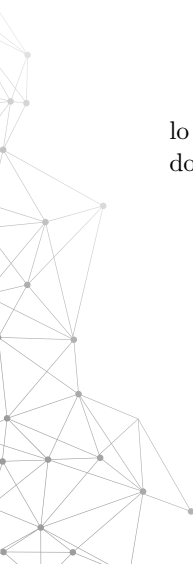
Ya que las funciones $\cos \omega t$ y $\sin \omega t$ son linealmente independientes, los coeficientes de estas funciones en la ecuación anterior deben ser idénticamente iguales a cero. Así, del coeficiente de $\sin \omega t$ en la **Expresión (3.30)** se obtiene

$$\begin{aligned} D(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \delta - 2D\beta\omega \cos \delta &= 0, \\ (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \delta &= 2\beta\omega \cos \delta. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \tan \delta &= \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \\ \delta &= \arctan \left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

A partir de esta relación se pueden asociar estas cantidades con un triángulo rectángulo donde los catetos opuesto y adyacente al ángulo δ están dados por $2\beta\omega$ y $\omega_0^2 - \omega^2$, respectivamente. La hipotenusa de este triángulo es



$\sqrt{4\beta^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}$. Así, se tiene:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \delta &= \frac{2\beta\omega}{\sqrt{4\beta^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}, \\ \cos \delta &= \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{4\beta^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}.\end{aligned}\tag{3.32}$$

La **Figura 3.20** muestra la gráfica del ángulo δ en función de la frecuencia ω , con $\beta = 1 \text{ s}^{-1}$ y $\omega_0^2 = 6 \text{ s}^{-2}$.

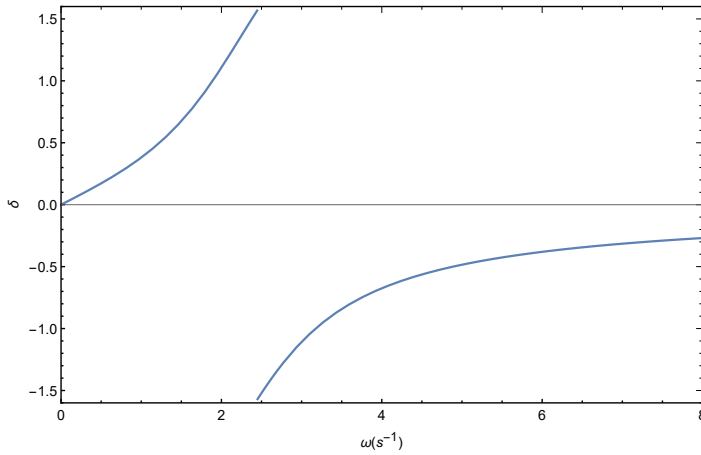


Figura 3.20: Gráfica de la diferencia de fase δ en función de la frecuencia ω .

Por otra parte, igualando a cero el coeficiente de $\cos \omega t$ en la **Expresión 3.30**, se obtiene:

$$\begin{aligned}D(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + 2D\beta\omega \operatorname{sen} \delta - A &= 0, \\ D\{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + 2\beta\omega \operatorname{sen} \delta\} &= A.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + 2\beta\omega \sin \delta}, \\
 &= \frac{A}{\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} + \frac{4\omega^2\beta^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}}}, \\
 &= \frac{A}{\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}}}, \\
 D &= \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}}, \tag{3.33}
 \end{aligned}$$

donde en el segundo paso se utilizaron los valores de $\sin \delta$ y $\cos \delta$ dados por las **Expresiones (3.32)**.

Sustituyendo la expresión para D dada por la expresión anterior en la **Ecuación (3.29)**, se obtiene la solución particular para el oscilador forzado.

$$x_{\text{par}} = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \cos(\omega t - \delta), \tag{3.34}$$

donde δ está dada por la **Ecuación (3.31)**.

Si bien la solución del oscilador forzado es $x = x_{\text{hom}} + x_{\text{par}}$, la parte correspondiente a x_{hom} representa efectos transitorios que desaparecen a medida que transcurre el tiempo por el efecto del amortiguamiento $e^{-\beta t}$. Por lo tanto, a partir de $t \gg \frac{1}{\beta}$ la solución que representa el estado del movimiento es x_{par} , de tal forma que

$$x(t \gg \frac{1}{\beta}) = x_{\text{par}}.$$

Fenómeno de resonancia.

Cuando la amplitud D alcanza su valor *máximo*, se dice que el sistema ha entrado en resonancia. Este fenómeno tiene muchas aplicaciones en varios campos de la física como la acústica, la música, el electromagnetismo, la



electrónica, entre otros. Para obtener el valor de ω en el cual se hace máxima la amplitud, se deriva la expresión para $D(\omega)$ y se iguala a cero; posteriormente, se verifica que sea un máximo usando el criterio de la segunda derivada:

$$\frac{dD}{d\omega} = -A \left(\frac{1}{2} \right) \{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2\}^{-\frac{3}{2}} \{2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\omega\beta^2\} = 0, \quad (3.35)$$

de donde

$$\begin{aligned} \{-4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\omega\beta^2\} &= 0, \\ 4\omega\{-(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\beta^2\} &= 0, \\ -\omega_0^2 + \omega^2 + 2\beta^2 &= 0. \end{aligned}$$

Así, se encuentra que la amplitud se hace máxima en

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \equiv \omega_R. \quad (3.36)$$

En la **Figura 3.21** se muestra la gráfica de la amplitud de la solución particular del oscilador forzado, dada por la **Ecuación (3.33)**, con $A = 0,2$ m s⁻², $\omega_0^2 = 6$ s⁻² y $\beta = 1$ s⁻¹. En este caso, la amplitud D es máxima en la frecuencia de resonancia $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{6 - 2(1)} = 2$.

Es importante tener en cuenta las frecuencias que se han obtenido en este capítulo, asociadas a fenómenos importantes, para establecer una comparación entre ellas. Se hallaron las frecuencias para el sistema libre masa-resorte (ω_0), para oscilaciones subamortiguadas (ω_1) y para el fenómeno de la resonancia (ω_R):

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{k}{m}, \\ \omega_1^2 &= \omega_0^2 - \beta^2, \\ \omega_R^2 &= \omega_0^2 - 2\beta^2. \end{aligned}$$

Observe que $\omega_0 > \omega_1 > \omega_R$.

Nota. Por medio de un programa computacional como, por ejemplo, *Mathematica*, es posible analizar con pocos comandos las oscilaciones consideradas



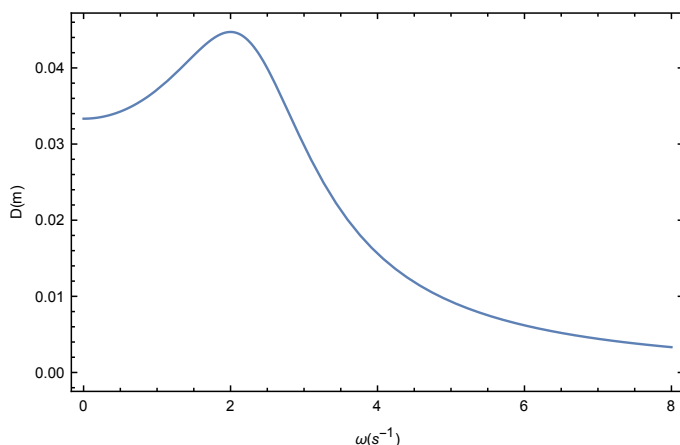
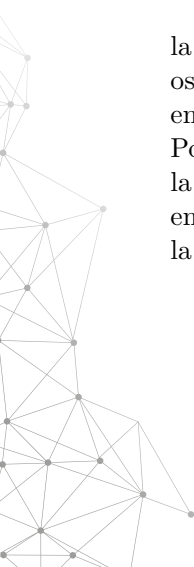


Figura 3.21: Gráfica de la amplitud D en función de la frecuencia ω . La amplitud es máxima en $\omega = \omega_R = 2$.

en este capítulo sin necesidad de un conocimiento sólido sobre ecuaciones diferenciales y sin procedimientos matemáticos engorrosos o difíciles. Con solo tres comandos: `DSolve` (para resolver una ecuación diferencial), `Plot` y `Manipulate` se grafican, rápidamente, observables como posición, velocidad, aceleración, energías cinética, potencial y total, la variación temporal de la energía total y la trayectoria en el espacio de fase. La instrucción `Manipulate` permite analizar el efecto sobre estos observables de algunos parámetros como las condiciones iniciales, la constante elástica del resorte, la masa del cuerpo, la frecuencia propia y el factor de amortiguamiento.

Como ilustración de lo anteriormente descrito, se presenta a continuación, la rutina utilizada en *Mathematica* para obtener diversos observables en el oscilador forzado, sin desarrollos matemáticos tediosos y de gran complejidad en algunos casos, con un conocimiento mínimo de ecuaciones diferenciales. Por medio de esta rutina se obtienen, para el oscilador forzado, la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo (ver **Figura 3.22**); las energías cinética, potencial y total en función del tiempo (ver **Figura 3.23**), la disipación de energía total con respecto al tiempo (ver **Figura 3.24**) y la



trayectoria en el espacio de fase (ver **Figura 3.25**). Esta última gráfica, por ejemplo, es muy difícil de obtener manualmente. Se deja como actividad al lector, analizar detalladamente estas gráficas.

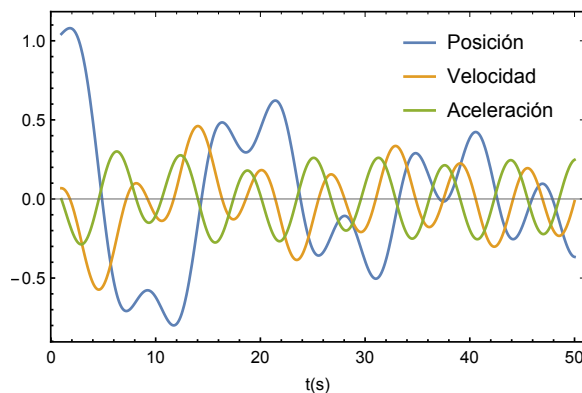


Figura 3.22: Posición (color azul), velocidad (color naranja) y aceleración (color verde) en función del tiempo para el oscilador forzado.

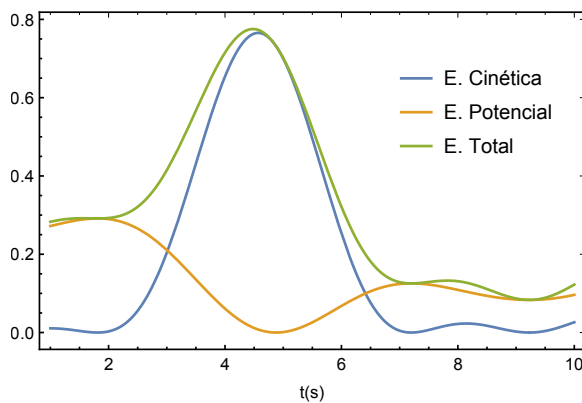


Figura 3.23: Energías cinética (color azul), potencial (color naranja) y total (color verde) en función del tiempo para el oscilador forzado.

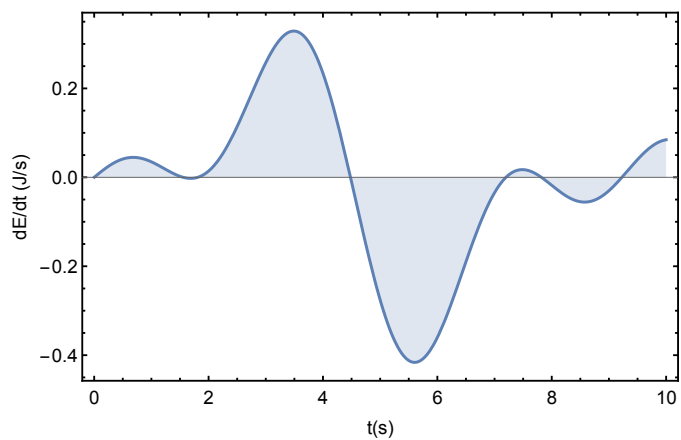


Figura 3.24: Variación de la energía total en función del tiempo para el oscilador forzado.

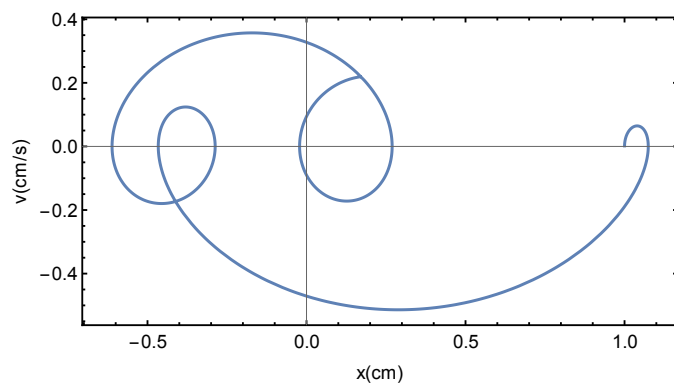


Figura 3.25: Trayectoria en el espacio de fase para el oscilador forzado.

Código en *Mathematica* para el oscilador forzado

Ecuación diferencial:

```
In[1]:= ecamforz=x'[t]+(b/M) x'[t]+(k/M) x[t]-(F0/M) Cos[ω t];
```

Solución de la ecuación diferencial:

```
In[2]:= forz=DSolve[{ecamforz==0,x[0]==1,x'[0]==0},x,t];
```

Definiciones:

```
In[3]:= ECpos[t_,b_,k_,ω_,M_,F0_]=x[t]/.forz;
        ECvel[t_,b_,k_,ω_,M_,F0_]=x'[t]/.forz;

In[4]:= ECCinetica[t_,F0_,k_,M_,ω_,b_]=(1/2)*M*
        (ECvel[t,b,k,ω,M,F0])^2;
        ECPotencial[t_,F0_,k_,M_,ω_,b_]=(1/2)*k*
        (ECpos[t,b,k,ω,M,F0])^2;
        ECTotal[t_,F0_,k_,M_,ω_,b_]=ECCinetica[t,F0,k,M,ω,b]+
        ECPotencial[t,F0,k,M,ω,b];
```

Código Figura 3.22:

```
In[5]:= Manipulate[Plot[{ECpos[t,b,k,ω,M,F0],ECvel[t,b,k,ω,M,F0],
        ECacel[t,b,k,ω,M,F0]}, {t,1,50},Frame→True,FrameStyle→
        Black, FrameLabel → {"t(s)", ""},PlotLegends→Placed[{
        "Posicion","Velocidad", "Aceleracion"}, {0.8, 0.8}]],
        {{b,0.4,"Amortiguamiento (b)"},0,12},{k,0.5,"Constante(k)"},
        0,12},{ω,1,"Constante(ω)"},1,12},{M,4.66,"Masa(m)"},1,12},
        {{F0,1,Constante F0},1,12}]
```

Código Figura 3.23:

```
In[6]:= Manipulate[Plot[{ECCinetica[t,F0,k,M,ω,b],ECPotencial[t,
        F0,k,M,ω,b],ECTotal[t,F0,k,M,ω,b]}, {t,1,10},Frame→True,
        FrameStyle→Black, FrameLabel → {"t(s)", ""},
        PlotLegends→Placed[{"E. Cinetica","E. Potencial","E.Total"},
        {0.8, 0.7}]],{{b,0.4,"Amortiguamiento (b)"},0,12},{k,0.5,
        "Constante (k)"},0,12},{ω,1,"Constante (ω)"},1,12},{M,4.66,
        "Masa (m)"},1,12},{F0,1,Constante F0},1,12}]
```

Código Figura 3.24:

```
In[7]:= Manipulate[Plot[ECdtotal[t,F0,k,M,ω,b],{t,0,10}, Frame→True,
        FrameStyle→Black, FrameLabel → {"t(s)",  $\frac{dE}{dt}$ }, Filling→Axis],
        {{b,0.4,"Amortiguamiento (b)"},0,12},{k,0.5,"Constante (k)"},
        0,12},{ω,1,"Constante (ω)"},1,12},{M,4.66,"Masa (m)"},
        1,12},{F0,1,Constante F0},1,12}]
```

Código Figura 3.25:

```
In[8]:= Manipulate[ParametricPlot[Evaluate[{x[t],x'[t]}/.forz[t,b,ω,
        M,k,F0]], {t,0,20},Frame→True,FrameStyle→Black, FrameLabel
        → {"x(t)","v(t)"},{{b,0.4,"Amortiguamiento (b)"},0,12},
        {{k,0.5,"Constante (k)"},0,12},{ω,1,"Constante (ω)"},1,12},
        {{M,4.66,"Masa (m)"},1,12},{F0,1,"Constante F0"},1,12}]
```

3.5. Osciladores armónicos acoplados

En la naturaleza hay sistemas físicos mecánicos que se pueden modelar por un conjunto de osciladores libres que están interconectados entre sí, de forma que el movimiento de cada oscilador se ve afectado por estos acoplos. Esto se refleja en el hecho de que las ecuaciones de movimiento se encuentran acopladas. Un ejemplo es la molécula de dióxido de carbono (CO_2) la cual se puede modelar a través de dos resortes entre los tres átomos.

El sistema como un todo tendrá varias frecuencias de oscilación o modos normales. Una manera de encontrar estas frecuencias es asumiendo que las coordenadas que describen el sistema presentan un comportamiento oscilatorio en el tiempo: $x_k = A_k e^{i\omega t}$. Otra forma es proponiendo una transformación de coordenadas que permita desacoplar las ecuaciones de movimiento.

Ejemplo 3.2

Dos osciladores armónicos acoplados.

Consideremos el movimiento unidimensional de dos partículas de masas m_1 y m_2 , conectadas (o acopladas) entre ellas por un resorte de constante elástica k_{12} y conectadas, cada una de ellas, a resortes de constantes elásticas k_1 y k_2 , respectivamente (ver **Figura 3.26**). Plantear las ecuaciones de movimiento a partir de la segunda ley de Newton y encontrar las frecuencias de oscilación del sistema.

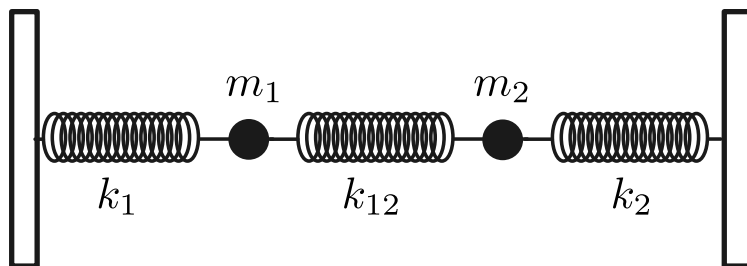


Figura 3.26: Dos osciladores armónicos acoplados.

Solución.

En primer lugar se encontrarán las frecuencias del sistema asumiendo que cada coordenada presenta un movimiento oscilatorio y, en segundo lugar, definiendo una transformación a coordenadas normales.

Procedimiento 1. Aplicando la segunda ley de Newton a cada partícula se obtiene:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 - k_{12}(x_1 - x_2), \\ m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_{12})x_1 - k_{12}x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

y

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2 x_2 - k_{12}(x_2 - x_1), \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k_{12})x_2 - k_{12}x_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

A continuación se asume un comportamiento oscilatorio para las coordenadas $x_{1,2}$:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 e^{i\omega t}, \\ x_2 &= A_2 e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Al sustituir estas expresiones en las **Ecuaciones (3.37) y (3.38)** se llega a:

$$\begin{aligned} -m_1 \omega^2 A_1 + (k_1 + k_{12})A_1 - k_{12}A_2 &= 0, \\ -m_2 \omega^2 A_2 + (k_2 + k_{12})A_2 - k_{12}A_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Las dos ecuaciones anteriores se pueden escribir en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} -m_1 \omega^2 + (k_1 + k_{12}) & -k_{12} \\ -k_{12} & -m_2 \omega^2 + (k_2 + k_{12}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para obtener una solución no trivial ($A_1 = 0 = A_2$) se exige que el determinante de la primera matriz sea igual a cero. A continuación se presentan los comandos requeridos en *Mathematica* para encontrar los valores de las frecuencias.

Código en *Mathematica* para el Ejemplo 3.3

```
In[1]:= A = {{-m1 w^2 + (k1 + k12), -k12}, {-k12, -m2 w^2 + (k2 + k12)}}
In[2]:= Det[{ {k1+k12-m1 w^2, -k12}, {-k12, k12+k2-m2 w^2} }] // Simplify;
In[3]:= Solve[Det[A] == 0, w] // Simplify
In[4]:= Solve[Det[A] == 0, w] /. {k1 -> k, k2 -> k, m1 -> m, m2 -> m}
//FullSimplify

Out[4]= {{w -> -\sqrt{\frac{(k+k12) m - \sqrt{k12^2 m^2}}{m^2}}, {w -> \sqrt{\frac{(k+k12) m - \sqrt{k12^2 m^2}}{m^2}},
{w -> -\sqrt{\frac{(k+k12) m + \sqrt{k12^2 m^2}}{m^2}}, {w -> \sqrt{\frac{(k+k12) m + \sqrt{k12^2 m^2}}{m^2}}}}
```

Se observa que el sistema tiene cuatro soluciones, pero dos de ellas se descartan por ser negativas. Así que solo hay dos frecuencias de oscilación.

A continuación se estudiarán dos casos especiales:

Caso 1. Cuando $k_1 = k_2 = k$ y $m_1 = m_2 = m$. Este resultado se muestra en la última línea de las instrucciones presentadas arriba con el programa *Mathematica*:

Solve[Det[A] == 0, w] /. {k1 -> k, k2 -> k, m1 -> m, m2 -> m} // FullSimplify

En este caso las frecuencias de oscilación están dadas por:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}} \quad \text{y} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3.41)$$

Caso 2. Cuando $k_1 = k_2 = k$, $k_{12} = 3k$ y $m_1 = m_2 = m$. En este caso, las frecuencias de oscilación son:

$$\omega_1 = \sqrt{7} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{y} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3.42)$$

Procedimiento 2. Por medio de una transformación *ortogonal* de coordenadas que desacople las **Ecuaciones de movimiento (3.5)**, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2), \\ x_2 &= \frac{1}{2}(\eta_2 - \eta_1); \end{aligned} \quad (3.43)$$

o, en notación matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \vec{X} = \mathbf{O}\vec{\eta}. \quad (3.44)$$

Obsérvese que esta transformación es equivalente a:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= x_1 - x_2, \\ \eta_2 &= x_1 + x_2; \end{aligned}$$

y que la matriz de transformación $\mathbf{O}$ es ortogonal ($\mathbf{O}\mathbf{O}^T = \mathbf{I}_{2 \times 2}$) y su determinante es 1 ($\det(\mathbf{O}) = 1$).

Sustituyendo a x_1 y x_2 de las **Ecuaciones (3.53)**, en las ecuaciones diferenciales dadas por **(3.50)**, se obtiene:

$$\begin{aligned} m_1(\ddot{\eta}_1 + \ddot{\eta}_2) + (k_1 + k_{12})(\eta_1 + \eta_2) - k_{12}(\eta_2 - \eta_1) &= 0, \\ m_2(\ddot{\eta}_2 - \ddot{\eta}_1) + (k_2 + k_{12})(\eta_2 - \eta_1) - k_{12}(\eta_1 + \eta_2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

A continuación se considerarán los dos casos especiales estudiados previamente:

Caso 1. Cuando $k_1 = k_2 = k$ y $m_1 = m_2 = m$. En este caso las **Ecuaciones (3.45)** se transforman en:

$$\begin{aligned} m(\ddot{\eta}_1 + \ddot{\eta}_2) + (k + k_{12})(\eta_1 + \eta_2) - k_{12}(\eta_2 - \eta_1) &= 0, \\ m(\ddot{\eta}_2 - \ddot{\eta}_1) + (k + k_{12})(\eta_2 - \eta_1) - k_{12}(\eta_1 + \eta_2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$



Sumando y restando estas ecuaciones se obtiene, respectivamente:

$$\begin{aligned}\ddot{\eta}_2 + \left(\frac{k}{m}\right)\eta_2 &= 0, \\ \ddot{\eta}_1 + \left(\frac{k + k_{12}}{m}\right)\eta_1 &= 0;\end{aligned}\tag{3.47}$$

lo que corresponde a dos movimientos armónicos simples con frecuencias

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k + k_{12}}{m}} \quad \text{y} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Observe que es el mismo resultado dado por el procedimiento anterior.

Bajo ciertas condiciones iniciales especiales el sistema oscilará con la frecuencia ω_1 o con ω_2 . Por ejemplo, cuando $x_1(0) = -x_2(0)$ y $\dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0)$. En este caso se tiene $\eta_1(0) = x_1(0) - x_2(0) = 2x_1(0)$ y $\eta_2(0) = x_1(0) + x_2(0) = 0$, por lo que el sistema solo oscilará con la frecuencia ω_1 asociada a η_1 . A esta oscilación se le llama *modo antisimétrico*.

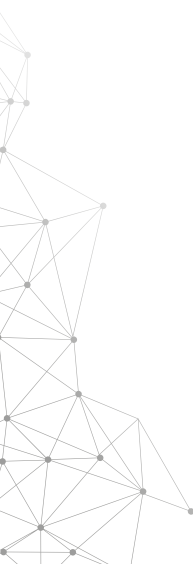
Por otra parte, si $x_1(0) = x_2(0)$ y $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0)$ se tiene que $\eta_1(0) = 0$. El sistema solo oscilará con la frecuencia ω_2 asociada a la coordenada η_2 . A este caso se le llama *modo simétrico*. En general, el modo antisimétrico se presenta con la frecuencia mayor.

Caso 2. Cuando $k_1 = k_2 = k$, $k_{12} = 3k$ y $m_1 = m_2 = m$. En esta situación las **Ecuaciones (3.45)** se transforman en:

$$\begin{aligned}m(\ddot{\eta}_1 + \ddot{\eta}_2) + 4k(\eta_1 + \eta_2) - 3k(\eta_2 - \eta_1) &= 0, \\ m(\ddot{\eta}_2 - \ddot{\eta}_1) + 4k(\eta_2 - \eta_1) - 3k(\eta_1 + \eta_2) &= 0.\end{aligned}\tag{3.48}$$

Sumando y restando estas dos ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned}\ddot{\eta}_2 + \left(\frac{k}{m}\right)\eta_2 &= 0, \\ \ddot{\eta}_1 + \left(\frac{7k}{m}\right)\eta_1 &= 0;\end{aligned}\tag{3.49}$$



estas ecuaciones corresponden a dos movimientos armónicos simples con frecuencias

$$\omega_1 = \sqrt{7} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{y} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

con lo que se obtiene el mismo resultado del procedimiento anterior.

Ejemplo 3.3

Dos osciladores armónicos idénticos, con masa M y frecuencia natural ω_0 , se acoplan agregando al sistema una masa común m a ambos osciladores. Las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + (m/M)\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_1 &= 0, \\ \ddot{x}_2 + (m/M)\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Resolver este par de ecuaciones diferenciales acopladas y obtener las frecuencias de los modos normales del sistema.

Solución.

El problema se resolverá por medio de dos procedimientos diferentes.

Procedimiento 1. Se asumirá que x_1 y x_2 tienen comportamiento oscilatorio:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 e^{i\omega t}, \\ x_2 &= A_2 e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones diferenciales se obtiene:

$$\begin{aligned} -A_1 \omega^2 e^{i\omega t} - (m/M)A_2 \omega^2 e^{i\omega t} + \omega_0^2 A_1 e^{i\omega t} &= 0, \\ -A_2 \omega^2 e^{i\omega t} - (m/M)A_1 \omega^2 e^{i\omega t} + \omega_0^2 A_2 e^{i\omega t} &= 0; \end{aligned}$$

y factorizando a $e^{i\omega t}$ se llega a:

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2)A_1 - (m/M)\omega^2 A_2 &= 0, \\ (\omega_0^2 - \omega^2)A_2 - (m/M)\omega^2 A_1 &= 0. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones las podemos escribir en forma matricial de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -(m/M)\omega^2 \\ -(m/M)\omega^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una solución no trivial se obtiene exigiendo que el determinante de la primera matriz sea cero:

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (m/M)^2 \omega^4 &= 0, \\ \omega_0^2 - \omega^2 &= \pm (m/M) \omega^2, \\ \omega_0^2 &= [1 \pm (m/M)] \omega^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, hay dos frecuencias dadas por:

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 \pm \frac{m}{M}}}. \quad (3.52)$$

Procedimiento 2. Considerando una transformación *ortogonal* de coordenadas que desacople las ecuaciones diferenciales dadas, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2), \\ x_2 &= \frac{1}{2}(\eta_2 - \eta_1). \end{aligned} \quad (3.53)$$

En forma matricial se tiene:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \vec{X} = \mathbf{O} \vec{\eta}. \quad (3.54)$$

Obsérvese que esta transformación es equivalente a:

$$\eta_1 = x_1 - x_2 \quad \text{y} \quad \eta_2 = x_1 + x_2;$$

y que la matriz de transformación $\mathbf{O}$ es ortogonal ($\mathbf{O}\mathbf{O}^T = \mathbf{I}_{2 \times 2}$) y su determinante es 1 ($\det(\mathbf{O}) = 1$).

Sustituyendo a x_1 y a x_2 de las **Ecuaciones (3.53)** en las ecuaciones diferenciales dadas por **(3.50)**, se obtiene:

$$\begin{aligned} (\ddot{\eta}_1 + \ddot{\eta}_2) + (m/M)(\ddot{\eta}_2 - \ddot{\eta}_1) + \omega_0^2(\eta_1 + \eta_2) &= 0, \\ (\ddot{\eta}_2 - \ddot{\eta}_1) + (m/M)(\ddot{\eta}_1 + \ddot{\eta}_2) + \omega_0^2(\eta_2 - \eta_1) &= 0. \end{aligned}$$



Sumando estas ecuaciones se llega a:

$$\begin{aligned}\ddot{\eta}_2 + (m/M)\ddot{\eta}_2 + \omega_0^2\eta_2 &= 0, \\ [1 + (m/M)]\ddot{\eta}_2 + \omega_0^2\eta_2 &= 0, \\ \ddot{\eta}_2 + \frac{\omega_0^2}{[1 + (m/M)]}\eta_2 &= 0;\end{aligned}\tag{3.55}$$

y restándolas se obtiene:

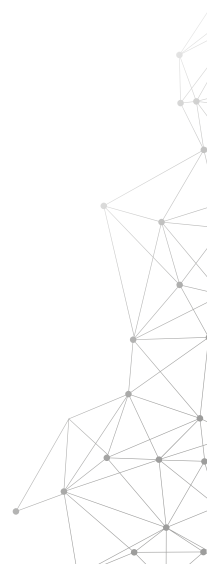
$$\begin{aligned}\ddot{\eta}_1 - (m/M)\ddot{\eta}_1 + \omega_0^2\eta_1 &= 0, \\ [1 - (m/M)]\ddot{\eta}_1 + \omega_0^2\eta_1 &= 0, \\ \ddot{\eta}_1 + \frac{\omega_0^2}{[1 - (m/M)]}\eta_1 &= 0.\end{aligned}\tag{3.56}$$

Las **Ecuaciones (3.55) y (3.56)** corresponden al movimiento de dos osciladores armónicos con frecuencias propias

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \frac{m}{M}}} \quad \text{y} \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{m}{M}}}.\tag{3.57}$$

De esta manera, se llega al mismo resultado que se obtuvo a través del procedimiento 1.

De acuerdo con la cantidad subradical en ω_2 se concluye que la masa m que hace el acople tiene que ser menor que la masa M de cada oscilador. De lo contrario, se obtendría una frecuencia imaginaria. También se concluye que cuando $m \ll M$, solo hay una frecuencia $\omega = \omega_1 = \omega_2$, es decir, el acople es tan débil que los dos osciladores ejecutan un movimiento armónico.



Ejercicio

3.9 Molécula triatómica lineal simétrica. Considere dos átomos de masa m cada uno, ubicados simétricamente a los lados de un átomo de masa M . Los tres átomos están en línea recta, conectados por dos resortes de constante elástica k (ver **Figura 3.27**). Este modelo sirve para describir la molécula de dióxido de carbono (CO_2).

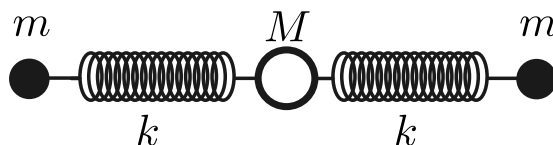


Figura 3.27: Molécula triatómica lineal y simétrica.

Encontrar las frecuencias de oscilación longitudinal en los siguientes casos:

(a) Cuando se defina la siguiente transformación de coordenadas:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2), \\ x_1 &= \frac{1}{2}(\eta_1 - \eta_2), \\ x_2 &= -\frac{m}{M}\eta_1. \end{aligned}$$

(b) Utilizando la transformación de coordenadas

$$\begin{aligned} \eta_1 &= x_2 - x_1, \\ \eta_2 &= x_3 - x_2. \end{aligned}$$

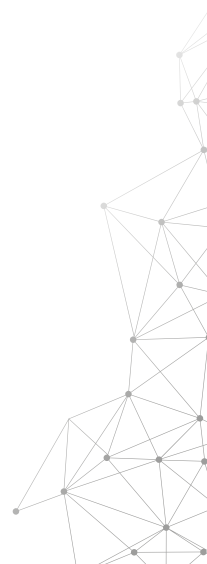
Asuma que el centro de masa se mantiene en reposo. En este caso, $m(x_1 + x_3) + M(x_2) = 0$, es decir, $x_2 = -(m/M)(x_1 + x_3)$.



3.6. Actividades complementarias

1. Con el objetivo de profundizar en el aprendizaje sobre las oscilaciones estudiadas en este capítulo, a partir de la articulación entre teoría y simulación mediante el uso de paquetes computacionales como Mathematica, PPlane, Maple y GeoGebra, el analizador de videos Tracker y la calculadora científica, se recomienda estudiar los siguientes artículos:

- López-Mariño MA, Hernández-Olvera JA, Barroso LA, Trujillo Caballero JC. Cómputo simbólico y gráfico: estudio del sistema masa-resorte. *Rev Bras Ens Fis.* 2017; 39(2).
- Escalante-Martínez JE. Análisis del coeficiente de amortiguamiento viscoso en un sistema masa-resorte-amortiguador utilizando PPLANE y GEOGEBRA. *Rev Mex Fis E.* 2016; 62: 66–72.
- Ortigoza-Capetillo GM. Resolviendo ecuaciones diferenciales ordinarias con Maple y Mathematica. *Rev Mex Fís.* 2007; 53(2).
- Ríos V, Montero G, Román A, García A. Simulación experimental para la enseñanza del movimiento oscilatorio, *Lat. Am J Phys Educ.* 2017; 11(1).
- Cornejo-Serrano MC, Villalobos-Oliver EB, Molina-Reséndiz S, Arreola-Galván WG. Sistema masa resorte con movimiento libre amortiguado, casos: sobreamortiguado, críticamente amortiguado y subamortiguado, su modelación y solución, con el apoyo de GeoGebra. *Pistas Educativas.* 2016; 38(121).
- Cardozo J, Castro LJP, Muñoz JH. Estudio del sistema masa-resorte utilizando Mathematica. *Revista Noria Investigación Educativa.* 2021; 2(8): 114–28.





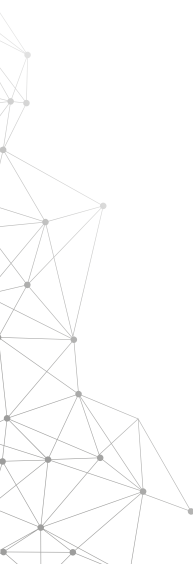
2. Las oscilaciones estudiadas en este capítulo corresponden a oscilaciones *lineales*. Sin embargo, otro tema de bastante interés en física es el de las oscilaciones *no lineales*. En este caso, se consideran fuerzas que no son lineales, por ejemplo, $f(x) = kx^3$, conduciendo a ecuaciones diferenciales no lineales para la ecuación de movimiento de la partícula.

Un caso importante de oscilaciones no lineales es el *péndulo plano*. En este sistema se consideran ángulos grandes, de tal manera que no es válida la aproximación $\sin \theta \approx \theta$. Este hecho hace que la ecuación de movimiento para el péndulo ya no sea lineal.

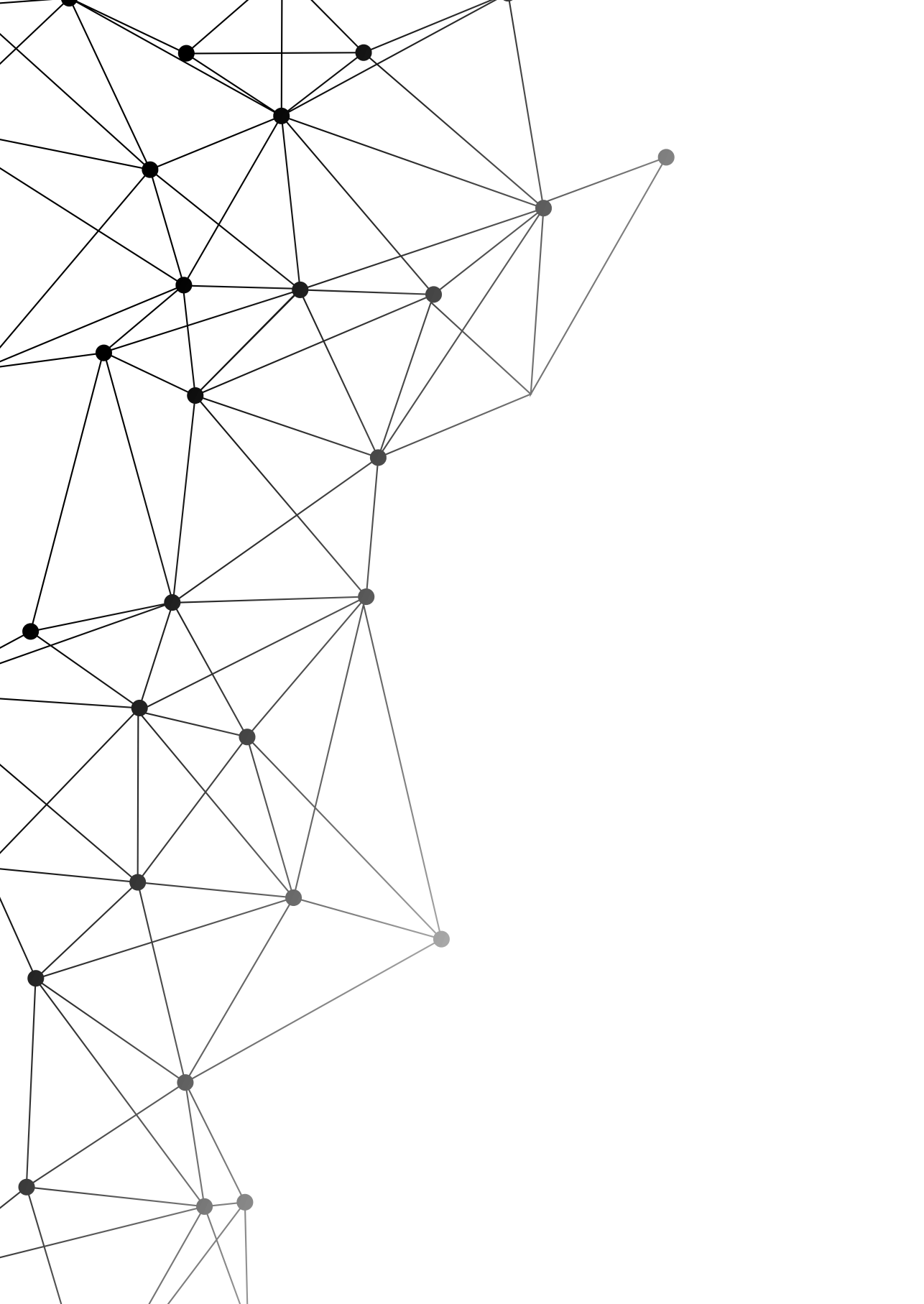
Otro tema relacionado con ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales es el *caos*. Este tópico es de bastante interés en un curso avanzado de mecánica clásica.

Con el propósito de motivar al lector a tener un primer acercamiento a las oscilaciones no lineales y al caos, se sugiere leer los siguientes artículos:

- Salinas-Hernández E, Ares De Parga G, Domínguez-Hernández S, Muñoz-Vega R. Approximate frequencies of the pendulum for large angles. *Rev Mex Fis E*. 2017; 63: 6–11.
- Lima FMS. An accurate formula for the period of a simple pendulum oscillating beyond the small angle regime. *Am J Phys*. 2006; 74(10).
- Cattani M, Caldas I, Souza SL, Iarosz KC. Deterministic Chaos Theory: Basic concepts. *Rev Bras Ens Fis*. 2017; 39(1).
- Espíndola-Heredia R, Valle G, Hernández G. Numerical study of pendulums: From the simple pendulum approximation to the damped physical pendulum with variable mass, *Lat. Am J Phys Educ*. 2012; 6(2).
- Lemos NA. Quartic oscillator and Jacobi elliptic functions. *Rev Bras Ens Fis*. 2017; 39(1).



3. Un estudio general al péndulo amortiguado asumiendo que la fuerza de fricción es proporcional a la velocidad ($F_f \sim v^n$, con $n > 2$), se presenta en el artículo:
 - Quiroga GD, Ospina-Henao PA. Dynamics of damped oscillations: physical pendulum. *Eur J Phys.* 2017; 38.
4. El tema de las oscilaciones también se puede combinar con masas que varían con el tiempo. En la siguiente referencia, se estudió el movimiento oscilatorio de un cuerpo cuya masa no es constante:
 - Rodrigues H, Panza N, Portes D. A model of oscillator with variable mass. *Rev Mex Fis.* 2014; 60.





Capítulo

4

Formalismo lagrangiano

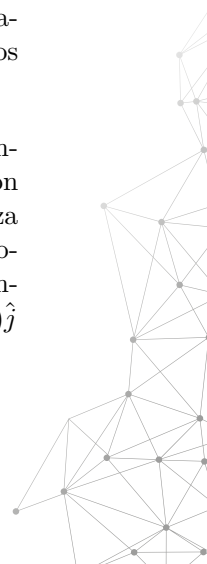
En este capítulo se presenta una introducción al formalismo lagrangiano. Se obtienen las ecuaciones de Lagrange a través del principio de D'Alembert (de carácter diferencial) y del principio de Hamilton (de carácter variacional). Este formalismo ofrece un escenario más potente que el newtoniano para estudiar mecánica clásica. Es de carácter escalar a diferencia del newtoniano que es vectorial.

4.1. Conceptos importantes

4.1.1. Ligaduras

Las ligaduras son *restricciones* que limitan el movimiento de la partícula o del sistema de partículas. En algunos casos es fácil escribir la ecuación matemática asociada a la ligadura. A continuación se presentan algunos ejemplos en los que aparecen ligaduras:

- **Movimiento parabólico.** Consideremos el movimiento en tres dimensiones de un cuerpo que se lanza desde el piso formando un ángulo θ con la horizontal y una velocidad inicial $\vec{v}_0$. Asumiendo que la única fuerza que actúa sobre el cuerpo es el peso (es decir, el aire no ejerce fricción sobre el cuerpo), el movimiento del mismo se da en un plano (en dos dimensiones). Esto es una restricción. En este caso, $\vec{v}_0 = (v_0 \cos \theta)\hat{i} + (v_0 \sin \theta)\hat{j}$ y el cuerpo describe una parábola.





- **Máquina de Atwood (Figura 4.1).** Es un sistema formado por dos masas restringidas a un movimiento vertical (una hacia arriba y la otra hacia abajo) atadas a los extremos de una cuerda inextensible y de masa despreciable, que pasa por una polea fija sin fricción. En este caso se tienen varias ligaduras: el movimiento de cada masa se da en una dimensión y las dos masas siempre estarán separadas por la longitud de la cuerda. La máquina de Atwood es un caso especial de un *sistema formado por dos masas atadas por una cuerda* como por ejemplo, cuando una de las masas se mueve sobre un plano inclinado o sobre una mesa horizontal y la otra se mueve verticalmente, o cuando cada masa está sobre un plano inclinado (ver **Ejemplo 2.1** en el **Capítulo 2**).

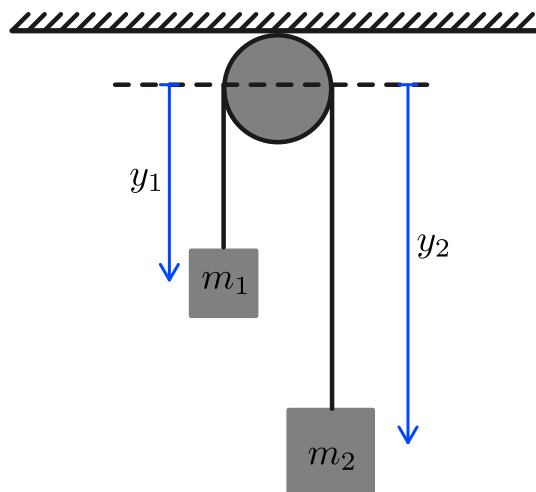
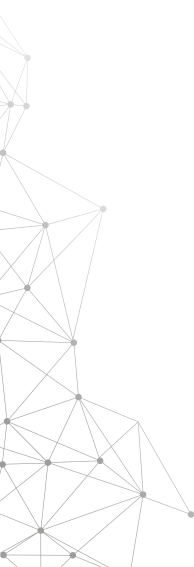


Figura 4.1: Máquina de Atwood.

- **Máquina de Atwood doble (Figura 4.2).** Es una extensión de la máquina de Atwood. En este caso el sistema está conformado por tres masas restringidas a moverse verticalmente. Dos de ellas forman una máquina de Atwood cuya polea está colgando de otra polea fija de la que está suspendida la otra masa. Las cuerdas del sistema se consideran inextensibles (es otra ligadura) y con masa despreciable. De igual manera, se asume que las masas de las poleas son despreciables.



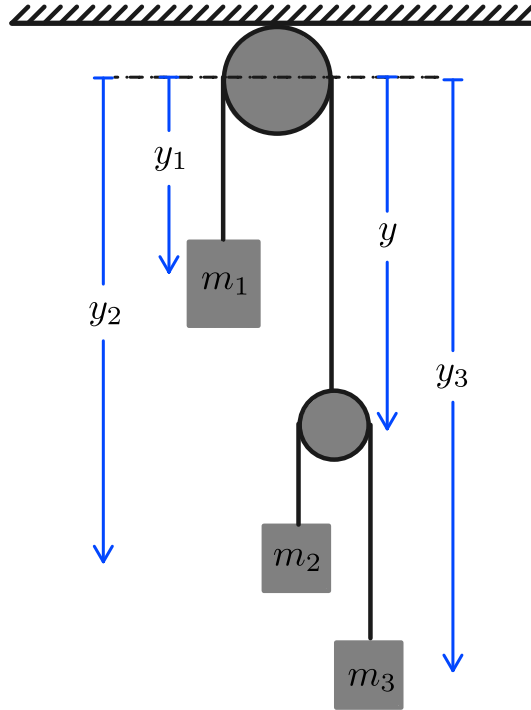
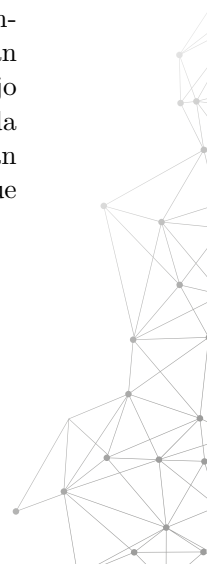


Figura 4.2: Máquina de Atwood doble.

- **Péndulo simple (Figura 3.1).** El movimiento de la partícula se da en un plano (es una ligadura) y la partícula siempre va a estar a la misma distancia del punto de suspensión de la cuerda a la cual está atada (es otra ligadura). El ángulo de oscilación cumple la aproximación $\sin \theta \simeq \theta$.
- **Péndulo doble (Figura 4.3).** Es una generalización del péndulo simple. El péndulo doble está conformado por dos masas m_1 y m_2 que están oscilando. La primera de las masas, m_1 , está suspendida de un punto fijo mediante una cuerda de longitud l_1 . La otra masa, m_2 , está suspendida de m_1 por medio de una cuerda de longitud l_2 . Las cuerdas se consideran inextensibles (es una restricción) y con masa despreciable. Se asume que ambas masas oscilan en un plano (es una ligadura).



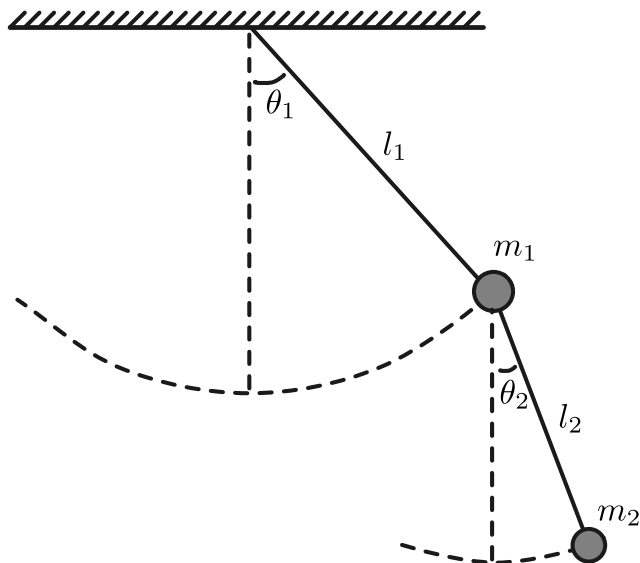
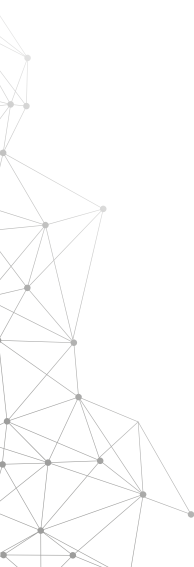


Figura 4.3: Péndulo doble.

- **Cuerpo rígido.** En un cuerpo rígido la distancia entre toda pareja de partículas que conforma el cuerpo es *constante*. Esto hace que el cuerpo no sea deformable. Si el cuerpo rígido está fijo en un punto, solo puede rotar y no se puede trasladar.
- Objeto que se desliza sobre un plano inclinado (ligadura) que está fijo sobre una superficie horizontal. El objeto puede ser un bloque, un aro, un disco, una esfera, etc. Una variante a este sistema es asumir que el plano inclinado se mueve horizontalmente.
- Partícula restringida a moverse sobre la superficie de una esfera, o de un cono, o de un cilindro.
- Un gas en un recipiente.
- Dos partículas unidas por una varilla.



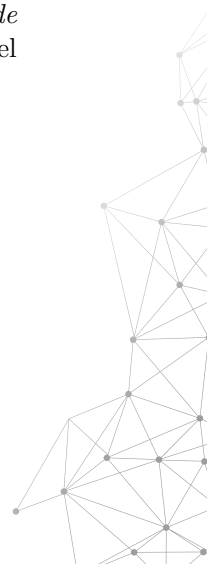


Hay distintas variaciones, extensiones o generalizaciones que se pueden hacer tanto al péndulo simple o doble como a la máquina de Atwood -sencilla o doble. Por ejemplo, en el caso del péndulo se puede considerar que la masa de la cuerda no es despreciable o que el punto de suspensión del péndulo se mueve horizontal o verticalmente y una generalización inmediata es considerar el péndulo triple. Por otra parte, en el caso de la máquina de Atwood se puede considerar que la polea tiene masa y que rota. También se puede considerar que el punto de suspensión de la polea no está fijo.

Entre los tipos de ligaduras se encuentran:

- Ligaduras *holónomas*. También llamadas *integrables*. Restringen solo la posición del sistema y no involucran velocidades. Se pueden escribir de la forma $f(x_i; t) = 0$, donde $i = 1, \dots, n$, siendo n el número de partículas que conforman el sistema. La variable que está después del signo «;» es la variable independiente. En este caso, el tiempo.
- Ligaduras *no holónomas*. También se les llama *diferenciales no integrables*. La expresión matemática que las representa no se puede integrar.
- Ligaduras *reónomas*. Son ligaduras holónomas o no holónomas que dependen del tiempo.
- Ligaduras *esclerónomas*. Son ligaduras que no cambian con el tiempo.

La existencia de ligaduras en un sistema hace que las coordenadas $\vec{r}_i$ de las partículas *no sean todas independientes*. Es decir, es posible expresar algunas coordenadas del sistema en función de otras. Además, aparecen las *fuerzas de ligadura* que corresponden a interacciones entre las ligaduras y los cuerpos del sistema.





4.1.2. Grados de libertad

Es el número de coordenadas *independientes* necesarias para especificar completamente el sistema. Está dado por $3n - m$ donde n es el número de partículas y m es el número de ligaduras.

Los grados de libertad se clasifican en:

- Traslacionales: describen el movimiento del centro de masa.
- Rotacionales: describen las rotaciones del sistema respecto al centro de masa.
- Vibracionales: describen los movimientos relativos de las partículas que no trasladan el centro de masa y no rotan el sistema.

4.1.3. Coordenadas generalizadas

Es cualquier conjunto de coordenadas *independientes* necesarias para describir un sistema. Las coordenadas generalizadas se simbolizan por la letra q . El número de coordenadas generalizadas es $3n - m$. En forma general, el conjunto de coordenadas generalizadas es $\{q_1, q_2, \dots, q_{3n-m}\}$, donde n es el número de partículas y m es el número de ligaduras holónomas. Las coordenadas x_i de las partículas están en función de las q_j (y viceversa):

$$x_i = x_i(q_j, t), \quad i = 1, \dots, 3n; \quad j = 1, \dots, 3n - m. \quad (4.1)$$

La configuración instantánea del sistema está dada por un punto del espacio conformado por las $\{q_{3n-m}\}$ coordenadas. Este espacio de $3n - m$ dimensiones, donde cada q_i corresponde a un eje, se llama *espacio de configuración*.

Ejemplo 4.1

Considere una *partícula en movimiento parabólico* (Figura 4.4). Escribir las ecuaciones que representen las ligaduras, establecer el número de grados de libertad y dar ejemplos de conjuntos de coordenadas generalizadas.



Solución.

Se tiene una partícula, por lo tanto, $n = 1$. La ligadura hace que el movimiento se de en un plano, por ejemplo, el plano $X - Y$. De esta manera, el número de ligaduras es 1 y su ecuación es $z = 0$. Así, el número de grados de libertad es

$$3n - m = 3(1) - 1 = 2.$$

Lo anterior quiere decir que se requieren dos coordenadas para describir el sistema. Como conjuntos de coordenadas generalizadas se pueden considerar las coordenadas cartesianas o polares: $\{q_1, q_2\} = \{x, y\}, \{r, \theta\}$.

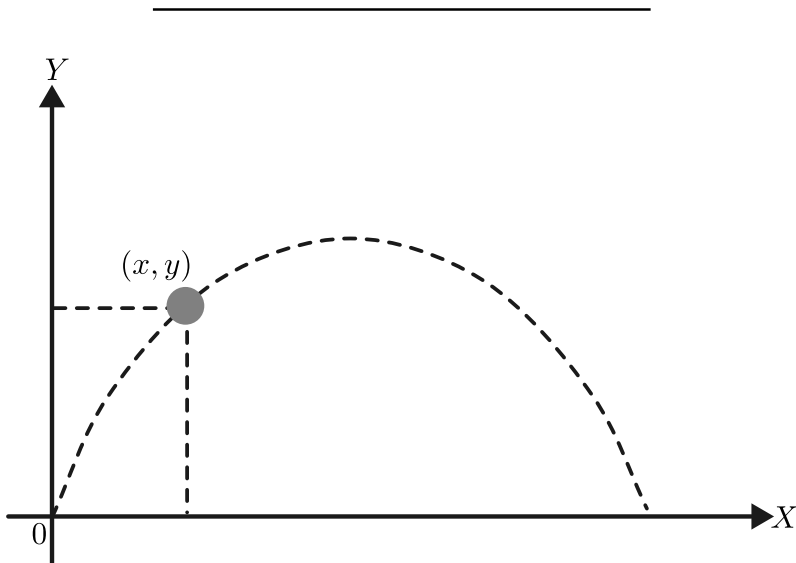


Figura 4.4: Movimiento parabólico.

Ejemplo 4.2

Considere el Péndulo simple (**Figura 3.1**). Escribir las ecuaciones de ligadura, obtener el número de grados de libertad y dar ejemplos de coordenadas generalizadas para este sistema.





Solución.

Se tiene una sola partícula, por lo tanto, $n = 1$. Hay dos ligaduras ($m = 2$):
(a) Una de ellas corresponde al movimiento de la partícula en un plano. Esto es $z = 0$; **(b)** La otra está relacionada con el hecho de que la cuerda es inextensible, entonces, para cualquier punto (x, y) que represente la posición de la masa, se tiene $x^2 + y^2 - l^2 = 0$, donde l es la longitud de la cuerda. De esta manera, el número de grados de libertad es

$$3n - m = 3(1) - 2 = 1.$$

Por lo tanto, solo se requiere una coordenada generalizada para describir el sistema. El conjunto de coordenadas generalizadas puede ser $\{q_1\} = \{x\}, \{y\}, \{\theta\}$.

Ejemplo 4.3

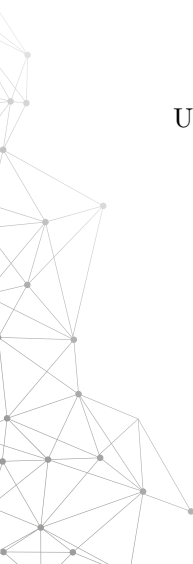
Obtener las ligaduras, los grados de libertad y dar ejemplos de coordenadas generalizadas para la *máquina de Atwood* (ver **Figura 4.1**).

Solución.

El sistema esta conformado por dos partículas de masas m_1 y m_2 . Así, $n = 2$. La posición de cada masa está dada por (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) . Considerando el origen del sistema cartesiano en el centro de la polea y que las partículas se mueven en la dirección vertical, se tienen las siguientes ligaduras: $x_1 = 0, z_1 = 0, x_2 = 0, z_2 = 0$ y $y_1 + y_2 = l$, donde l es la longitud de la cuerda inextensible. En total hay 5 ligaduras. La última, permite escribir la variable y_1 en función de y_2 y viceversa.

$$3n - m = 3(2) - 5 = 1.$$

En consecuencia, se requiere solo una coordenada para describir el sistema. Un conjunto de coordenadas generalizadas puede ser $\{q_1\} = \{y_1\} = \{y_2\}$.





Ejemplo 4.4

Considere un aro de radio r que rueda sobre un plano inclinado (**Figura 4.5**). Escriba las ecuaciones de ligadura, obtener el número de grados de libertad y dar ejemplos de coordenadas generalizadas.

Solución.

El sistema está conformado por un cuerpo: $n = 1$. Por otra parte, se tienen las siguientes ligaduras: **(a)** El movimiento del aro se da en un plano, esto es, $z = 0$; **(b)** El aro se mueve sobre el plano inclinado. Asumiendo que el aro ha recorrido la distancia y sobre el plano inclinado, esta distancia es igual al arco del aro, el cual está dado por $y = r\theta$, donde θ es el ángulo descrito por el radio r . Así, hay dos ligaduras ($m = 2$). El número de grados de libertad es

$$3n - m = 3(1) - 2 = 1.$$

Solo se requiere una coordenada generalizada que puede ser $\{q_1\} = \{\theta\}, \{y\}$.

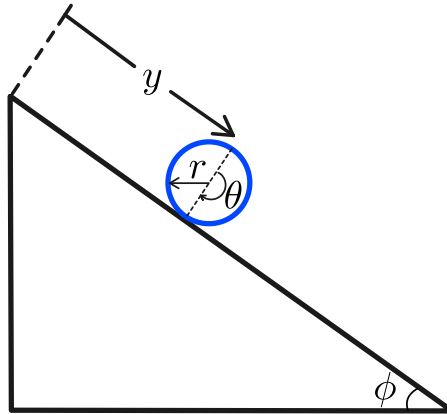
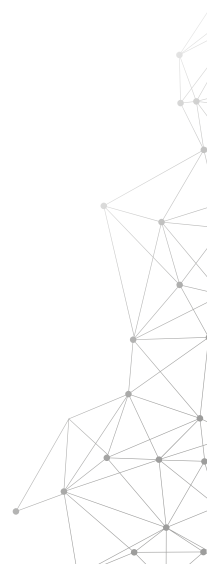


Figura 4.5: Aro rodando sobre un plano inclinado.





Ejercicios

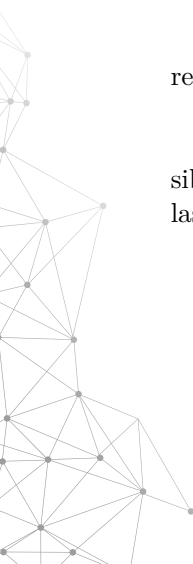
Obtener el número de grados de libertad, las ecuaciones de las ligaduras y mencionar conjuntos de coordenadas generalizadas para los siguientes sistemas:

- 4.1 Péndulo doble.
- 4.2 Máquina de Atwood doble.
- 4.3 Partícula sometida a la fuerza gravitacional dentro de un cono.
- 4.4 Bloque que desliza sobre un plano inclinado que se mueve horizontalmente.
- 4.5 Una partícula de masa m , sometida a una fuerza $\vec{F} = -k\vec{r}$ y restringida a moverse sobre la superficie de un cilindro definido por $x^2 + y^2 = R^2$.
- 4.6 Un disco que rueda sobre un plano inclinado. Asuma inicialmente que el plano inclinado está fijo y luego que desliza horizontalmente.

4.2. Principio de D'Alembert y ecuaciones de Lagrange

En un sistema se pueden distinguir tres tipos de desplazamientos: posibles, reales y *virtuales*.

Los *desplazamientos virtuales* o *infinitesimales* son los desplazamientos posibles al variar infinitesimalmente las coordenadas del sistema, compatibles con las fuerzas y las ligaduras del sistema. Se simbolizarán por $\delta\vec{r}$.





4.2.1. Ecuación general de la estática o principio de los trabajos virtuales

Considérese un sistema de n partículas. La fuerza resultante $\vec{F}_i$ que actúa sobre la i -ésima partícula es $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{f}_i$, donde $\vec{F}_i^{(e)}$ es la fuerza externa sobre la i -ésima partícula y $\vec{f}_i$ es la fuerza de ligadura.

Para un sistema en equilibrio, la fuerza resultante $\vec{F}_i$ sobre la i -ésima partícula es nula. Por lo tanto, el trabajo virtual de esta fuerza es cero:

$$\vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Si se suma sobre todas las partículas que conforman el sistema, se tiene:

$$\sum_i^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_i^n (\vec{F}_i^{(e)} + \vec{f}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Considerando que la fuerza de ligadura es perpendicular a la superficie por donde se mueve el cuerpo, entonces, esta fuerza no realiza trabajo virtual: $\sum_i^n \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$. De esta manera se obtiene

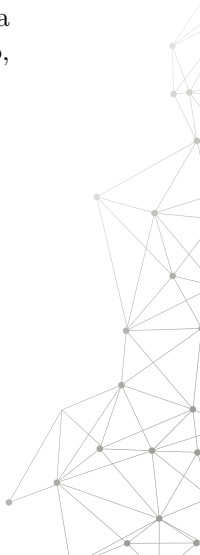
$$\sum_i^n \vec{F}_i^{(e)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (4.2)$$

La ecuación anterior recibe el nombre de *principio de los trabajos virtuales* (o *ecuación general de la estática*) y fue formulado por J. Bernoulli en 1717. Obsérvese que en la ecuación anterior los $\delta \vec{r}_i$ *no son independientes* porque están relacionados a través de las ecuaciones de las ligaduras.

4.2.2. Ecuación general de la dinámica o principio de D'Alembert

Para el caso dinámico, en el cual el sistema no está en equilibrio, la fuerza total sobre cada una de las partículas del sistema no es cero. En este caso, aplicando la segunda ley de Newton a la i -ésima partícula se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{F}_i &= \dot{\vec{p}}_i, \\ \vec{F}_i^{(e)} + \vec{f}_i &= \dot{\vec{p}}_i, \\ \vec{F}_i^{(e)} + \vec{f}_i - \dot{\vec{p}}_i &= 0. \end{aligned}$$





De esta última expresión se concluye que el trabajo virtual realizado por esta *fuerza* es cero: $(\vec{F}_i^{(e)} + \vec{f}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$. Si se suma sobre todas las partículas y nuevamente se considera que las ligaduras no realizan trabajo virtual ($\vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$), se obtiene:

$$\sum_i^n (\vec{F}_i^{(e)} - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (4.3)$$

La ecuación anterior recibe el nombre de *Principio de D'Alembert* (propuesto en 1760) o *Ecuación General de la Dinámica*. La fuerza $-\dot{\vec{p}}_i = -m_i \ddot{\vec{r}}_i$ se llama ficticia o inercial.

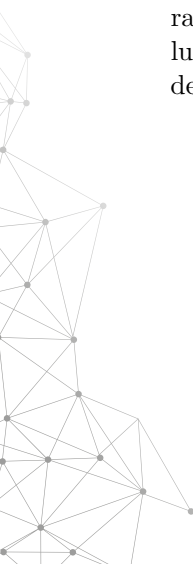
Es importante tener en cuenta que en la **Ecuación (4.3)** la cantidad $(\vec{F}_i^{(e)} - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i$ no es cero, pero la suma sobre todas las partículas sí lo es. El principio de D'Alembert establece que la suma de las fuerzas externas con las fuerzas *inerciales* no realiza trabajo virtual en un sistema dinámico. Aunque no es muy práctico, esta ecuación ofrece un camino alternativo para resolver problemas físicos dinámicos.

4.2.3. El principio de D'Alembert en coordenadas generalizadas

En la **Ecuación (4.3)** los desplazamientos virtuales $\delta \vec{r}_i$ no son independientes ya que están relacionados por las ligaduras. Para sobrepasar esto, se trabajará en coordenadas generalizadas, las cuales sí son independientes.

Considerando el vector posición de la i -ésima partícula en función de las coordenadas generalizadas, $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_j)$, donde $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, 3n - m$, se escribirá el Principio de D'Alembert en coordenadas generalizadas a través del procedimiento que se describe a continuación. En primer lugar, los desplazamientos virtuales $\delta \vec{r}_i$ se pueden escribir en función de los desplazamientos virtuales δq_j mediante la regla de la cadena:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (4.4)$$





donde no se consideraron variaciones δt porque los desplazamientos virtuales solo consideran desplazamientos de las coordenadas.

Por otra parte, la derivada total respecto al tiempo de $\vec{r}_i$ (ver **Ecuación (1.44)** en el **Capítulo 1**) está dada por:

$$\vec{v}_i \equiv \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}. \quad (4.5)$$

La derivada parcial de esta expresión respecto a $\dot{q}_k$ produce:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} &= \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} + 0, \\ \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} &= \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta_{jk}, \\ \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Utilizando la **Ecuación (4.4)**, el primer término de la **Ecuación (4.3)** se transforma de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_i^{(e)} \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_i \vec{F}_i^{(e)} \cdot \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \\ &= \sum_j \left(\sum_i \vec{F}_i^{(e)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j, \\ \sum_i \vec{F}_i^{(e)} \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_j Q_j \delta q_j, \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde Q_j se llama *fuerza generalizada* definida por

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \quad (4.8)$$

Como $j = 1, \dots, 3n - m$, la expresión anterior indica que *el número de coordenadas generalizadas es igual al número de grados de libertad* ($= 3n - m$). Por otra parte, es pertinente mencionar que las unidades de las fuerzas generalizadas no siempre son newtons. Solo en el caso en el que las coordenadas cartesianas sean las coordenadas generalizadas, las unidades serán newtons.





El segundo término de la **Ecuación (4.3)** se transforma en:

$$\begin{aligned}
 \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i, \\
 &= \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j; \quad \text{se usó la **Ecuación (4.4)**,} \\
 &= \sum_j \left[\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j, \\
 &= \sum_j \left[\sum_i m_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \right\} \right] \delta q_j. \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

En el último paso se utilizó la derivada temporal del producto escalar $\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ (ver **Capítulo 1**):

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) &= \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right), \\
 \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right).
 \end{aligned}$$

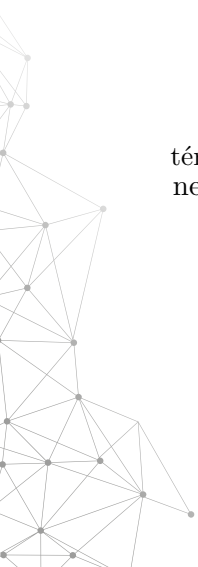
Por otra parte,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_k \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j},$$

es decir,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}. \quad (4.10)$$

Sustituyendo las **Ecuaciones (4.6)** y **(4.10)** en el primer y segundo término del lado derecho de la **Ecuación (4.9)**, respectivamente, se obtiene:





$$\begin{aligned}
 \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_j \left[\sum_i m_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \right\} \right] \delta q_j, \\
 &= \sum_j \left[\sum_i m_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial q_j} \right\} \right] \delta q_j. \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

En el último paso se tuvo en cuenta la forma en que se deriva el producto escalar entre dos vectores iguales (ver **Capítulo 1**):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v^2}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i), \\
 &= \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \cdot \vec{v}_i + \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}, \\
 &= 2 \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j},
 \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \cdot \vec{v}_i.$$

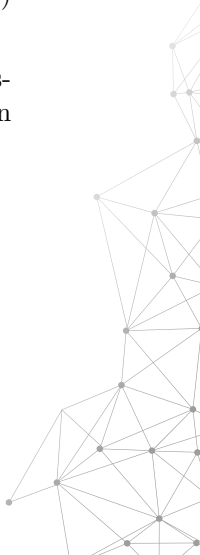
Finalmente, teniendo en cuenta que la energía cinética T está dada por $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$, la **Ecuación (4.11)**, correspondiente al segundo término de la **Ecuación (4.3)**, se transforma en

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j. \quad (4.12)$$

Sustituyendo las **Ecuaciones (4.7)** y **(4.12)** en la **Ecuación (4.3)**, se obtiene *el principio de D'Alembert en coordenadas generalizadas*:

$$\sum_j \left[Q_j - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0. \quad (4.13)$$

Para sistemas *holónomos* se cumple que las q_j (y, por lo tanto, los desplazamientos virtuales) son *independientes*, de tal manera que en la ecuación anterior los coeficientes de δq_j se anulan por separado:





$$Q_j - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} = 0. \quad (4.14)$$

Las ecuaciones anteriores reciben el nombre de *Ecuaciones de Lagrange*. Estas ecuaciones dan *otra alternativa* para hallar las fuerzas generalizadas Q_j :

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}. \quad (4.15)$$

Por otra parte, si el sistema es *conservativo*, las fuerzas externas derivan de un potencial escalar $U = U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t)$ de la forma $\vec{F}_i^{(e)} = -\nabla_i U$ y la fuerza generalizada, dada por la **Ecuación (4.8)**, es:

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \nabla_i U \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial U}{\partial q_j}.$$

Así, se muestra que para un sistema *conservativo*, las fuerzas generalizadas están dadas por

$$Q_j = - \frac{\partial U}{\partial q_j}. \quad (4.16)$$

Con este resultado las ecuaciones de Lagrange quedan como:

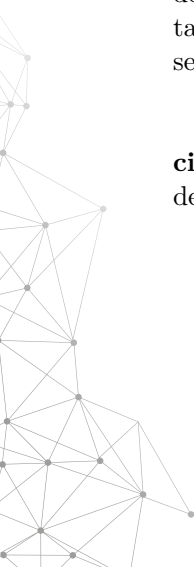
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_j} = 0. \quad (4.17)$$

Ya que U no depende de las velocidades generalizadas, $\partial U / \partial \dot{q}_j = 0$, y se llega que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0. \quad (4.18)$$

donde $L = T - U$ es el *lagrangiano* del sistema. Las ecuaciones anteriores también se conocen como *Ecuaciones de Lagrange* y se aplican a sistemas conservativos.

Nota. Las fuerzas generalizadas se pueden obtener a partir de las **Ecuaciones (4.8)**, **(4.15)** y **(4.16)**. La conveniencia de la aplicación de cada una de ellas en un problema específico depende de las características del problema.





4.2.4. Energía potencial dependiente de la velocidad

Supongamos que la energía potencial depende de las coordenadas y las velocidades generalizadas ($U = U(q_j, \dot{q}_j)$) y que la fuerza generalizada está dada por:

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right). \quad (4.19)$$

En este caso la **Ecuación (4.14)** se transforma en

$$-\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} = 0, \quad (4.20)$$

de donde se obtiene, nuevamente

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (4.21)$$

con $L = T - U$. Por lo tanto, las ecuaciones de Lagrange dadas por la **Ecuación (4.18)** se aplican no solo a sistemas conservativos sino también a sistemas cuyas fuerzas generalizadas estén dadas por la **Expresión (4.19)**.

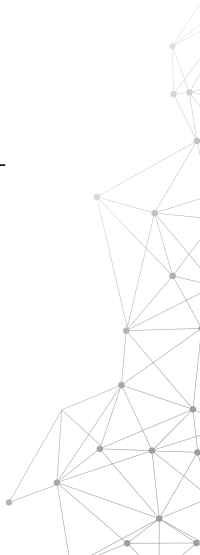
Ejercicio

4.7 Dé un ejemplo de un sistema físico en el que se cumplan las **Ecuaciones (4.19)**. Escriba explícitamente la expresión para la fuerza generalizada Q_j .

4.3. Principio de Hamilton y ecuaciones de Lagrange

4.3.1. Algunos resultados del cálculo de variaciones

Sea $f = f(y, y'; x)$ una *funcional* (es una función cuyas variables son funciones), donde x sea la variable independiente, $y = y(x)$ y $y' = \frac{dy}{dx}$.





En cálculo de variaciones se plantea el siguiente problema: Dada la funcional $f = f(y(x), y'(x); x)$, encontrar el camino $y = y(x)$ tal que la integral curvilínea

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x); x) dx, \quad (4.22)$$

con x_1 y x_2 fijos, tenga un valor *estacionario* (extremal). Esto es equivalente a exigir que $\delta J = 0$:

$$\delta J = \delta \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x); x) dx = 0. \quad (4.23)$$

La solución al problema mencionado conduce a las **Ecuaciones de Euler-Lagrange**:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (4.24)$$

A continuación se presenta la respectiva demostración. Consideremos una familia de curvas $Y(\alpha, x)$ vecinas a $y(x)$ construida por la siguiente representación paramétrica:

$$Y(\alpha, x) = y(x) + \alpha \eta(x), \quad (4.25)$$

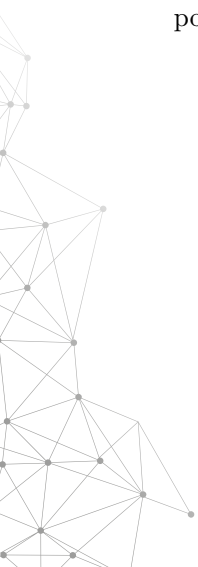
donde $\eta(x)$ es una función que tiene primera derivada continua, α es un parámetro, $Y(0, x) = y(x)$. Se exige que todas las curvas tengan la misma imagen en los extremos x_1 y x_2 . Esto es: $Y(\alpha, x_1) = y(x_1)$ y $Y(\alpha, x_2) = y(x_2)$, lo cual implica $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$.

Sustituyendo a $y(x)$ por $Y(\alpha, x)$ en la funcional, la integral J queda así:

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(Y(\alpha, x), Y'(\alpha, x); x) dx,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_1}^{x_2} f(Y(\alpha, x), Y'(\alpha, x); x) dx, \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{\partial Y'}{\partial \alpha} \right) dx, \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \eta + \frac{\partial f}{\partial Y'} \eta' \right) dx, \end{aligned} \quad (4.26)$$





donde $\frac{\partial Y}{\partial \alpha} = \eta$. Además, $Y' = y' + \alpha \eta'$. De aquí se encuentra que $\frac{\partial Y'}{\partial \alpha} = \eta'$.

El segundo término de la integral en la **Ecuación (4.26)** se puede integrar por partes de la siguiente forma:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial Y'} \eta' dx = \frac{\partial f}{\partial Y'} \eta \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial Y'} \right) \eta dx.$$

El primer término del lado derecho de la ecuación anterior se anula al evaluarlo en los dos extremos ya que $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Por lo tanto,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial Y'} \eta' dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial Y'} \right) \eta dx.$$

Así, la **Ecuación (4.26)** se transforma en:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \eta - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial Y'} \right) \eta \right) dx, \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial Y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial Y'} \right) \right] \eta dx. \end{aligned}$$

Como $\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = 0$ para un extremal y η es función arbitraria, se concluye que el integrando de la ecuación anterior se anula en $\alpha = 0$. Es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (4.27)$$

De esta manera, se obtiene la *ecuación de Euler-Lagrange*. Se debe tener en cuenta que en esta ecuación aparece $y(x)$ y no $Y(\alpha, x)$.

Una explicación más rigurosa para llegar a la ecuación de Euler-Lagrange se obtiene a partir del Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones (ver la **Actividad Complementaria 1** al final de este capítulo)

Si $f = f(y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n; x) = f(y_i, y'_i; x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, se obtienen n ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.28)$$





Segunda forma de la ecuación de Euler-Lagrange.

A continuación se obtendrá otra forma de la ecuación de Euler-Lagrange. A partir de la funcional $f = f(y(x), y'(x); x)$ se halla $\frac{df}{dx}$:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x}, \\ &= y' \frac{\partial f}{\partial y} + y'' \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial x}.\end{aligned}\quad (4.29)$$

El segundo término del lado derecho de la ecuación anterior se obtiene de la derivada del siguiente producto:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) &= y'' \frac{\partial f}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right), \\ y'' \frac{\partial f}{\partial y'} &= \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right).\end{aligned}$$

A continuación se sustituirá este término en la **Ecuación 4.29**:

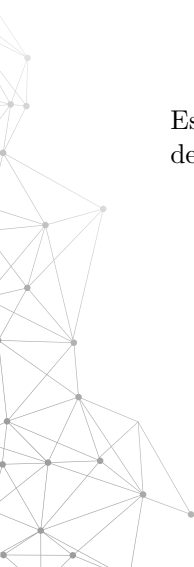
$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= y' \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{\partial f}{\partial x}, \\ \frac{df}{dx} - \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) &= y' \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right\} + \frac{\partial f}{\partial x}, \\ \frac{d}{dx} \left(f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) &= y' \{0\} + \frac{\partial f}{\partial x},\end{aligned}\quad (4.30)$$

donde se utilizó la ecuación de Euler-Lagrange en el primer término del lado derecho de la ecuación. Así, se llega a

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left(f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (4.31)$$

Esta expresión se conoce como *segunda forma de la ecuación de Euler-Lagrange*. Es muy útil cuando la funcional no depende explícitamente de la variable independiente; en este caso, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, y se llega a

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = \text{constante}. \quad (4.32)$$





Ejercicios

4.8 Demostrar que la distancia más corta entre dos puntos de un plano es una línea recta. Sugerencia: en este caso, la funcional se obtiene de

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \\ s &= \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx, \\ s &= \int \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx, \\ s &= \int f(y, z, y', z'; x) dx, \end{aligned}$$

donde $f(y, z, y', z'; x) = (1 + y'^2 + z'^2)^{1/2}$.

4.9 Demostrar que la geodésica sobre la superficie de un cilindro circular recto es un segmento de hélice. Sugerencia: escribir el elemento ds en coordenadas cilíndricas.

4.10 Demostrar que la geodésica sobre una esfera es un círculo. Sugerencia: escribir el elemento ds en coordenadas esféricas.

Nota. Una geodésica es la línea que representa la distancia más corta entre dos puntos de una superficie.

Ejemplo 4.5

Asuma que $f = f(y, y', y''; x)$, donde $y' = \frac{dy}{dx}$ y $y'' = \frac{dy'}{dx}$. Demostrar que en este caso, la ecuación correspondiente de Euler-Lagrange es:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) = 0. \quad (4.33)$$





Solución.

Consideremos una familia de curvas $Y(\alpha, x)$ vecinas a $y(x)$ construida por la siguiente representación paramétrica:

$$\begin{aligned} Y(\alpha, x) &= y(x) + \alpha \eta(x), \\ Y'(\alpha, x) &= y'(x) + \alpha \eta'(x), \\ Y''(\alpha, x) &= y''(x) + \alpha \eta''(x), \end{aligned}$$

donde $\eta(x)$ y su primera derivada son funciones arbitrarias continuas, α es un parámetro y $Y(0, x) = y(x)$. Además, se exige que todas las curvas tengan la misma imagen en los extremos x_1 y x_2 . Es decir, $Y(\alpha, x_1) = y(x_1)$ y $Y(\alpha, x_2) = y(x_2)$. Esto implica que $\eta(x_1) = 0$ y $\eta(x_2) = 0$.

Sustituyendo a $y(x)$ por $Y(\alpha, x)$ en la integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), y''(x); x) dx,$$

se obtiene:

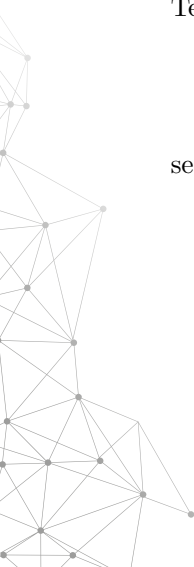
$$\begin{aligned} J(\alpha) &= \int_{x_1}^{x_2} f(Y(\alpha, x), Y'(\alpha, x), Y''(\alpha, x); x) dx, \\ \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_1}^{x_2} f(Y(\alpha, x), Y'(\alpha, x), Y''(\alpha, x); x) dx, \\ \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{\partial Y'}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial Y''} \frac{\partial Y''}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) dx. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0; \quad \frac{\partial Y}{\partial \alpha} = \eta; \quad \frac{\partial Y'}{\partial \alpha} = \eta'; \quad \frac{\partial Y''}{\partial \alpha} = \eta'',$$

se obtiene

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \eta + \frac{\partial f}{\partial Y'} \eta' + \frac{\partial f}{\partial Y''} \eta'' \right) dx. \quad (4.34)$$





La segunda integral se hace por partes definiendo $u = \frac{\partial f}{\partial Y'}$ y $dv = d\eta$, de tal forma que se pueda aplicar la relación $\int u dv = uv - \int v du$ para obtener:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{d\eta}{dx} dx &= \frac{\partial f}{\partial Y'} \eta \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial Y'} \right) \eta dx, \\ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{d\eta}{dx} dx &= - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial Y'} \right) \eta dx, \end{aligned} \quad (4.35)$$

porque $\eta(x_1) = 0$ y $\eta(x_2) = 0$.

Para la tercera integral que está en el lado derecho del signo igual en la **Ecuación (4.34)** se hace $u = \frac{\partial f}{\partial Y''}$ y $dv = d\eta'$. Así, esta integral da:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial Y''} \eta'' dx &= \frac{\partial f}{\partial Y''} \eta' \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial Y''} \right) \eta' dx, \\ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial Y''} \eta'' dx &= - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial Y''} \right) \eta' dx, \end{aligned} \quad (4.36)$$

porque $\eta'(x_1) = 0$ y $\eta'(x_2) = 0$. La integral que está en el lado derecho de la ecuación anterior también se hace por partes haciendo $u = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial Y''} \right)$ y $dv = d\eta$, obteniendose:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial Y''} \eta'' dx &= - \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial Y''} \right) \eta \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y''} \right) \eta dx \right], \\ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial Y''} \eta'' dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y''} \right) \eta dx. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Sustituyendo las **Ecuaciones (4.35)** y **(4.37)** en la **Ecuación (4.34)** se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial Y} \eta - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial Y'} \right) \eta + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y''} \right) \eta \right] dx, \\ \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial Y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial Y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y''} \right) \right] \eta dx. \end{aligned} \quad (4.38)$$





Como $\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = 0$ para un extremal y η es función arbitraria, se concluye que el integrando de la ecuación anterior se anula en $\alpha = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) = 0.$$

Nota. A partir del análisis de la estructura de las ecuaciones de Euler-Lagrange para las funcionales $f(y, y'; x)$ y $f(y, y', y''; x)$, dadas por las **Ecuaciones (4.27) y (4.33)**, respectivamente, se podría demostrar que dichas ecuaciones presentan un patrón de recurrencia en la alternancia de los signos dada por $(-1)^p$, con $p = 0, 1, 2, \dots$, y en el orden de las derivadas $\frac{d^n}{dx^n}$ con $n = 0, 1, 2, \dots$ y $\frac{\partial f}{\partial y^{(m)}}$ con $m = 1, 2, \dots$

Ejemplo 4.6

Suponga que la funcional f es el lagrangiano L dado por:

$$L(y, \dot{y}, \ddot{y}; t) = -\frac{1}{2}m\dot{y}\ddot{y} - \frac{1}{2}ky^2.$$

(a) ¿Qué tipo de movimiento describe este lagrangiano? **(b)** ¿Se afecta la ecuación de movimiento si al lagrangiano dado se le agrega el término $ky\dot{y}$?

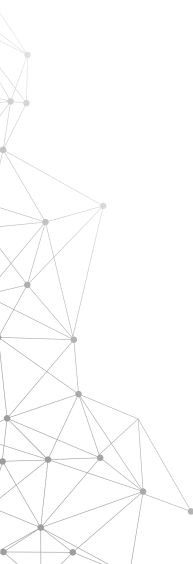
Solución.

(a) Para el caso en que $f = L$, entonces $x \leftrightarrow t$, $y \leftrightarrow q$, $y' \leftrightarrow \dot{q}$ y $y'' \leftrightarrow \ddot{q}$, y la correspondiente ecuación de Euler-Lagrange es:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) = 0. \quad (4.39)$$

Las derivadas requeridas son:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{1}{2}m\ddot{y} - ky; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \ddot{y}} = -\frac{1}{2}my \rightarrow \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{y}} \right) = -\frac{1}{2}m\ddot{y}$$





Al sustituir estas derivadas en la ecuación de Euler-Lagrange se obtiene:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}m\ddot{y} - ky - \frac{1}{2}m\ddot{y} &= 0, \\ m\ddot{y} + ky &= 0, \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y &= 0, \end{aligned}$$

con $\omega_0^2 = k/m$. Por lo tanto, el lagrangiano dado describe un oscilador libre.

(b) Si al lagrangiano anterior se le agrega el término $ky\dot{y}$ se obtiene la misma ecuación de movimiento.

Nota. Algunos autores han estudiado la variación de la aceleración en función del tiempo ($d\vec{a}/dt = d^3\vec{r}/dt^3$) y las posibles aplicaciones en problemas más complejos. La cantidad asociada a la variación de la aceleración en el tiempo se llama *jerk*. Al trabajar en el formalismo lagrangiano se obtendrían lagrangianos con derivadas temporales de las coordenadas generalizadas superiores a uno.

4.3.2. El principio de Hamilton

Para un sistema en el cual todas las fuerzas, excepto las de ligadura, se obtienen de un potencial escalar generalizado que puede depender de las posiciones, las velocidades y el tiempo (se le llama sistema **monógeno**), la trayectoria que sigue el sistema es aquella que minimiza la **integral de acción**:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i; t) dt = 0, \quad (4.40)$$

donde $L = T - U$ es el lagrangiano del sistema. Este principio fue propuesto por W. Hamilton en 1835.

4.3.3. Deducción de las ecuaciones de Lagrange a partir del principio de Hamilton

Al comparar las **Ecuaciones (4.23)** y **(4.40)** se observa que el principio de Hamilton es equivalente al problema formulado en cálculo de variaciones.





Por lo tanto, si se aplica el resultado del cálculo de variaciones (ver **Ecuación (4.24)**), haciendo los siguientes cambios de variables: $x \leftrightarrow t$, $y_i \leftrightarrow q_i$, $y'_i \leftrightarrow \dot{q}_i$ y $f \leftrightarrow L$, el principio de Hamilton conduce a las *ecuaciones de Lagrange*:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.41)$$

Finalmente, se resalta que en este capítulo se han utilizado dos caminos para llegar a las ecuaciones de Lagrange: **(a)** A partir del *principio de D'Alembert* (camino *diferencial*) y **(b)** A partir del *principio de Hamilton* (camino *integral*):

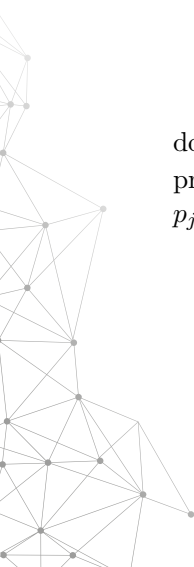
$$\text{Principio de D'Alembert} \rightarrow \boxed{\text{Ecuaciones de Lagrange}} \leftarrow \text{Principio de Hamilton}$$

Sin embargo, estos dos caminos no son los únicos enfoques para obtener las ecuaciones de Lagrange. En la **Actividad Complementaria 4** de este capítulo, se relacionan algunas referencias en las cuales se obtienen las ecuaciones de Lagrange por medio de otros métodos.

Coordenada cíclica. Una coordenada es *cíclica* o *ignorable* si no aparece explícitamente en el Lagrangiano. De esta manera, si q_j es cíclica, entonces, $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ y existe una cantidad que se conserva:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) &= 0, \\ 0 - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \equiv p_j &= \text{constante}, \end{aligned}$$

donde $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ se denomina *momento canónico conjugado*. Resumiendo: siempre que exista una coordenada cíclica q_j , hay un momento canónico conjugado p_j que se conserva.





Fuerza generalizada y momento canónico conjugado. Si $T = T(\dot{q}_j)$ y $U = U(q_j)$, se tiene que $\frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j}$ y $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$. Por lo tanto, una fuerza generalizada que dependa de un potencial escalar generalizado (ver **Ecuación (4.19)**) transforma de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Q_j &= -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right), \\ &= -\frac{\partial U}{\partial q_j} + 0, \\ &= \frac{\partial L}{\partial q_j}, \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right), \\ Q_j &= \dot{p}_j. \end{aligned}$$

A partir de este resultado se concluye que si q_j es una coordenada cíclica, p_j es constante y $Q_j = 0$. Por lo tanto, *la fuerza generalizada asociada a una coordenada cíclica es cero.*

Por otra parte, a partir de la **Ecuación (4.15)** se obtiene:

$$\begin{aligned} Q_j &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}, \\ Q_j &= \frac{dp_j}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_j}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\dot{p}_j = Q_j + \frac{\partial T}{\partial q_j}. \quad (4.42)$$

Equivalencia entre las ecuaciones de Lagrange y las ecuaciones de Newton. Consideremos un sistema conservativo conformado por una sola partícula. Seleccionando como coordenadas generalizadas a las coordenadas





cartesianas, la ecuación de Lagrange es:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) &= 0, \quad i = 1, 2, 3. \\ \frac{\partial(T - U)}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{x}_i} \right) &= 0, \quad i = 1, 2, 3,\end{aligned}$$

Como $T = T(\dot{x}_i)$ y $U = U(x_i)$, entonces, $\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0$ y $\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} = 0$. Con estos resultados, la ecuación de Lagrange se transforma en:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) &= 0, \\ -\frac{\partial U}{\partial x_i} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right), \\ F_i &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right).\end{aligned}$$

Desarrollando la última derivada se obtiene:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} m \dot{x}_j^2 \right) = m \dot{x}_i = p_i;$$

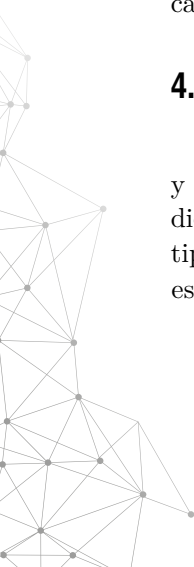
por lo tanto:

$$F_i = \dot{p}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.43)$$

De esta manera, se obtienen las ecuaciones de Newton partiendo de las ecuaciones de Lagrange. Es importante resaltar que esta equivalencia se ha obtenido asumiendo que las coordenadas generalizadas son las coordenadas cartesianas.

4.4. Ecuaciones de Lagrange y multiplicadores de Lagrange

Para obtener las ecuaciones de Lagrange por los principios de D'Alembert y Hamilton, se asumió, en ambos casos, que las coordenadas eran independientes entre sí. Sin embargo, cuando se tienen ligaduras holónomas o cierto tipo de ligaduras no holónomas, las coordenadas no son independientes. En este caso, se introducen los multiplicadores de Lagrange.





Supongamos que el sistema se describe por medio de dos coordenadas y_1, y_2 y que estas coordenadas están relacionadas por la ligadura $f(y_i; t) = 0, i = 1, 2$. Considerando las siguientes familias paramétricas:

$$Y_i(\alpha, t) = y_i(t) + \alpha \eta_i(t), \quad i = 1, 2.$$

El principio de Hamilton está dado por:

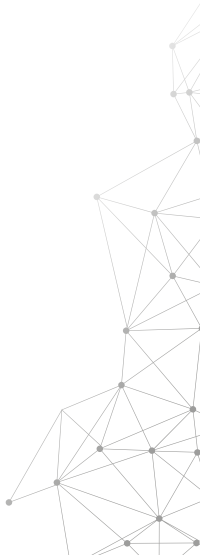
$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{\partial L}{\partial Y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_i} \right) \frac{\partial Y_i}{\partial \alpha} \right] dt = 0, \\ \delta J &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial Y_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_1} \right) \frac{\partial Y_1}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial L}{\partial Y_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_2} \right) \frac{\partial Y_2}{\partial \alpha} \right] dt = 0, \\ \delta J &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial Y_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_1} \right) \eta_1 + \left(\frac{\partial L}{\partial Y_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_2} \right) \eta_2 \right] dt = 0. \end{aligned}$$

Las variaciones $\frac{\partial Y_1}{\partial \alpha} = \eta_1$ y $\frac{\partial Y_2}{\partial \alpha} = \eta_2$ ya no son independientes por la ligadura. Veamos:

$$\begin{aligned} df(Y_1, Y_2; t) &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial Y_1} \frac{\partial Y_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial Y_2} \frac{\partial Y_2}{\partial \alpha} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial Y_1} \eta_1 + \frac{\partial f}{\partial Y_2} \eta_2 &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial Y_1} \eta_1 &= -\frac{\partial f}{\partial Y_2} \eta_2, \\ \frac{\eta_1}{\eta_2} &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial Y_2}}{\frac{\partial f}{\partial Y_1}}. \end{aligned}$$

Ahora, se sustituye este resultado en la expresión que se traía para δJ :

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial Y_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_1} \right) \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial Y_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_2} \right) \right] \eta_2 dt = 0, \\ \delta J &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial Y_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_1} \right) \left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial Y_2}}{\frac{\partial f}{\partial Y_1}} \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial Y_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_2} \right) \right] \eta_2 dt = 0. \end{aligned}$$





Esta expresión contiene como factor únicamente a η_2 , sobre la cual no hay restricción. Por lo tanto, la cantidad que está dentro del parentésis rectangular en la última expresión, con $(\delta J)_{\alpha=0}$, es cero:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial y_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) \left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial y_2}}{\frac{\partial f}{\partial y_1}} \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial y_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) = 0,$$

o equivalentemente,

$$\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial y_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial y_1} \right)^{-1}}_{=-\lambda(t)} = \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial y_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial y_2} \right)^{-1}}_{=-\lambda(t)}. \quad (4.44)$$

Obsérvese que el lado izquierdo de la ecuación anterior incluye únicamente derivadas de L y f con respecto a y_1 y $\dot{y}_1$, mientras que el lado derecho incluye solo derivadas respecto a y_2 y $\dot{y}_2$. Como $y_{1,2}$ son funciones que dependen de t , entonces, los dos lados de la **Ecuación (4.44)** son iguales a una función que depende de t , la cual se ha representado por $-\lambda(t)$. En la literatura, a $\lambda(t)$ se le conoce como *multiplicador de Lagrange*.

De esta manera se llega a las ecuaciones de Lagrange con multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial y_1} &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial y_2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Ahora se tienen tres incógnitas: y_1 , y_2 y λ , pero también se tienen tres ecuaciones: las dos **Ecuaciones (4.45)** y la ligadura $f(y_1, y_2; t) = 0$.

En general, si el sistema se describe por $y_1, \dots, y_n$ coordenadas y hay m ligaduras $f_k(y_i) = 0$, con $i = 1, \dots, n$ y $k = 1, \dots, m$, entonces hay m multiplicadores de Lagrange λ_k (uno por cada ligadura). En total se tendrán $n + m$ incógnitas ($y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$) con igual número de ecuaciones: n ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) + \sum_{k=1}^m \lambda_k(t) \frac{\partial f_k}{\partial y_i} = 0; \quad i = 1, \dots, n; \quad (4.46)$$





y m ligaduras $f_k = 0$.

Los multiplicadores de Lagrange corresponden a la *fuerza de ligadura* y la *fuerza generalizada de ligadura* (Q_i) está dada por:

$$Q_i = \sum_{k=1}^m \lambda_k(t) \frac{\partial f_k}{\partial y_i}; \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.47)$$

Considerando la ligadura $f_k(y_i; t) = 0$, obtenemos $\frac{df_k}{dt}$,

$$\frac{df_k}{dt} = \sum_i \frac{\partial f_k}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

De acuerdo con la ecuación anterior, las ecuaciones de Lagrange con multiplicadores de Lagrange también se pueden aplicar a sistemas con ligaduras que tengan la forma:

$$\sum_i \beta_{ki} \dot{y}_i + \epsilon = 0, \quad (4.48)$$

con $\beta_{ki} = \frac{\partial f_k}{\partial y_i}$ y $\epsilon = \frac{\partial f}{\partial t}$.

4.5. Aplicaciones del formalismo lagrangiano

Ejemplo 4.7

Hallar las ecuaciones de movimiento para una partícula de masa m sometida únicamente a la acción de la fuerza gravitacional de la tierra, mediante el formalismo lagrangiano (ver **Figura 4.4**) y obtener las fuerzas generalizadas.

Solución.

Asumamos que la partícula se mueve en el plano $x - y$. Previamente se mencionó que este sistema tiene dos grados de libertad. Por lo tanto, se requieren dos coordenadas generalizadas. Sean $\{x, y\}$ estas coordenadas. La posición y la velocidad de la partícula en cualquier instante están dadas por el punto (x, y) y por $(\dot{x}, \dot{y})$, respectivamente.





La energía cinética de la partícula es $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ y la energía potencial está dada por $mg y$. Así, el lagrangiano para este sistema es:

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}; t) = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy. \quad (4.49)$$

Como hay dos coordenadas generalizadas, entonces, hay dos ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0, \quad (4.50)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = 0. \quad (4.51)$$

Haciendo las respectivas derivadas, se obtiene:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}; \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -mg; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}.$$

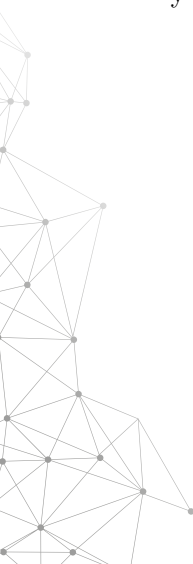
La coordenada x , en este caso, es cíclica porque no aparece explícitamente en el lagrangiano.

Reemplazando las derivadas respectivas en las ecuaciones de Lagrange, se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) &= 0, \\ m\ddot{x} &= 0, \\ \ddot{x} &= 0; \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -mg - \frac{d}{dt}(m\dot{y}) &= 0, \\ g + \ddot{y} &= 0, \\ \ddot{y} &= -g. \end{aligned}$$





De esta manera, la aceleración en x es cero (movimiento uniforme) y la aceleración en y es constante (movimiento uniformemente acelerado).

Como hay dos grados de libertad, hay dos fuerzas generalizadas: Q_x y Q_y . A continuación se obtendrán las fuerzas generalizadas por medio de dos caminos diferentes:

(a) Utilizando la **Ecuación (4.8)**:

$$Q_x = \vec{F}^{(e)} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \quad y \quad Q_y = \vec{F}^{(e)} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}.$$

Teniendo en cuenta que $\vec{F}^{(e)} = (0, -mg)$ y $\vec{r} = (x, y)$, se obtiene:

$$Q_x = (0, -mg) \cdot (1, 0) \quad y \quad Q_y = (0, -mg) \cdot (0, 1);$$

así, $Q_x = 0$ y $Q_y = -mg$. La fuerza generalizada asociada a la coordenada cíclica x es cero.

(b) Utilizando la **Ecuación (4.16)** ya que el sistema es conservativo: en este caso

$$Q_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad y \quad Q_y = -\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Como $U = mgy$, entonces, $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial U}{\partial y} = mg$. Por lo tanto, $Q_x = 0$ y $Q_y = -mg$.

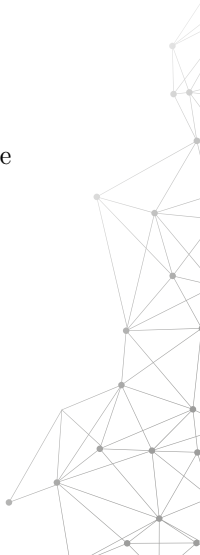
Como coordenadas generalizadas también se pueden seleccionar a las coordenadas polares $\{r, \theta\}$, donde $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$, o equivalentemente, $r^2 = x^2 + y^2$ y $\tan \theta = y/x$.

Derivando respecto al tiempo a x y a y se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta. \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado las expresiones anteriores y, luego, sumándolas se obtiene la velocidad en coordenadas polares:

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}) \cdot (\dot{x}, \dot{y}) = (\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2.$$





De esta manera, el lagrangiano en coordenadas polares es

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr \sin \theta. \quad (4.52)$$

La ecuación de Lagrange para la coordenada r es

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = 0;$$

y la ecuación de Lagrange para la coordenada θ es

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0.$$

Al efectuar las derivadas correspondientes, las ecuaciones de Lagrange para r y θ son, respectivamente,

$$r\dot{\theta}^2 - \ddot{r} - g \sin \theta = 0, \quad (4.53)$$

$$-gr \cos \theta - 2r\dot{r}\dot{\theta} - r^2\ddot{\theta} = 0. \quad (4.54)$$

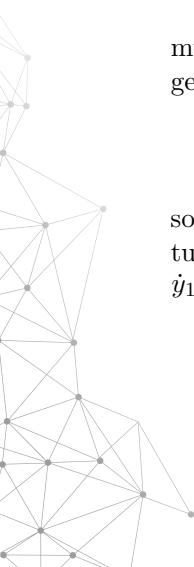
Este último par de ecuaciones diferenciales están acopladas y, por tanto, son más difíciles de resolver que las ecuaciones obtenidas trabajando con coordenadas cartesianas. Esta dificultad se da porque la energía potencial depende de ambas coordenadas polares, mientras que en coordenadas cartesianas depende solo de y .

Ejemplo 4.8

Hallar mediante el formalismo lagrangiano la aceleración con la cual se mueven las masas en una máquina de Atwood (**Figura 4.1**) y las fuerzas generalizadas.

Solución.

El sistema tiene un grado de libertad. La posición de las masas m_1 y m_2 son y_1 y y_2 , respectivamente. La ligadura es $y_1 + y_2 = l$, donde l es la longitud de la cuerda. Al derivar respecto al tiempo a esta expresión, se obtiene $\dot{y}_1 = -\dot{y}_2 \rightarrow \dot{y}_1^2 = \dot{y}_2^2$.





La energía cinética del sistema es

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}_1^2.$$

En este paso, también se puede seleccionar como coordenada generalizada a y_2 . Por otra parte, la energía potencial del sistema es

$$U = -m_1gy_1 - m_2gy_2 = -m_1gy_1 - m_2g(l - y_1) = (m_2 - m_1)gy_1 - m_2gl.$$

Así, el lagrangiano está dado por

$$L(y_1, \dot{y}_1; t) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}_1^2 - (m_2 - m_1)gy_1 + m_2gl. \quad (4.55)$$

La ecuación de Lagrange es

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) = 0. \quad (4.56)$$

Las derivadas requeridas son:

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = -(m_2 - m_1)g; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = (m_1 + m_2)\dot{y}_1.$$

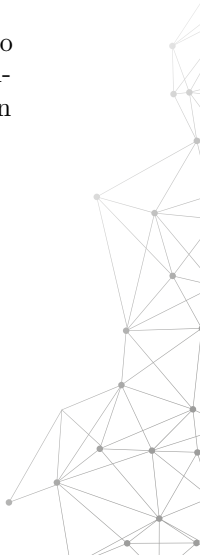
Continuando con la ecuación de Lagrange se obtiene

$$-(m_2 - m_1)g - (m_1 + m_2)\ddot{y}_1 = 0.$$

Por lo tanto, la aceleración del sistema es

$$\ddot{y}_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) g. \quad (4.57)$$

Se observa que la aceleración es constante. Es importante notar que el término m_2gl (constante) presente en el lagrangiano no contribuye. Es decir, el lagrangiano se puede ver como $L = L_0 + cte$ de tal forma que se puede trabajar con L_0 sin afectar las ecuaciones de movimiento.





En cuanto a las fuerzas generalizadas, solo hay una porque el número de coordenadas generalizadas es igual al número de grados de libertad. Como el sistema es conservativo, la fuerza generalizada asociada a la coordenada y_1 , Q_{y_1} , se puede hallar por medio de la **Ecuación (4.16)**:

$$Q_{y_1} = -\frac{\partial U}{\partial y_1} = (m_1 - m_2)g.$$

Actividad complementaria. Resolver el problema de la máquina de Atwood utilizando las ecuaciones de Lagrange con multiplicadores de Lagrange aplicando las **Ecuaciones (4.46)**. Obtener los multiplicadores de Lagrange y las fuerzas generalizadas de ligadura dadas por las **Ecuaciones (4.47)**.

Ejemplo 4.9

Hallar mediante el formalismo lagrangiano la ecuación de movimiento para una partícula oscilando libremente atada a un resorte de constante elástica k (ver **Figura 2.5**).

Solución.

El sistema tiene un grado de libertad, por lo tanto, se puede describir por medio de una coordenada generalizada. Sea x esta coordenada. La energía cinética de la masa es $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ y la energía potencial es $U = \frac{1}{2}kx^2$. El lagrangiano es:

$$L(x, \dot{x}; t) = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2. \quad (4.58)$$

Solo hay una ecuación de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0. \quad (4.59)$$

Reemplazando las derivadas se obtiene:

$$\begin{aligned} -kx - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) &= 0, \\ m\ddot{x} + kx &= 0, \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \end{aligned}$$

donde $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. De esta manera, se ha llegado a la misma ecuación de movimiento que se obtuvo en el **Capítulo 3**.





Ejemplo 4.10

Hallar a través del formalismo lagrangiano la ecuación de movimiento para el péndulo simple de longitud l (ver **Figura 3.1**).

Solución.

El sistema tiene un sólo grado de libertad. Por lo tanto, se requiere una coordenada generalizada para describirlo. Sea θ , el ángulo de oscilación, esta coordenada. Ubicando el origen del sistema coordenado $X - Y$ en el punto de suspensión de la cuerda, la posición de la partícula está dada por el punto (x, y) . Estas coordenadas no son independientes por la ecuación de la ligadura. En función de la coordenada generalizada están dadas por

$$\begin{aligned} x &= l \sin \theta, & y &= -l \cos \theta, \\ \dot{x} &= l \dot{\theta} \cos \theta, & \dot{y} &= l \dot{\theta} \sin \theta, \\ \dot{x}^2 &= l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta, & \dot{y}^2 &= l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Así,

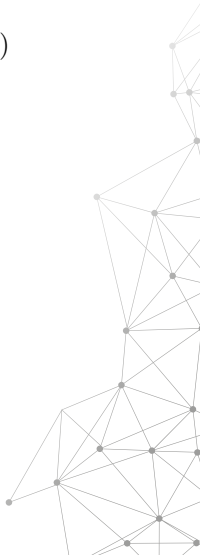
$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2, \\ &= l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta, \\ &= l^2 \dot{\theta}^2, \end{aligned}$$

por lo que el lagrangiano estará dado por

$$L = T - U = \frac{1}{2}mv^2 - mgy, \quad (4.60)$$

$$= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mg(-l \cos \theta), \quad (4.61)$$

$$= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta. \quad (4.62)$$





La ecuación de Lagrange es $\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right)$. Al hacer las derivadas se obtiene

$$-mgl \sin \theta - \frac{d}{dt}(ml^2 \dot{\theta}) = 0, \quad (4.63)$$

$$g \sin \theta + l \ddot{\theta} = 0, \quad (4.64)$$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0, \quad (4.65)$$

con $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$. Si se consideran oscilaciones pequeñas, tal que $\sin \theta \approx \theta$, se obtiene $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$, ecuación que también se obtuvo en el **Capítulo 3**.

Ejemplo 4.11

Disco que rueda sin deslizar sobre un plano inclinado. Considere un disco de masa M que rueda sin deslizarse sobre un plano inclinado como se muestra en la **Figura 4.5**. Usando el formalismo lagrangiano encuentre las ecuaciones de movimiento para la coordenada y del centro de masa del disco y para la coordenada angular θ .

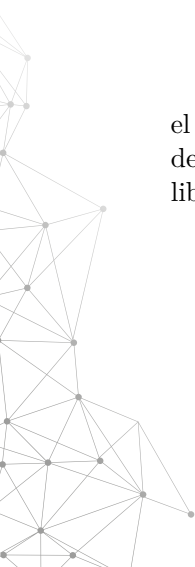
Solución.

Escribamos primero el lagrangiano asociado a este sistema. La energía cinética del disco consta de dos partes, una rotacional y otra de traslación del centro de masa, con lo que tenemos $T = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}^2$, y la energía potencial asociada al centro de masa del disco es $U = Mg(l - y) \sin \phi$, donde l es la longitud del plano inclinado. Así, el lagrangiano será:

$$L = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}^2 - Mg(l - y) \sin \phi. \quad (4.66)$$

Podemos hacer uso del hecho de que la distancia que recorre el disco sobre el plano inclinado está relacionada con la coordenada angular θ de rotación del disco mediante la siguiente expresión $y = r\theta$, para eliminar un grado de libertad y dejar el lagrangiano en términos de una sola variable así:

$$L = Mr^2\dot{\theta}^2 + Mgr\theta \sin \phi - Mgl \sin \phi. \quad (4.67)$$





El último término del lagrangiano es constante y no contribuye a las ecuaciones de Lagrange.

La ecuación de movimiento para la coordenada θ será:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 2Mr^2\ddot{\theta} - Mgr \sin \phi = 0, \quad (4.68)$$

de donde tenemos la ecuación de movimiento para la coordenada θ :

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{2r} \sin \phi. \quad (4.69)$$

Finalmente, para la coordenada del centro de masa, si usamos el hecho de que $\ddot{y} = r\ddot{\theta}$, tenemos:

$$\ddot{y} = \frac{g}{2} \sin \phi. \quad (4.70)$$

Ejemplo 4.12

Suponga que un bloque de masa m desliza sin fricción sobre un plano inclinado de masa M que, a su vez, resbala sin fricción sobre una superficie horizontal con aceleración constante (ver **Figura 4.6**). Obtener las ecuaciones de movimiento de este sistema por medio del formalismo lagrangiano y las fuerzas generalizadas.

Solución.

Observe que este problema es un caso especial del **Ejemplo 2.7**, resuelto a través del formalismo newtoniano. En primer lugar se determinará el número de grados de libertad para el sistema. Por una parte, el movimiento del plano inclinado se da en una dimensión. Si $\vec{R}$ es su vector posición, entonces, $\vec{R} = (X, Y, Z) = (X, 0, 0)$. Es decir, hay dos ligaduras: $Y = 0$ y $Z = 0$. Por otra parte, el movimiento del bloque m se da en dos dimensiones. Su vector posición



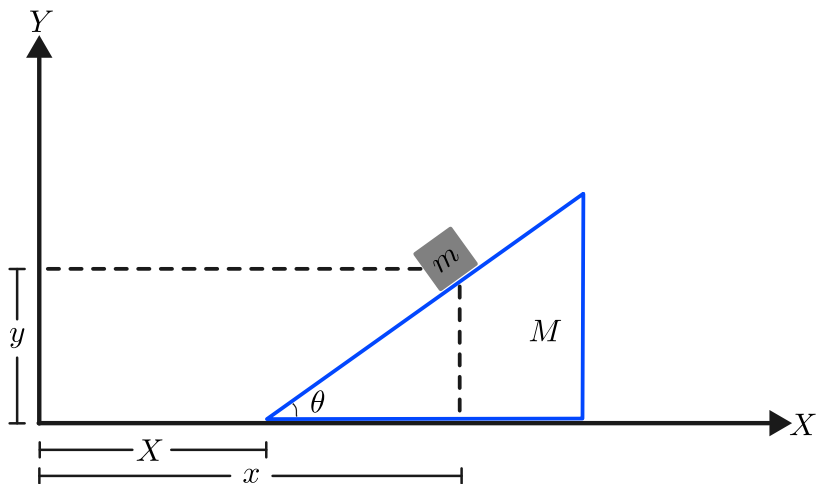


Figura 4.6: Bloque deslizando sobre plano inclinado con movimiento horizontal.

es $\vec{r} = (x, y, z) = (x, y, 0)$. Así, tenemos otra ligadura. Además las coordenadas x y y están relacionadas por la ligadura

$$\tan \theta = \frac{y}{x - X}.$$

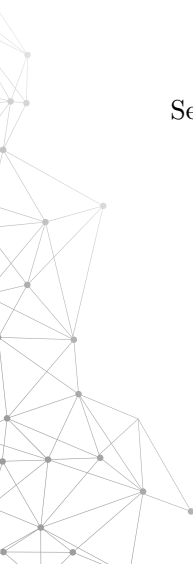
Por lo tanto, hay cuatro ligaduras:

$$\begin{aligned} Y &= 0, \\ Z &= 0, \\ z &= 0, \\ y &= (\tan \theta)(x - X). \end{aligned} \tag{4.71}$$

De esta manera, el número de grados de libertad es $3n - m = 3(2) - 4 = 2$. Seleccionaremos como coordenadas generalizadas a $\{q_1, q_2\} = \{x, X\}$.

El lagrangiano del sistema está dado por $L = T - U$:

$$L = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy.$$





Reemplazando a y y a $\dot{y} = (\tan \theta)(\dot{x} - \dot{X})$ en la expresión anterior se llega a:

$$L(x, X, \dot{x}, \dot{X}) = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m \left[(\sec^2 \theta)\dot{x}^2 + (\tan^2 \theta)\dot{X}^2 - 2(\tan^2 \theta)\dot{x}\dot{X} \right] - mg(\tan \theta)(x - X). \quad (4.72)$$

Las dos ecuaciones de Lagrange son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial X} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \right) &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Al realizar las derivadas que aparecen en las ecuaciones de Lagrange se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial X} &= mg \tan \theta, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} &= M\dot{X} + m(\tan^2 \theta)\dot{X} - m(\tan^2 \theta)\dot{x}, \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= -mg \tan \theta, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m(\sec^2 \theta)\dot{x} - m(\tan^2 \theta)\dot{X}. \end{aligned}$$

La sustitución de estas derivadas en las ecuaciones de Lagrange produce:

$$mg \tan \theta - M\ddot{X} - m(\tan^2 \theta)\ddot{X} + m(\tan^2 \theta)\ddot{x} = 0; \quad (4.73)$$

$$-mg \tan \theta - m(\sec^2 \theta)\ddot{x} + m(\tan^2 \theta)\ddot{X} = 0. \quad (4.74)$$

De la segunda ecuación se puede despejar a $\ddot{x}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (\sec^2 \theta)\ddot{x} &= (\tan^2 \theta)\ddot{X} - g \tan \theta, \\ \ddot{x} &= \frac{(\tan^2 \theta)\ddot{X} - g \tan \theta}{\sec^2 \theta}, \\ \ddot{x} &= (\sec^2 \theta)\ddot{X} - (\sec \theta)(\cos \theta)g. \end{aligned} \quad (4.75)$$





Sustituyendo a $\ddot{x}$ en la ecuación de Lagrange para X se llega a:

$$\begin{aligned} mg \tan \theta - M \ddot{X} - m(\tan^2 \theta) \ddot{X} + m(\tan^2 \theta) [(\sin^2 \theta) \ddot{X} - (\sin \theta)(\cos \theta)g] &= 0, \\ -\ddot{X} [M + m(\tan^2 \theta) - m(\tan^2 \theta)(\sin^2 \theta)] + mg \tan \theta - m(\tan^2 \theta)(\sin \theta)(\cos \theta)g &= 0, \\ -\ddot{X} [M + m(\tan^2 \theta)(1 - \sin^2 \theta)] + mg \tan \theta [1 - (\tan \theta)(\sin \theta)(\cos \theta)] &= 0, \\ -\ddot{X} [M + m \sin^2 \theta] + mg \tan \theta [1 - \sin^2 \theta] &= 0. \end{aligned}$$

Finalmente, la expresión para la aceleración del plano inclinado de masa M está dada por:

$$\ddot{X} = \left(\frac{m \sin \theta \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta} \right) g. \quad (4.76)$$

A continuación se reemplaza esta expresión en la **Ecuación (4.75)** para obtener la componente horizontal de la aceleración del bloque de masa m :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \sin^2 \theta \left[\frac{m \sin \theta \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta} \right] g - (\cos \theta)(\sin \theta)g, \\ \ddot{x} &= \frac{m(\sin^3 \theta)(\cos \theta) - (M + m \sin^2 \theta)(\cos \theta)(\sin \theta)}{M + m \sin^2 \theta} g. \end{aligned} \quad (4.77)$$

De esta manera se llega a:

$$\ddot{x} = - \left(\frac{M \cos \theta \sin \theta}{M + m \sin^2 \theta} \right) g. \quad (4.78)$$

Las fuerzas horizontales que actúan sobre el plano inclinado y el bloque son $M \ddot{X}$ y $m \ddot{x}$, respectivamente. Reemplazando a $\ddot{X}$ y $\ddot{x}$ por las **Ecuaciones (4.76)** y **(4.78)**, respectivamente, se verifica que

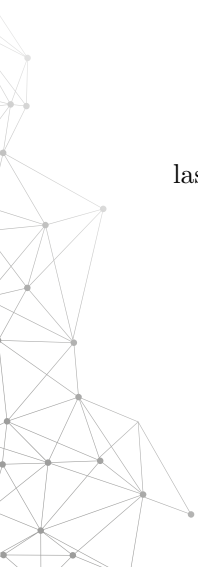
$$F_{\text{horizontal sobre el plano inclinado}} = -F_{\text{horizontal sobre el bloque}}.$$

Reemplazando a $\ddot{X}$ y $\ddot{x}$ en $\ddot{y} = (\tan \theta)(\ddot{x} - \ddot{X})$ obtenemos:

$$\ddot{y} = - \frac{(M + m) \sin^2 \theta}{M + m \sin^2 \theta} g. \quad (4.79)$$

La aceleración del bloque m está dada por $a_m = \sqrt{(\ddot{x} - \ddot{X})^2 + (\ddot{y})^2}$. Haciendo las sustituciones respectivas se obtiene:

$$a_m = \frac{(M + m) \sin \theta}{M + m \sin^2 \theta} g. \quad (4.80)$$





Las expresiones obtenidas para las aceleraciones $\ddot{X}$, $\ddot{x}$ y $\ddot{y}$ coinciden con los resultados presentados en el **Ejemplo 2.7**, considerando que la fuerza externa $\vec{F}$ es cero y que no hay fricción entre el bloque y el plano inclinado y entre la superficie horizontal y el plano inclinado.

La **Figura 4.7** muestra las aceleraciones obtenidas en función del ángulo del plano inclinado (θ). Se observa que $\ddot{X}$ y $\ddot{x}$ presentan un valor máximo y mínimo, respectivamente, que depende de los valores de las masas M y m .

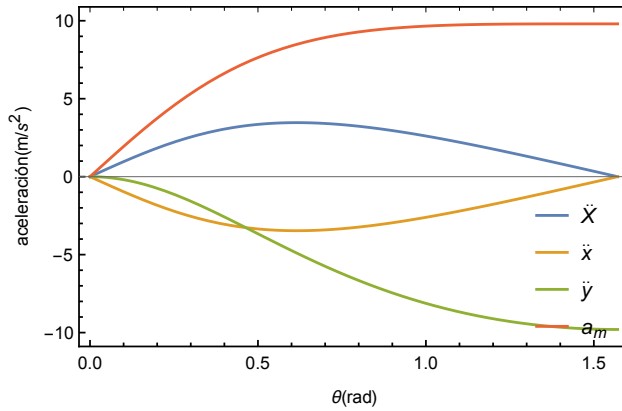
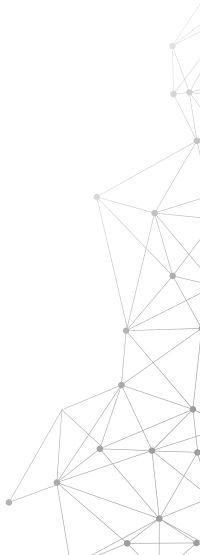


Figura 4.7: Aceleraciones $\ddot{X}$ (color azul), $\ddot{x}$ (color naranja), $\ddot{y}$ (color verde) y a_m (color ocre) en función del ángulo θ considerando $m = 1$ kg y $M = 1$ kg.

Teniendo en cuenta que el sistema es conservativo y que tiene dos grados de libertad, se concluye que hay dos fuerzas generalizadas:

$$Q_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -mg \tan \theta,$$

$$Q_X = -\frac{\partial U}{\partial X} = mg \tan \theta.$$





Ejercicio

4.11 Otro sistema de coordenadas que se puede utilizar para el bloque de masa m es uno donde el eje y sea perpendicular al plano inclinado y x este a lo largo del plano inclinado. Solucionar este problema utilizando este sistema de coordenadas para m .

Ejemplo 4.13

Una partícula de masa m sometida a la fuerza central $\vec{F} = -k\vec{r}$, donde r es la distancia entre la partícula y el origen, se mueve sobre la superficie de un cilindro de radio R (ver **Figura 4.8**). Describa el movimiento de esta partícula mediante el formalismo lagrangiano y obtenga las fuerzas generalizadas.

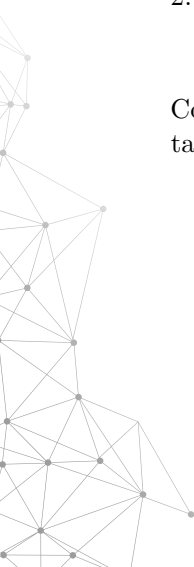
Solución.

Consideremos que la posición de la partícula esta dada por el vector $\vec{r} = (x, y, z)$. Como la partícula está obligada a moverse sobre la superficie del cilindro, se tiene la ligadura $x^2 + y^2 = R^2$.

Por lo tanto, el número de grados de libertad del sistema es $3n - m = 3(1) - 1 = 2$. Como coordenadas generalizadas se selecciona a $\{q_1, q_2\} = \{\theta, z\}$.

La energía cinética de la partícula es $T = (1/2)mv^2 = (1/2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$. Como $x = R \cos \theta$ y $y = R \sin \theta$, se tiene que $\dot{x} = -R\dot{\theta} \sin \theta$ y $\dot{y} = R\dot{\theta} \cos \theta$ de tal forma que $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = R^2\dot{\theta}^2$. Así la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2).$$



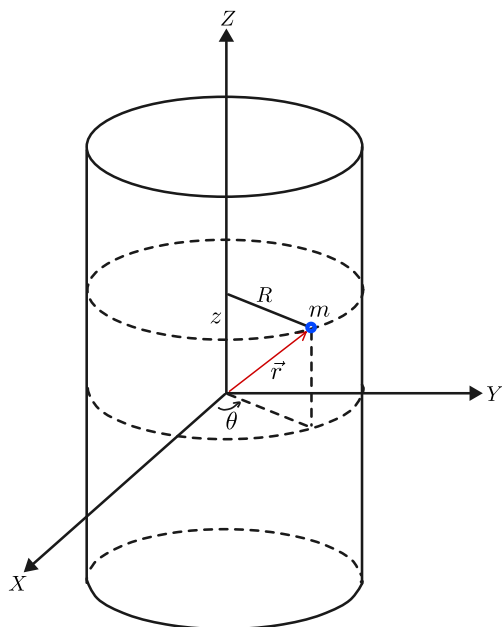
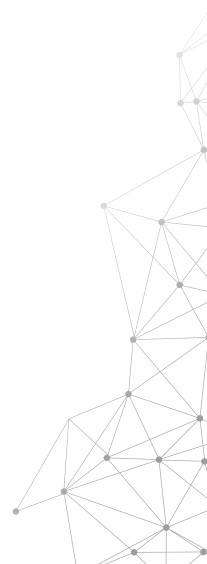


Figura 4.8: Masa deslizando sobre la superficie de un cilindro

Por otra parte, la energía potencial es

$$\begin{aligned}
 U &= - \int F dr \\
 &= - \int (-kr) dr \\
 &= \frac{1}{2} kr^2 \\
 &= \frac{1}{2} k(x^2 + y^2 + z^2) \\
 &= \frac{1}{2} k(R^2 + z^2) \\
 &= \frac{1}{2} kz^2 + \frac{1}{2} kR^2.
 \end{aligned}$$





Así, el lagrangiano $L = T - U$ resultante será:

$$L(\theta, z, \dot{\theta}, \dot{z}) = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}k(R^2 + z^2); \quad (4.81)$$

y las ecuaciones de Lagrange son

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0; \quad (4.82)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = 0. \quad (4.83)$$

Al efectuar estas derivadas se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= mR^2\dot{\theta}; \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= -kz; \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= m\dot{z}. \end{aligned} \quad (4.84)$$

De la primera derivada se concluye que la coordenada θ es cíclica. Por lo tanto, de la ecuación de Lagrange para θ se obtiene

$$\frac{d}{dt} (mR^2\dot{\theta}) = 0,$$

lo cual indica que el momento asociado a θ es constante:

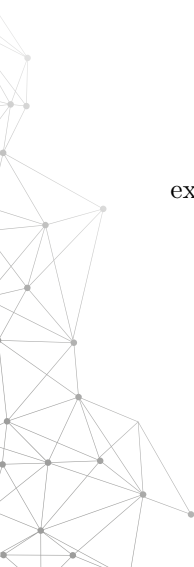
$$mR^2\dot{\theta} = \text{constante} = p_{\theta}. \quad (4.85)$$

Por otra parte, de la ecuación de Lagrange para z se llega a:

$$-kz - m\ddot{z} = 0,$$

expresión que es equivalente a

$$\ddot{z} + (k/m)z = 0, \quad (4.86)$$





concluyéndose que la partícula se mueve en la dirección z con movimiento armónico simple con frecuencia $\omega_0^2 = k/m$.

En cuanto a las fuerzas generalizadas, el sistema tiene dos:

$$Q_\theta = -\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0,$$

lo que confirma que la coordenada generalizada asociada a una coordenada cíclica es cero; y

$$Q_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -kz.$$

Ejemplo 4.14

En la parte más alta de medio cascarón esférico se encuentra una partícula de masa m . Si la partícula desciende, encuentre el ángulo o la altura para la cual se desprenderá de la superficie (este problema se resolvió en el **Capítulo 2** a través del formalismo newtoniano).

Solución.

Este problema se resolverá mediante el uso de las ecuaciones de Lagrange con *multiplicadores de Lagrange*.

Utilizando coordenadas polares, las energías cinética y potencial se escriben así:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2), \quad (4.87)$$

$$U = mgr \cos \theta, \quad (4.88)$$

Por lo que el lagrangiano para la partícula sera:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr \cos \theta. \quad (4.89)$$



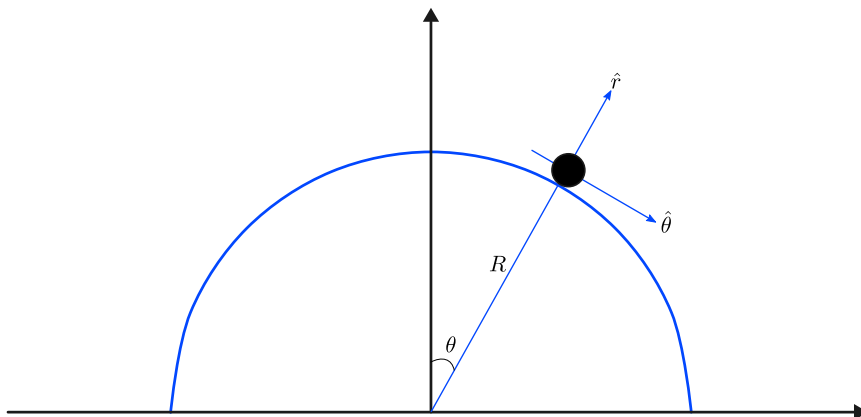


Figura 4.9: Partícula deslizándose sobre medio cascarón esférico .

Ya que la partícula se encuentra restringida a moverse sobre la superficie, se cumple que $r = cte = R$; la ligadura se puede expresar como:

$$g(r, \theta) = r - R = 0, \quad (4.90)$$

de donde

$$\frac{dg}{dr} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{dg}{d\theta} = 0. \quad (4.91)$$

Utilizando la ecuación de Lagrange para r con el multiplicador de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{dr} \right) - \frac{dL}{dr} - \lambda \frac{dg}{dr} = 0, \quad (4.92)$$

se obtiene

$$m\ddot{r} - (mr\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta) - \lambda = 0; \quad (4.93)$$

y de la ecuación de Lagrange para θ con el multiplicador de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\theta}} \right) - \frac{dL}{d\theta} - \lambda \frac{dg}{d\theta} = 0. \quad (4.94)$$

se llega a

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{\theta}\dot{r} - mgr \sin \theta = 0. \quad (4.95)$$





De acuerdo con la ligadura, $\frac{dr}{dt} = \dot{r} = 0$, las **Ecuaciones (4.93) y (4.95)** se transforman en:

$$mg \cos \theta - mr\dot{\theta}^2 = \lambda \quad (4.96)$$

y

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{r} \sin \theta, \quad (4.97)$$

de donde se observa que la aceleración angular es independiente de m .

Derivando **(4.96)** se obtiene

$$\frac{d\lambda}{dt} = -mg\dot{\theta} \sin \theta - 2mr\dot{\theta}\ddot{\theta}. \quad (4.98)$$

Reemplazando **(4.97)** en **(4.98)**

$$\frac{d\lambda}{dt} = -3mg\dot{\theta} \sin \theta = \frac{d}{dt}(3mg \cos \theta), \quad (4.99)$$

o

$$\lambda = 3mg \cos \theta + C. \quad (4.100)$$

Así, las fuerzas de ligadura en las coordenadas generalizadas se obtienen a partir de:

$$\begin{aligned} \lambda \frac{dg}{d\theta} &= 0 && \text{fuerza generalizada de ligadura en } \theta, \\ \lambda \frac{dg}{dr} &= \lambda && \text{fuerza generalizada de ligadura en } r. \end{aligned} \quad (4.101)$$

Ahora, en la parte más alta de la superficie se tiene que $\lambda = mg$ (= peso), por lo que de la **Ecuación (4.100)** se obtiene el valor de la constante, $C = -2mg$. Así, la fuerza normal de la superficie sobre la partícula será

$$\lambda = mg(3 \cos \theta - 2). \quad (4.102)$$

Finalmente, cuando la partícula se separe de la superficie, la fuerza normal será cero, por lo que se puede obtener el ángulo para esta condición cuando $\lambda = 0$,





$$\cos \theta_0 = \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad \theta_0 \approx 48,19^\circ. \quad (4.103)$$

Este resultado también se obtuvo en el Capítulo 2 (ver **Ecuación (2.44)**).

Ejercicios

4.12 Demostrar que la aceleración horizontal $\ddot{X}$ del plano inclinado, dada por la **Ecuación (4.76)**, en el **Ejemplo 4.12**, es máxima cuando

$$\theta = \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\frac{m}{m + 2M} \right) \quad \text{o} \quad \theta = \tan^{-1} \left[\left(\frac{M}{M + m} \right)^{1/2} \right].$$

Considere los casos $M = m$, $M = 2m$, $M \gg m$ y $m \gg M$.

De igual manera, obtener el ángulo que hace mínima la aceleración horizontal $\ddot{x}$, dada por la **Ecuación (4.78)**.

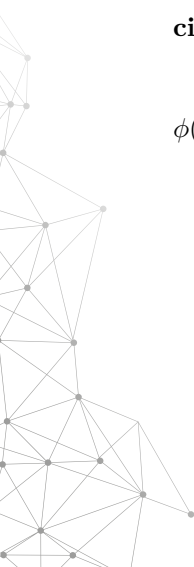
4.13 Resolver mediante el formalismo lagrangiano el péndulo doble (**Figura 4.3**). Asuma que las longitudes de las cuerdas son iguales ($l_1 = l_2 = l$) y que la masa del primer péndulo es mucho mayor que la masa del segundo péndulo ($m_1 \gg m_2$). ¿Qué se concluye en este caso?

4.14 Resolver mediante el formalismo lagrangiano la máquina de Atwood doble (**Figura 4.2**). Obtenga las fuerzas generalizadas por medio de las **Ecuaciones (4.8)** y **(4.16)**.

4.15 Revisar las demostraciones presentadas sobre lagrangianos en la **Sección 1.10** correspondiente a la derivada total de una función en el **Capítulo 1**.

4.16 Partiendo de la fuerza de Lorentz en términos del potencial escalar $\phi(\vec{r}, t)$ y el potencial vector $\vec{A}(\vec{r}, t)$:

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) = q \left(-\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right),$$





obtener el lagrangiano para una partícula cargada en un campo electromagnético: $L = T - q\phi + (q/c)\vec{A}\cdot\vec{v}$.

4.17 Resolver, mediante el formalismo lagrangiano, el sistema conformado por dos masas atadas por una cuerda y ubicadas cada una de ellas en un plano inclinado (ver **Ejemplo 2.1**).

4.18 Extensión al **Ejemplo 4.11**. Considere un disco que rueda sin fricción sobre un plano inclinado de masa M que desliza sobre una superficie horizontal. **(a)** Obtener las ecuaciones de movimiento de este sistema por medio del formalismo lagrangiano y las fuerzas generalizadas; **(b)** Resolver el problema por medio de las ecuaciones de Lagrange con multiplicadores de Lagrange (**Ecuaciones (4.46)**) y obtener las fuerzas de ligadura y los fuerzas generalizadas de ligadura.

En el **Ejemplo 4.12** se aborda el mismo problema cambiando el disco por un bloque. Otra variación que se puede plantear a este problema es cambiar el disco por un aro (ver **Ejemplo 4.4**).

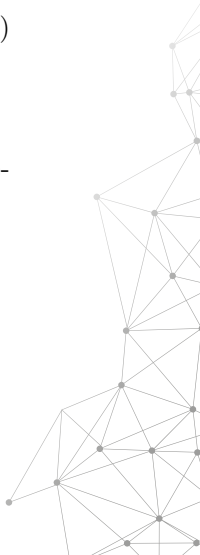
4.6. Algunas propiedades de las ecuaciones de Lagrange

Propiedad 1. Si L es el lagrangiano para un sistema de n grados de libertad que satisface las ecuaciones de Lagrange y $F = F(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ es una función arbitraria, pero derivable, entonces

$$L' = L + \frac{dF}{dt}, \quad (4.104)$$

también cumple las ecuaciones de Lagrange.

A continuación se mostrará esta propiedad a través de dos caminos diferentes.





Procedimiento 1. Se mostrará que L' satisface el principio de Hamilton. Integrando entre t_1 y t_2 a $L' = L + \frac{dF}{dt}$ se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} L' dt &= \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF(q_i, t)}{dt} dt, \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L dt + F(q_i, t)|_{t_1}^{t_2}, \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L dt + F(q_i(t_2), t_2) - F(q_i(t_1), t_1).\end{aligned}$$

Ahora, tomamos la variación de esta integral:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L' dt = \underbrace{\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt}_{=0 \text{ por el principio de Hamilton}} + \underbrace{\delta [F(q_i(t_2), t_2) - F(q_i(t_1), t_1)]}_{=0 \text{ porque no varía}}.$$

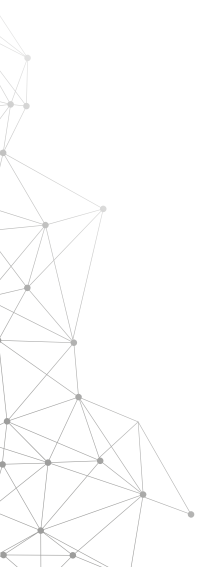
Así,

$$\int_{t_1}^{t_2} L' dt = 0,$$

mostrándose que L' satisface el principio de Hamilton y, por lo tanto, cumple con las ecuaciones de Lagrange.

Procedimiento 2. Se mostrará directamente que L' satisface las ecuaciones de Lagrange.

$$\begin{aligned}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{dF}{dt} \right), \\ \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial F}{\partial q_i} + 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \right), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{dF}{dt} \right).\end{aligned}\tag{4.105}$$





Por otra parte,

$$\frac{\partial L'}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{dF}{dt} \right). \quad (4.106)$$

A partir de las **Ecuaciones (4.105) y (4.106)** se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \frac{\partial L}{\partial q_i} + \cancel{\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{dF}{dt} \right)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \cancel{\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{dF}{dt} \right)} \\ \frac{\partial L'}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial L'}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0.$$

Ejemplo 4.15

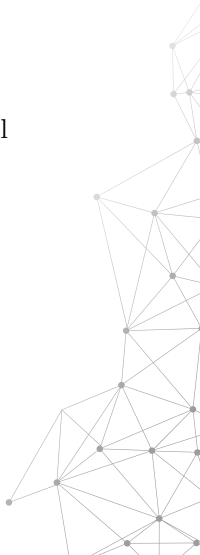
El campo electromagnético es invariante bajo la siguiente transformación gauge de los potenciales escalar $\phi(\vec{r}, t)$ y vector $\vec{A}(\vec{r}, t)$:

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t}, \\ \vec{A}' &= \vec{A} + \nabla \psi(\vec{r}, t); \end{aligned}$$

donde $\psi(\vec{r}, t)$ es una función arbitraria derivable. El lagrangiano de una partícula que se mueve en un campo electromagnético está dado por la expresión:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + \frac{q}{c}\vec{A} \cdot \vec{v}.$$

Demostrar que al utilizar la transformación gauge de los potenciales, el nuevo lagrangiano L' también satisface las ecuaciones de Lagrange.



**Solución.**

La demostración se desarrollará utilizando el enunciado de la Propiedad 1 de las ecuaciones de Lagrange.

$$\begin{aligned}
 L' &= \frac{1}{2}mv^2 - q\phi' + \frac{q}{c}\vec{A}' \cdot \vec{v}, \\
 L' &= \frac{1}{2}mv^2 - q\left(\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\psi(\vec{r}, t)}{\partial t}\right) + \frac{q}{c}\left(\vec{A} + \nabla\psi(\vec{r}, t)\right) \cdot \vec{v}, \\
 L' &= \underbrace{\frac{1}{2}mv^2 - q\phi + \frac{q}{c}\vec{A} \cdot \vec{v}}_L + \frac{q}{c}\frac{\partial\psi(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{q}{c}\nabla\psi(\vec{r}, t) \cdot \vec{v}, \\
 L' &= L + \frac{q}{c}\left(\nabla\psi(\vec{r}, t) \cdot \vec{v} + \frac{\partial\psi(\vec{r}, t)}{\partial t}\right), \\
 L' &= L + \frac{q}{c}\frac{d\psi}{dt}, \\
 L' &= L + \frac{d}{dt}\left(\frac{q}{c}\psi\right). \tag{4.107}
 \end{aligned}$$

Así, $L' = L + \frac{dF}{dt}$, con $F = \frac{q}{c}\psi$. Por lo tanto, L y L' satisfacen las ecuaciones de Lagrange según lo planteado en la Propiedad 1.

Propiedad 2. La forma de las ecuaciones de Lagrange es *invariante* bajo una transformación puntual entre coordenadas generalizadas que describan el sistema.

Sea $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ un conjunto de coordenadas generalizadas que describen un sistema de n grados de libertad y sea $L(q_i, \dot{q}_i; t)$, $i = 1, \dots, n$, el lagrangiano del sistema. Consideremos otro conjunto de coordenadas independientes $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ relacionadas con las $\{q_i\}$ mediante las ecuaciones de transformación

$$q_i = q_i(s_1, s_2, \dots, s_n, t), \quad i = 1, \dots, n.$$

La anterior transformación es puntual. Demostrar que si se expresa la lagrangiana en función de las coordenadas $\{s_k, \dot{s}_k, t\}$ mediante las ecuaciones de transformación, entonces, L satisface las ecuaciones de Lagrange con respecto





a las coordenadas $\{s_k\}$, esto es

$$\frac{\partial L}{\partial s_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_k} \right) = 0.$$

A continuación se demostrará esta propiedad de invarianza de la forma de las ecuaciones de Lagrange. Aplicando regla de la cadena a $L(q_i(s_k), \dot{q}_i(s_k, \dot{s}_k), t)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial s_k} &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial s_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial s_k} + \frac{\partial L}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial s_k}, \\ \frac{\partial L}{\partial s_k} &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial s_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial s_k}; \end{aligned} \quad (4.108)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_k} &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \dot{s}_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{s}_k} + \frac{\partial L}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \dot{s}_k}, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_k} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{s}_k}, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_k} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \dot{s}_k}, \end{aligned} \quad (4.109)$$

ya que $\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{s}_k} = \frac{\partial q_i}{\partial s_k}$.

Derivando respecto al tiempo a la **Ecuación (4.109)**:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_k} \right) &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \dot{s}_k} \right], \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_k} \right) &= \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \frac{\partial q_i}{\partial \dot{s}_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_i}{\partial \dot{s}_k} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.110)$$





A partir de las **Ecuaciones (4.108) y (4.110)** se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial s_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_k} \right) &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial s_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial s_k} - \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \frac{\partial q_i}{\partial s_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_i}{\partial s_k} \right) \right], \\ \frac{\partial L}{\partial s_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_k} \right) &= \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right]}_{=0} \frac{\partial q_i}{\partial s_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial s_k} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left[\frac{\partial}{\partial s_k} \left(\frac{dq_i}{dt} \right) \right], \\ \frac{\partial L}{\partial s_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_k} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial s_k} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial s_k} = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial L}{\partial s_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_k} \right) = 0.$$

4.7. Actividades complementarias

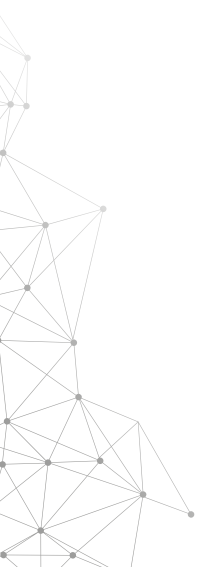
1. Consultar acerca del *lema fundamental* del cálculo de variaciones. Asumiendo que $\eta(x)$ es una función arbitraria y continua hasta la segunda derivada, y si

$$\int_a^b M(x)\eta(x)dx = 0,$$

entonces, $M(x) = 0$, en el intervalo (a, b) .

2. La máquina de Atwood es un sistema físico sobre el cual se pueden estudiar diversas generalizaciones o variaciones como, por ejemplo, considerar la masa de la cuerda o de la polea, la fricción de la polea, la rotación de la polea, entre otras. Las siguientes referencias trabajan algunas de estas extensiones:

- Lemos NA. Atwood's machine with a massive string. *Eur J Phys.* 2017; 38.
- Sánchez RS. Simulación de la máquina de Atwood para estudiantes de Física, *Lat. Am J Phys Educ.* 2016; 10(2).





- Tarnopolski M. On Atwood's Machine with a Nonzero *Mass String*, *Phys. Phys Teac*
- Lucatto B, Caprecci MB, Gonçalves JVA, Sismanoglu BN. Máquina de Atwood com massa variável em movimento oscilatório atípico. *Rev Bras Ens Fis.* 2014; 36(2).
- Mehdi JM. Introduction of Atwood's machines as Series and Parallel networks, *Lat. Am J Phys Educ.* 2011; 5(2).
- Martell EC, Martell VB. The Effect of Friction in Pulleys on the Tension in Cables and Strings. *The Physics Teacher.* 2013; 51.
- Coelho RL. The compound Atwood machine problem, *Phys. Phys Educ.* 2017; 52.
- Coelho RL. Decomposition of the compound Atwood machine. *Eur J Phys.* 2017; 38.

3. En las siguientes referencias se estudian las oscilaciones amortiguadas mediante el formalismo lagrangiano:

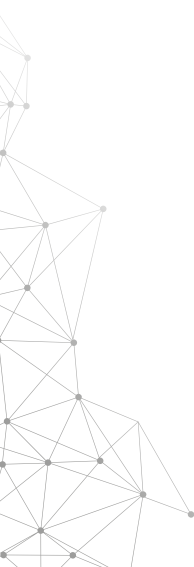
- Denman HH. On Linear Friction in Lagrange's Equation. *Am J Phys.* 1966; 34.
- Sarlet W. Invariance and conservation laws for Lagrangian systems with one degree of freedom. *J Math Phys.* 1978; 19.
- Galley CR. Classical Mechanics of Nonconservative Systems. *Phys Rev Lett.* 2013; 110.

4. En este capítulo se obtuvieron las ecuaciones de Lagrange a través de dos caminos: por medio del principio de Hamilton (utilizando cálculo variacional) y mediante el principio de D'Alembert (considerando desplazamientos virtuales). Sin embargo, en la literatura hay otros métodos para obtener las mencionadas ecuaciones. Algunos de ellos utilizan cálculo vectorial, álgebra lineal, geometría diferencial o cálculo tensorial y facilitan una interpretación geométrica de las ecuaciones de Lagrange. Las siguientes referencias muestran algunos métodos alternativos para obtener estas ecuaciones:





- Beers BL. Geometric Nature of Lagrange's Equations. *Am J Phys.* 1972; 40.
 - Casey J. Geometrical derivation of Lagrange's equations for a system of particles. *Am J Phys.* 1994; 62(9).
 - Hanc J, Taylor EF, Tuleja S. Deriving Lagrange's equations using elementary calculus. *Am J Phys.* 2004; 72(4).
 - Curiel E. The Geometry of the Euler-Lagrange Equation. Unpublished manuscript [internet]; 2010 [citado el 29 de septiembre de 2022]. Disponible en: <http://strangebeautiful.com/papers/curiel-geom-ele.pdf>
 - Guerrero J, Muñoz JH. Revisiting the Newton's second law and Lagrange's equations in orthogonal curvilinear coordinates: some remarks, *working paper.* 2020.
5. En las siguientes referencias se revisan tópicos más avanzados del formalismo lagrangiano, relacionados con fuerzas de ligadura en sistemas holónomos, simetrías, invarianzas y potenciales generalizados:
- Lemos NA. Forces of constraint in the holonomic case. *Rev Bras Ens Fís.* 2004; 26(3): 283–6.
En esta referencia, el autor propone un método para obtener las fuerzas de ligadura usando las ecuaciones de Lagrange pero sin emplear los multiplicadores de Lagrange.
 - Torres del Castillo GF, Andrade-Mirón C, Bravo-Rojas RI. Variational symmetries of Lagrangians. *Rev Mex Fis E.* 2013; 59.
En este artículo se obtiene una derivación sencilla de la ecuación para los generadores infinitesimales de simetrías variacionales del lagrangiano de un sistema con número finito de grados de libertad.
 - Lima W, Ferreira de Oliveira PH, Braga M, Ramos O. Determination of constraint forces in holonomic classical systems: critical analysis of the three methods. *Rev Bras Ens Fis.* 2019; 41(1).
En este trabajo se estudian tres formalismos (el newtoniano, el lagrangiano y uno desarrollado por Nivaldo Lemos) para calcular las fuerzas de ligadura en sistemas holónomos.





- De la Peña L, Cetto AM, Valdés-Hernández A. Power and beauty of the Lagrange equations. *Rev Mex Fís E*. 2020; 17(1): 47–54.

Es un excelente artículo para reforzar los temas estudiados en el presente capítulo. Resalta dos razones para considerar a las ecuaciones de Lagrange como una descripción fundamental de la dinámica de partículas clásicas. Una de ellas es que las ecuaciones de Lagrange preservan su forma en cualquier sistema coordenado (ver Propiedad 2 de las ecuaciones de Lagrange). Usa algunas herramientas matemáticas de la geometría diferencial como el tensor métrico y el símbolo de Christoffel.

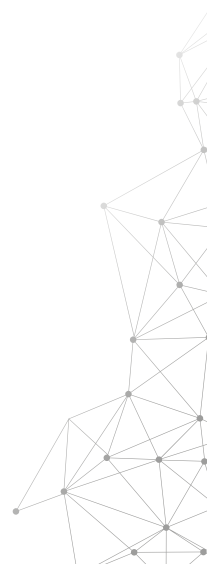
- Benedetto E. Generalized potential for apparent forces: the Coriolis effect. *Eur J Phys*. 2020; 41(4).

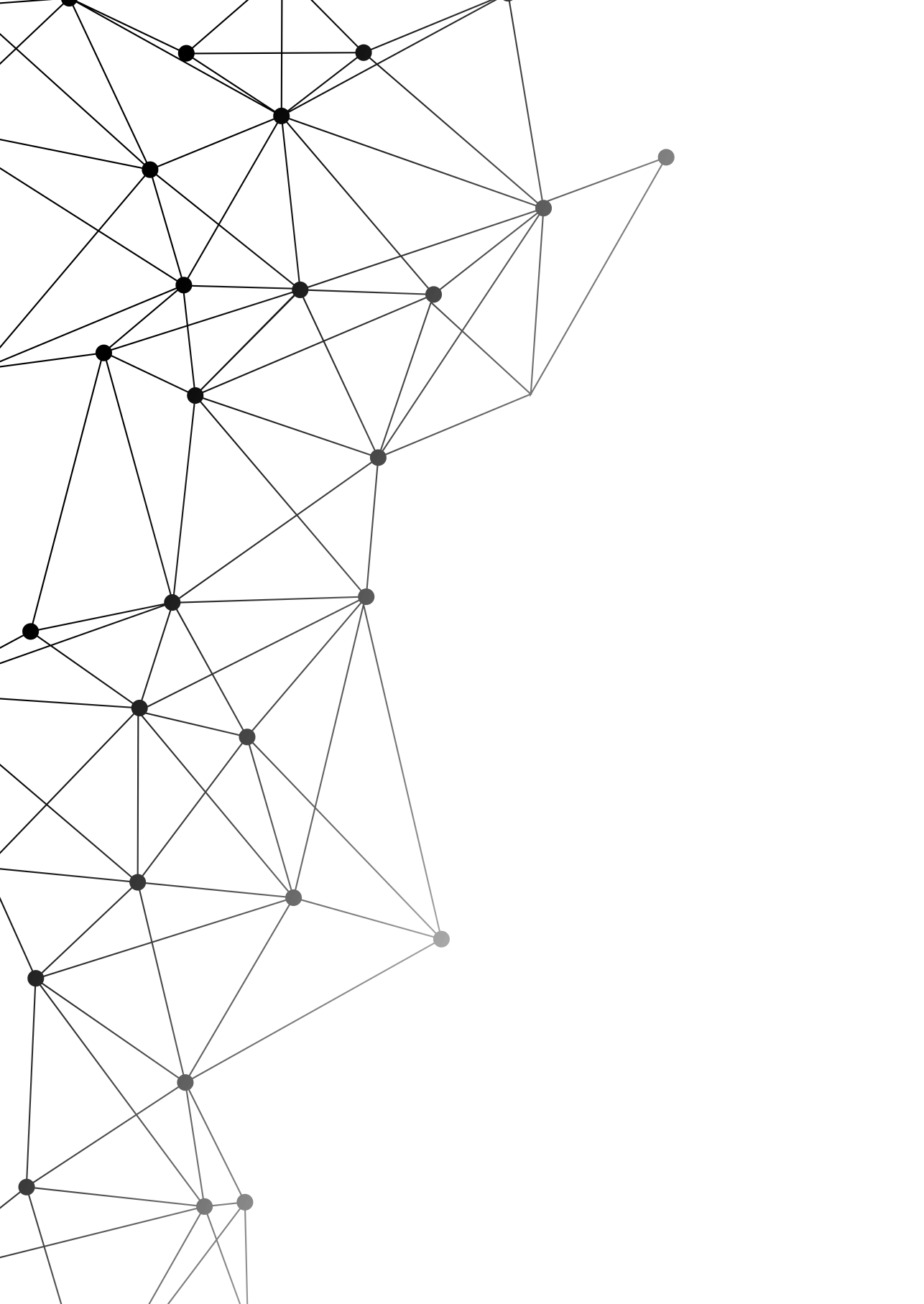
En este trabajo se presenta un análisis matemático a potenciales generalizados asociados a fuerzas como la de Coriolis y de arrastre, a partir de una analogía con la fuerza de Lorentz.

6. En la siguiente referencia se estudia el movimiento de un cuerpo que rueda y desliza con fricción sobre un hemisferio (ver **Ejemplo 4.14**):

- Souza DC, Coluci VR. The motion of a ball moving down a circular path. *Am J Phys*. 2017; 85.

En el artículo se describe un aparato para determinar el ángulo a partir del cual el cuerpo se despega de la trayectoria circular. Así, es un trabajo en el cual se verifica experimentalmente un problema ideal que aparece en los libros de texto.







Capítulo

5

Dos cuerpos sometidos a una fuerza central

—

En este capítulo se presenta una breve introducción, mediante el formalismo lagrangiano, al problema de dos cuerpos que interactúan bajo la acción de una fuerza central, es decir, una fuerza dirigida a lo largo de la línea que une los centros de los dos cuerpos y dependiente solo de la distancia entre ellos. Este tema es de bastante aplicación en el movimiento de cuerpos celestes y en la dispersión de partículas por campos de fuerzas centrales.

5.1. Reducción al problema equivalente de un cuerpo.

Consideremos un sistema *monógeno* conformado por dos partículas de masas m_1 y m_2 sometidas a una fuerza de carácter central, es decir, que depende solo de la distancia r entre las partículas y va dirigida a lo largo de la línea que las une: $\vec{F} = f(r)\hat{e}_r$. En este caso, el potencial de interacción es $U = U(\vec{r})$, donde $\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ (vector posición relativa entre las dos partículas).

El número de grados de libertad de este sistema es $3n - m = 3(2) - 0 = 6$. Es decir, se requieren seis coordenadas generalizadas. Podemos escoger como coordenadas generalizadas a $\{q_i\} = \{\vec{r}_2, \vec{r}_1\}$; $\{\vec{r}_2, \vec{r}_1\}$; $\{\vec{R}, \vec{r}\}$, donde $\vec{R}$ es el





vector posición del centro de masa y $\vec{r}$ el vector posición relativa (Ver **Figura 5.1**). En este problema es conveniente seleccionar como coordenadas generalizadas a $\vec{R}$ y $\vec{r}$.

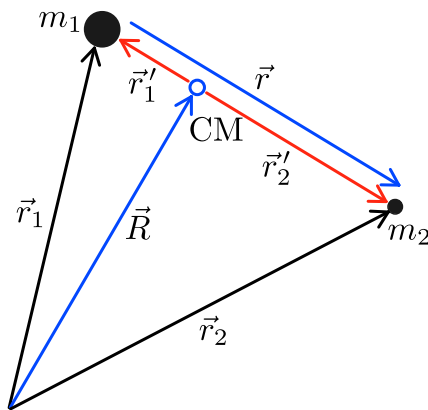


Figura 5.1: Dos masas sometidas a una fuerza central.

Nota. El vector posición relativa entre las dos partículas es *invariante*, es decir, $\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \equiv \vec{r}'_2 - \vec{r}'_1$ (el sistema primado tiene el origen en el centro de masa del sistema(CM)).

Aplicando la definición del vector posición del centro de masa, en el centro de masa del sistema, se obtiene: $m_1 \vec{r}'_1 + m_2 \vec{r}'_2 \equiv M \vec{R}' = 0$ de tal forma que $\vec{r}'_2 = -\frac{m_1}{m_2} \vec{r}'_1$. Este resultado se introduce en la ecuación $\vec{r} = \vec{r}'_2 - \vec{r}'_1$ para despejar a $\vec{r}'_1$ y $\vec{r}'_2$ en función de $\vec{r}$:

$$\begin{aligned} \vec{r}'_1 &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \\ \vec{r}'_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Observe que si se considerara $\vec{r} \equiv \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2$, las expresiones anteriores tendrían signos contrarios.





El lagrangiano en función de las coordenadas generalizadas $\vec{R}$ (vector posición del centro de masa) y $\vec{r}$ (vector posición relativa), $L = L(\vec{R}, \vec{r}, \dot{\vec{R}}, \dot{\vec{r}}; t) = T - U = T_{CM} + T' - U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \dots)$, está dado por:

$$L = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2'^2 - U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \dots),$$

donde $M = m_1 + m_2$ es la masa total del sistema. Derivando respecto al tiempo a las **Ecuaciones (5.1)** y sustituyéndolas en la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}), \\ L &= \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}), \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde $\mu \equiv \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ se llama *masa reducida* (equivalentemente $\frac{1}{\mu} \equiv \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$) y se ha considerado que $U = U(\vec{r})$, es decir, en el sistema solo actúan *fuerzas centrales conservativas*.

Ejercicio

5.1 Obtenga la masa reducida en los siguientes casos: **(1)** $m_1 = m_2$; **(2)** $m_1 \gg m_2$, ¿cuál sería, aproximadamente, la posición del centro de masa? **(3)** átomo de hidrógeno; **(4)** sistema sol-tierra.

Vale la pena resaltar que el lagrangiano dado por la **Ecuación (5.2)** se puede ver como la suma de dos lagrangianos, $L = L_1 + L_2$, asociados a movimientos diferentes, donde $L_1 = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2$ corresponde al movimiento de una partícula libre de masa M y $L_2 = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r})$, está asociado al movimiento de una partícula de masa μ ubicada a la distancia r del centro de fuerzas y sometida al potencial central $U(\vec{r})$.

Por otra parte, se observa que en el lagrangiano dado por la **Ecuación (5.2)**, $\vec{R}$ es coordenada *cíclica*, por lo tanto, $M\dot{\vec{R}} = cte$, es decir, el momento





lineal del centro de masa se conserva (este hecho está asociado a la simetría traslacional del sistema). De igual forma, se concluye que el centro de masa está en reposo o se mueve uniformemente. Además, las ecuaciones de Lagrange para $\vec{r}$ no contienen a $\vec{R}$ o $\dot{\vec{R}}$. Por lo tanto, se puede trabajar de manera independiente el lagrangiano asociado al movimiento de la masa μ :

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}; t) = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}). \quad (5.3)$$

Según la **Ecuación (5.3)** el problema de los dos cuerpos de masas m_1 y m_2 separados una distancia r e interactuando por medio de una fuerza central se ha *reducido* al problema de un solo cuerpo de masa reducida μ ubicado a una distancia r del centro de fuerzas.

5.2. Ecuaciones del movimiento.

El problema anterior tiene *simetría esférica* (es invariante ante rotaciones), por lo tanto, *el momento angular ($\vec{L}$) total se conserva*. Otra manera de llegar a este resultado es la siguiente: El torque o momento de fuerza ($\vec{N}$) del sistema es $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (f(r)\hat{e}_r) = \frac{f(r)}{r} \vec{r} \times \vec{r} = 0$. Es decir, $\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, por lo tanto, $\vec{L} = \text{constante}$. Esto quiere decir que $\vec{r}$ es siempre perpendicular a la dirección fija del momento angular $\vec{L}$. La única opción para que se cumpla esto es que el movimiento se de en un plano.

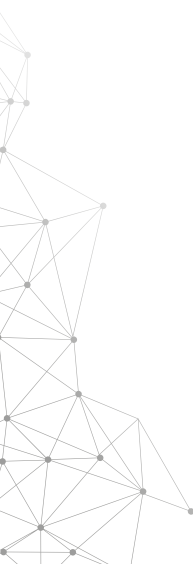
De acuerdo con lo anterior, se concluye que el movimiento de la masa μ sometida al potencial $U = U(r)$ se da en un *plano*.

El lagrangiano para la masa μ en coordenadas *polares* es:

$$L = T - U(r) = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r). \quad (5.4)$$

Las dos ecuaciones de Lagrange son:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0, \quad (5.5)$$





$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = 0. \quad (5.6)$$

Se observa que θ es *cíclica* porque no aparece explícitamente en el lagrangiano. Por lo tanto, a partir de la ecuación de Lagrange para la coordenada θ (ver **Ecuación (5.5)**) se obtiene que $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{constante}$. Esta cantidad es la magnitud del momento cinético (o angular):

$$l = \mu r^2 \dot{\theta} \equiv \text{constante}. \quad (5.7)$$

Velocidad areolar. De $l = \mu r^2 \dot{\theta} \equiv \text{constante}$ se concluye que el factor $r^2 \dot{\theta}$ también es constante. Y si se multiplica este término por $\frac{1}{2}$, se continúa obteniendo una constante. Así:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \right) &= 0, \\ \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} &= \text{constante} \equiv A. \end{aligned}$$

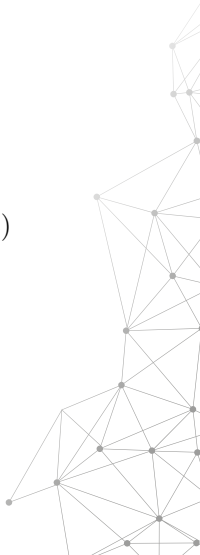
La velocidad areolar A (área barrida por el vector de posición por unidad de tiempo) es constante. Este resultado es equivalente a la *segunda ley de Kepler*: el radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales.

Por otra parte, de la ecuación de Lagrange para la coordenada r (ver **Ecuación (5.6)**) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mu r \dot{\theta}^2 - \frac{dU}{dr} - \mu \ddot{r} &= 0, \\ \mu \ddot{r} &= \mu r \dot{\theta}^2 - \frac{dU}{dr}; \end{aligned}$$

como $\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}$, se llega a la siguiente expresión:

$$\mu \ddot{r} = \frac{l^2}{\mu r^3} + f(r) \equiv f_{ef}, \quad (5.8)$$





donde f_{ef} es una fuerza *efectiva* dada por la suma de la fuerza *central* $f(r) = -\frac{dU}{dr}$ con la fuerza *centrífuga* $f_{\text{centrífuga}} = \frac{l^2}{\mu r^3}$, la cual proviene del potencial centrífugo $U_{\text{centrífugo}} = \frac{l^2}{2\mu r^2}$. Así,

$$f_{\text{ef}} = f_{\text{central}} + f_{\text{centrífuga}} = -\frac{dU_{\text{ef}}}{dr} \quad \text{con} \quad U_{\text{ef}} = U_{\text{central}} + U_{\text{centrífugo}}.$$

Observe que si la fuerza efectiva es cero, entonces, $\ddot{r} = 0$, de donde se concluye que $\frac{d(\dot{r})}{dt} = 0$, es decir, $\dot{r}$ es constante. Además, cuando la fuerza efectiva es cero, la fuerza central es igual a menos la fuerza centrífuga. Esto es: si $f_{\text{ef}} = 0$, entonces, $f(r) = -f_{\text{centrífuga}} = -\frac{l^2}{\mu r^3}$ (este resultado se utilizará cuando se estudien las condiciones para órbitas cerradas). Por otra parte, en los valores de r donde la $f_{\text{ef}} = 0$, la curva U_{ef} vs r presenta un máximo o un mínimo ya que f_{ef} es la pendiente de esta gráfica.

A continuación se mostrará que la ecuación de Lagrange para r (ver **Ecuación (5.8)**) conduce a otra constante de movimiento:

$$\begin{aligned} \mu \dot{r} \ddot{r} &= -\frac{d}{dr} \left(U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} \right) \dot{r}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 \right) &= -\frac{d}{dt} \left(U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} \right), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U \right) &= 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Esta última expresión indica que la cantidad que está dentro del paréntesis es constante. Esta cantidad es precisamente la *Energía Total* E :

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U(r) = \frac{1}{2} \mu \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + U(r) = \text{constante}. \quad (5.10)$$

Los dos primeros términos de E corresponden a la energía cinética en coordenadas polares.





A manera de conclusión, se resalta que la ecuación de Lagrange para la coordenada θ conduce a la *conservación del momento angular* l y la ecuación de Lagrange para la coordenada r conduce a la *conservación de la energía total* E .

Finalmente, podemos hallar de la **Ecuación (5.10)** a $r = r(t)$ y de la **Ecuación (5.7)** a $\theta = \theta(t)$:

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - U(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}}, \quad (5.11)$$

$$\theta = \frac{l}{\mu} \int_0^t \frac{dt}{r^2(t)} + \theta_0. \quad (5.12)$$

Así, el problema se ha reducido a cuadraturas con cuatro constantes de integración: E , l , r_0 y θ_0 .

5.3. Clasificación de las órbitas.

A partir de la expresión para E y de la ecuación de Lagrange para r se obtiene:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \left[\frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U(r) \right] \equiv \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{\text{ef}}, \quad (5.13)$$

$$\mu\ddot{r} = \frac{l^2}{\mu r^3} + f(r) \equiv f_{\text{ef}}(r), \quad (5.14)$$

donde U_{ef} es el *potencial efectivo* que cumple con $f_{\text{ef}} = -\frac{dU_{\text{ef}}}{dr}$. Así, f_{ef} es una fuerza efectiva radial dada por la suma de la fuerza central ($= -\frac{dU}{dr}$) con una fuerza centrífuga ($= \frac{l^2}{\mu r^3}$). Esta fuerza centrífuga es una fuerza ficticia que surge por estar utilizando un sistema de referencia no inercial con origen en una de las partículas (que se encuentra acelerada).

Es posible analizar *cualitativamente* el problema de fuerzas centrales (sin resolverlo explícitamente) estudiando la curva U_{ef} vs. r para ciertos valores





de E . Para realizar este análisis es importante tener en cuenta las siguientes ideas:

- La velocidad en coordenadas polares es: $\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$. Por lo tanto, $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$.
- $E - U_{\text{ef}} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$: la diferencia $E - U_{\text{ef}}$ da información sobre la componente *radial* de $\vec{v}$.
- $U_{\text{ef}} - U(r) = \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} \equiv \frac{1}{2}\mu r^2\dot{\theta}^2$: la diferencia $U_{\text{ef}} - U(r)$ da información sobre la componente *angular* de $\vec{v}$.
- $v = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U(r))}$.
- f_{ef} es la pendiente de la gráfica U_{ef} vs. r .

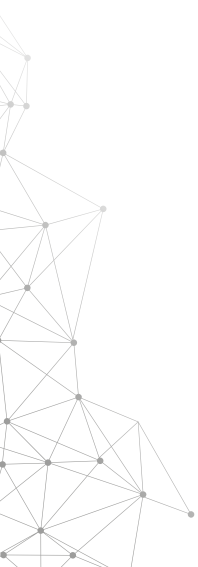
Casos especiales.

- $E = U_{\text{ef}}$: implica $\dot{r} = 0$. Hay un *punto de inversión*. Estos puntos se pueden obtener a partir de la expresión de la energía, haciendo $\dot{r} = 0$:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + U(r) \rightarrow r^2 - \frac{r^2 U(r)}{E} - \frac{l^2}{2\mu E} = 0 \equiv g(r). \quad (5.15)$$

Las raíces de este polinomio dan los puntos de inversión. La instrucción `FindRoot[g(r), {r, 0}]` en *Mathematica* da como resultado las raíces de $g(r)$ a partir de $r = 0$.

- $U_{\text{ef}} = U(r)$: implica $\dot{\theta} = 0$ (o equivalentemente $l = 0$) y $f_{\text{ef}} = f(r)$.
- $E = U(r)$: implica $v = 0$.
- $f_{\text{ef}} = 0$: la gráfica U_{ef} contra r tiene un máximo o un mínimo. Recuérdese que en la sección anterior se concluyó que si $f_{\text{ef}} = 0$, entonces, $f(r) = -f_{\text{centrífuga}} = -\frac{l^2}{\mu r^3}$.
- $E = 0$: implica $T = -U$ o equivalentemente $U_{\text{ef}} = -\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$.





También es importante tener en cuenta que la clasificación cualitativa en órbitas abiertas, acotadas y circulares se cumple para todo potencial atractivo que **(a)** disminuya más lentamente que $1/r^2$ cuando $r \rightarrow \infty$ y **(b)** tienda a infinito más lentamente que $1/r^2$, cuando $r \rightarrow 0$.

A continuación se presenta un análisis de la fuerza central atractiva del tipo $f(r) = -\frac{k}{r^n}$. La **Tabla 5.1** muestra ejemplos de esta fuerza con su respectivo potencial variando a n .

Tabla 5.1: Fuerzas centrales del tipo $f(r) = -k/r^n$ con su respectivo potencial $U(r) = -\int f(r)dr$.

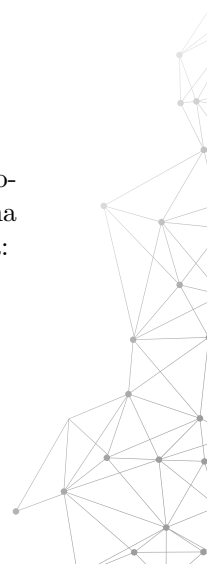
n	$f(r) = -\frac{k}{r^n}$	$U(r) = -\frac{k}{(n-1)r^{n-1}}$
-1	$-kr$	$\frac{1}{2}kr^2$
2	$-\frac{k}{r^2}$	$-\frac{k}{r}$
3	$-\frac{k}{r^3}$	$-\frac{k}{2r^2}$
4	$-\frac{k}{r^4}$	$-\frac{k}{3r^3}$
5	$-\frac{k}{r^5}$	$-\frac{k}{4r^4}$
6	$-\frac{k}{r^6}$	$-\frac{k}{5r^5}$

De manera general, se tiene:

$$f_{\text{ef}} = f_{\text{central}} + f_{\text{centrifuga}} = -\frac{k}{r^n} + \frac{l^2}{\mu r^3},$$

$$U_{\text{ef}} = U_{\text{central}} + U_{\text{centrifugo}} = -\frac{k}{(n-1)r^{n-1}} + \frac{l^2}{2\mu r^2}.$$

El impacto de los parámetros k , n , l y μ en la fuerza efectiva y el potencial efectivo se puede analizar, cualitativamente, por medio del programa Mathematica usando los comandos Manipulate y Plot en la siguiente rutina:



Código en *Mathematica* para la Figura 5.2

Código para la Figura 5.2 derecha

```
In[5]:= Manipulate[Plot[{- $\frac{k}{(n-1)r^{n-1}}$ ,  $\frac{l^2}{2\mu r^2}$ , - $\frac{k}{(n-1)r^{n-1}}$  +  $\frac{l^2}{2\mu r^2}$ },
  {r, 0, 8}, Frame→True, FrameStyle→Black, FrameLabel→
  {"r", ""}, PlotLegends→Placed[{Ucentral, Ucentrifugo, Uefectivo},
  {0.88, 0.22}]], {n, 2, 10}, {k, 1, 4}, {l, 0, 3}, {μ, 1, 4}]
```

Utilizando esta instrucción se obtiene la **Figura 5.2**. En ella se grafican las fuerzas central, centrífuga y efectiva y los respectivos potenciales central, centrífugo y efectivo, en función de r , haciendo $n = 7,5$, $k = 3$, $l = 1,4$ y $\mu = 4$. Si la Energía total es cero ($E = 0$) la partícula puede estar entre $r = 0$ y $r \approx 1,15$. La región para $r \gtrsim 1,15$ es prohibida porque $U_{ef} > E$ y se obtendría que $\dot{r}^2 < 0$. Por otra parte, si la energía total está en el rango $0,026 \lesssim E \lesssim 0,073$ hay un intervalo como región prohibida.

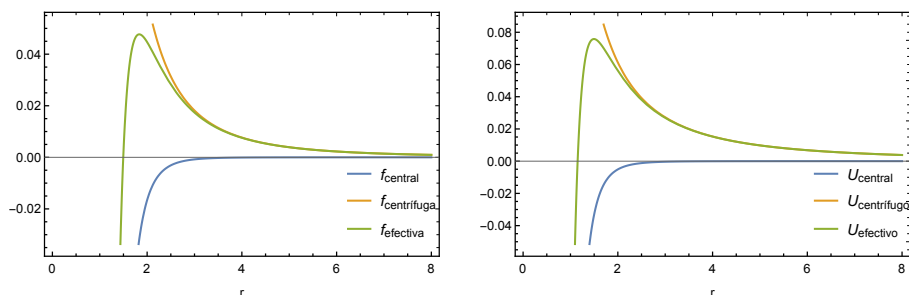


Figura 5.2: *Izquierda:* Fuerzas central ($= -k/r^n$), centrífuga ($= l^2/\mu r^3$) y efectiva ($= -k/r^n + l^2/\mu r^3$) en función de r . *Derecha:* Potenciales central ($= -k/[(n-1)r^{n-1}]$), centrífugo ($= l^2/(2\mu r^2)$) y efectivo ($= -k/[(n-1)r^{n-1}] + l^2/(2\mu r^2)$) en función de r . Se hizo $n = 7,5$, $k = 3$, $l = 1,4$ y $\mu = 4$.

Las **Figuras 5.3 a 5.7** muestran fuerzas centrales del tipo $-kr$ (recuperadora lineal), $-k/r^2$ (problema de Kepler), $-k/r^3$, $-k/r^4$ y k/r^5 en función de r , respectivamente. De igual forma, en estas figuras se muestran las fuerzas centrífuga y efectiva, y los potenciales central, centrífugo y efectivo. Para hacer un análisis cualitativo de estos potenciales se consideran posibles valores de



la energía total E y se grafican como rectas paralelas al eje horizontal en las gráficas U_{ef} Vs. r y se tiene en cuenta la diferencia $E - U_{ef}$. Los valores de r donde $E = (U_{ef})_{max}$ o $E = (U_{ef})_{min}$ son puntos de inversión ($\dot{r} = 0$). Por otra parte, las regiones donde $E \geq U_{ef}$ son permitidas, mientras que donde $E \leq U_{ef}$ son regiones prohibidas. Con este análisis también se puede determinar si la órbita es acotada o abierta.

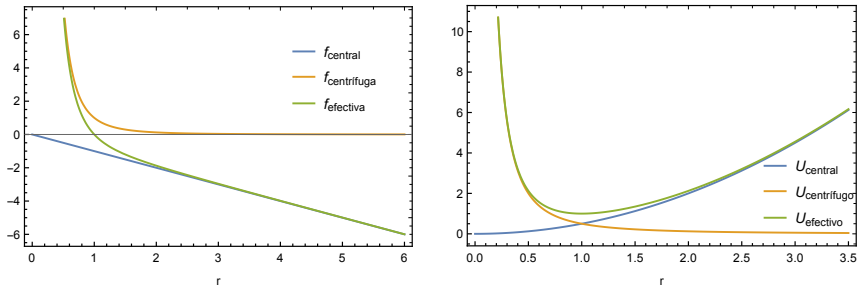


Figura 5.3: *Izquierda:* Fuerzas central ($= -kr$), centrífuga ($= l^2/\mu r^3$) y efectiva ($= -kr + l^2/\mu r^3$) en función de r . *Derecha:* Potenciales central ($= -k/2r^2$), centrífugo ($= l^2/2\mu r^2$) y efectivo ($= -k/2r^2 + l^2/2\mu r^2$) en función de r . Se hizo $k = 1$, $l = 1$ y $\mu = 1$.

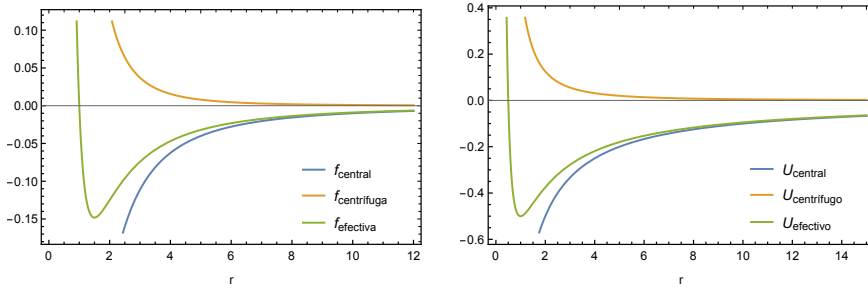
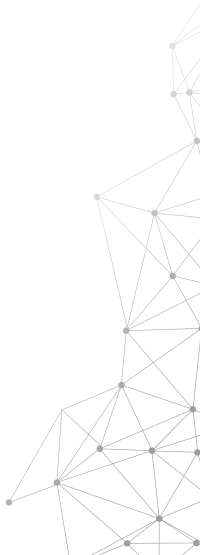


Figura 5.4: *Izquierda:* Fuerzas central ($= -k/r^2$), centrífuga ($= l^2/\mu r^3$) y efectiva ($= -k/r^2 + l^2/\mu r^3$) en función de r . *Derecha:* Potenciales central ($= -k/r$), centrífugo ($= l^2/2\mu r^2$) y efectivo ($= -k/r + l^2/2\mu r^2$) en función de r . Se tomó $k = 1$, $l = 1$ y $\mu = 1$.



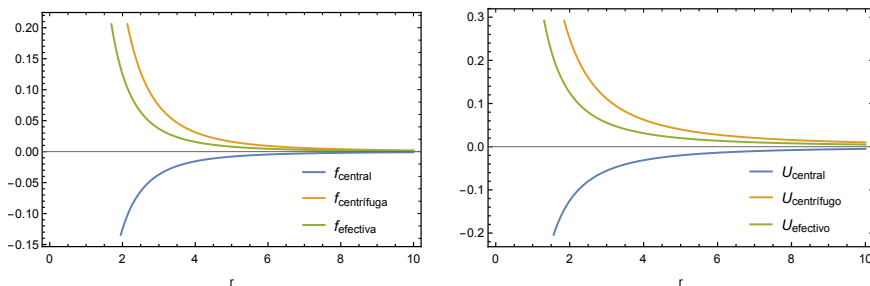


Figura 5.5: *Izquierda:* Fuerzas central ($= -k/r^3$), centrífuga ($= l^2/\mu r^3$) y efectiva ($= -kr^3 + l^2/\mu r^3$) en función de r . *Derecha:* Potenciales central ($= -k/2r^2$), centrífugo ($= l^2/2\mu r^2$) y efectivo ($= -k/2r^2 + l^2/2\mu r^2$) en función de r . Se tomó $k = 1$, $l = 2$ y $\mu = 2$.

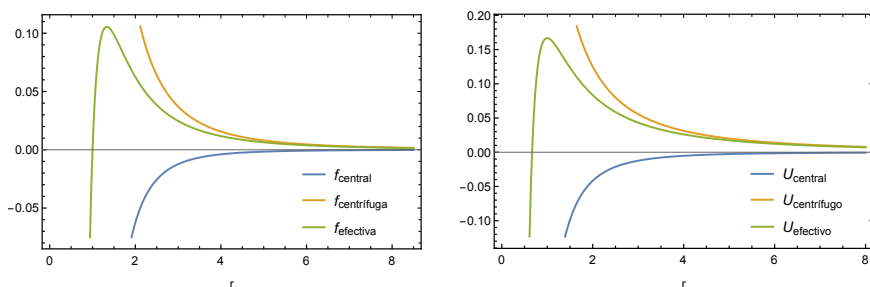
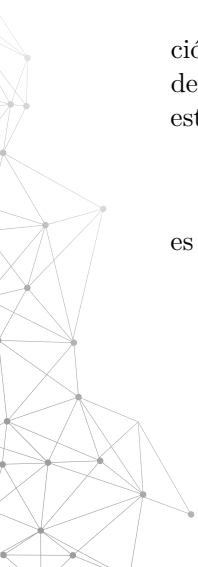


Figura 5.6: *Izquierda:* Fuerzas central ($= -k/r^4$), centrífuga ($= l^2/\mu r^3$) y efectiva ($= -kr^4 + l^2/\mu r^3$) en función de r . *Derecha:* Potenciales central ($= -k/3r^3$), centrífugo ($= l^2/2\mu r^2$) y efectivo ($= -k/3r^3 + l^2/2\mu r^2$) en función de r . Se tomó $k = 1$, $l = 1$ y $\mu = 1$.

Por su parte, la fuerza central $f = -k/r^3$ (ver **Figura 5.5**) amerita atención especial. En este caso, la fuerza central tiene la misma dependencia radial de la fuerza centrífuga ($= l^2/\mu r^3$). La fuerza efectiva $f_{\text{ef}} = f_{\text{central}} + f_{\text{centrifuga}}$ está dada por

$$f_{\text{ef}} = -\frac{k}{r^3} + \frac{l^2}{\mu r^3} = \left(\frac{l^2}{\mu} - k \right) \frac{1}{r^3} = \frac{h}{r^3};$$

es decir, la fuerza efectiva también tiene la misma dependencia radial ($1/r^3$).



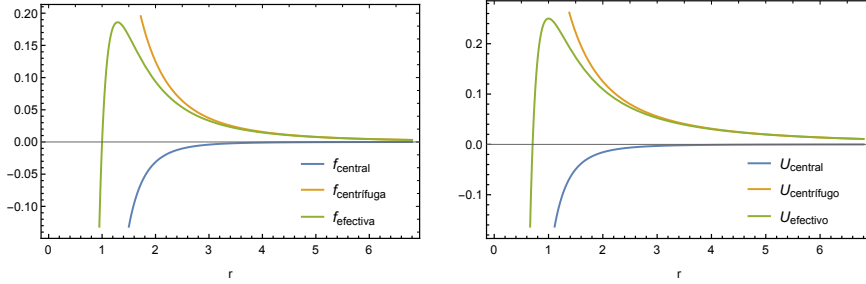


Figura 5.7: *Izquierda:* Fuerzas central ($= -k/r^5$), centrífuga ($= l^2/\mu r^3$) y efectiva ($= -kr^5 + l^2/\mu r^3$) en función de r . *Derecha:* Potenciales central ($= -k/4r^4$), centrífugo ($= l^2/2\mu r^2$) y efectivo ($= -k/4r^4 + l^2/2\mu r^2$) en función de r . Se tomó $k = 1$, $l = 1$ y $\mu = 1$.

El potencial efectivo $U_{\text{ef}} = U_{\text{central}} + U_{\text{centrifugo}}$ está dado por

$$U_{\text{ef}} = -\frac{k}{2r^2} + \frac{l^2}{2\mu r^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{l^2}{\mu} - k \right) \frac{1}{r^2} = \frac{h}{2r^2}.$$

Así, los potenciales efectivo, central y centrífugo tienen la misma dependencia radial ($1/r^2$). Obsérvese que si $l^2/\mu = k$, la fuerza efectiva f_{ef} y el potencial efectivo U_{ef} son cero. Además, el signo de $l^2/\mu - k \equiv h$ determina la naturaleza de la órbita. En la **Figura 5.5** se tomó $l^2/\mu - k \equiv h > 0$.

Para terminar esta sección se analizará en cuáles puntos el potencial efectivo tiene un máximo o un mínimo o, equivalentemente, $f_{\text{ef}} = 0$. Para hallar estos puntos (llamados críticos) se deriva a U_{ef} con respecto a r y se iguala a cero esta derivada:

$$\begin{aligned} U_{\text{ef}} &= -\frac{k}{(n-1)r^{n-1}} + \frac{l^2}{2\mu r^2}, \\ \frac{dU_{\text{ef}}}{dr} &= \frac{k}{r^n} - \frac{l^2}{\mu r^3} = 0; \end{aligned}$$

de donde se obtiene que los puntos críticos están dados por la expresión:

$$r_{\text{critico}} = \left(\frac{k\mu}{l^2} \right)^{\frac{1}{n-3}}, \quad (5.16)$$



la cual depende de n si se fijan a k , μ y l . En la **Figura 5.8** se muestra la variación del punto donde el U_{ef} tiene un valor máximo o mínimo (punto crítico) con respecto a n . En la figura de la izquierda se hizo $k = 3$, $\mu = 4$ y $l = 2$ de tal forma que $l^2/\mu < k$, mientras que en la figura de la derecha se hizo $k = 1$, $\mu = 2$ y $l = 2$, obteniéndose que $l^2/\mu > k$. En ambos casos, el valor crítico de r tiende a 1 para valores grandes de n .

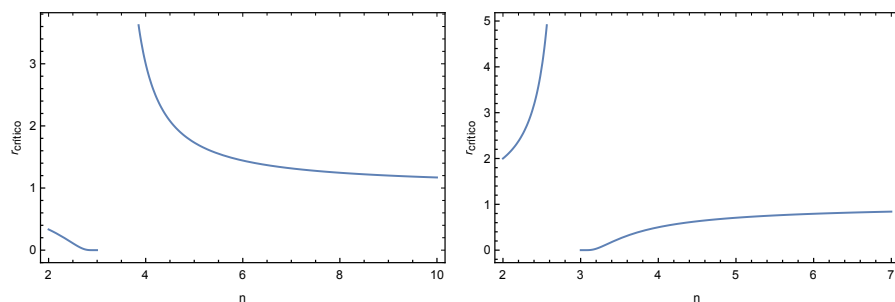


Figura 5.8: Variación del punto crítico de U_{ef} con relación a n . En la figura de la izquierda se hizo $k = 3$, $l = 2$ y $\mu = 4$ y en la de la derecha se tomó $k = 1$, $l = 2$ y $\mu = 2$.

Código en *Mathematica* para la Figura 5.8

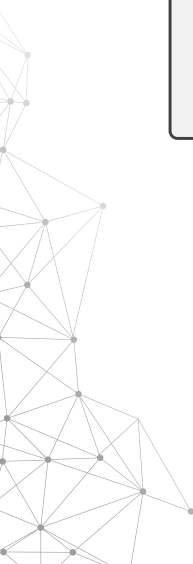
Hallar el punto crítico:

```
In[1]:= Solve[D[- $\frac{k}{(n-1)r^{n-1}}$  +  $\frac{l^2}{2\mu r^2}$ , r] == 0, r]
```

```
Out[1]= {{r -> ( $\frac{k\mu}{l^2}$ ) $^{\frac{1}{-3+n}}$ }}
```

Código **Gráfica 5.8** para $k = 3$, $l = 2$ y $\mu = 4$:

```
In[2]:= Plot[(3) $^{\frac{1}{-3+n}}$ , {n, 2, 10}, Frame->True, FrameStyle->Black,
FrameLabel -> {"n", r_critico}]
```





5.4. Ecuación diferencial de la órbita y potenciales integrables.

Las dos ecuaciones de Lagrange (ecuaciones diferenciales de segundo orden) conducen a $\theta = \theta(t)$ y $r = r(t)$. Sin embargo, se requiere conocer la **ecuación de la órbita**, es decir, la dependencia entre r y θ , eliminando el parámetro t entre estas coordenadas. A continuación se obtendrá dicha ecuación.

Primer camino. $\mu r^2 \dot{\theta} = l$ implica $dt = \frac{\mu r^2}{l} d\theta$. Al sustituir esta expresión en la **Ecuación (5.11)** se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\mu r^2}{l} d\theta &= \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - U - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}}, \\ \theta - \theta_0 &= \int_{r_0}^r \frac{dr}{\left(\frac{\mu r^2}{l} \right) \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - U - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Si se efectúa el cambio de variable $u = \frac{1}{r}$ (esta relación implica $du = -dr/r^2$) y se introduce en el radical la cantidad μ/l se obtiene:

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} - \frac{2\mu U}{l^2} - u^2}}. \quad (5.18)$$

Esta expresión permite obtener, en principio, la ecuación de la órbita si se conoce el potencial central $U(r) = U(1/u)$.

Segundo camino. En la ecuación diferencial para la coordenada r (ver **Ecuación (5.8)**) se pasa del operador $\frac{d^2}{dt^2}$ al operador $\frac{d^2}{d\theta^2}$, aplicando regla de la cadena consecutivamente dos veces de la siguiente forma:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta}; \quad (5.19)$$





$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 r}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right), \\
 &= \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dr}{dt} \right) \frac{d\theta}{dt}, \\
 &= \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{l}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta} \right), \\
 &= \frac{l^2}{\mu^2 r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right).
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

Como $\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right)$, se obtiene

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{l^2}{\mu^2 r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{l^2}{\mu^2} u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}, \tag{5.21}$$

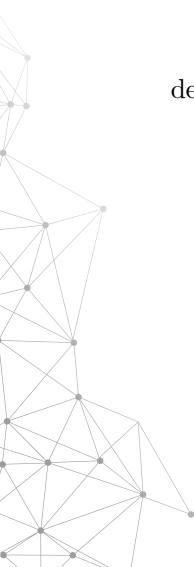
con $u = 1/r$.

Esto nos lleva a la ecuación diferencial de la órbita con el siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned}
 \mu \frac{d^2 r}{dt^2} &= \frac{l^2}{\mu r^3} + f(r), \\
 \mu \left[-\frac{l^2}{\mu^2} u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right] &= \frac{l^2}{\mu} u^3 + f(1/u), \\
 -\frac{l^2}{\mu} u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - \frac{l^2}{\mu} u^3 &= f(1/u), \\
 -\frac{l^2}{\mu} u^2 \left[\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right] &= f(1/u), \\
 \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u &= -\frac{\mu}{l^2} \frac{f(1/u)}{u^2},
 \end{aligned}$$

de donde se obtiene, finalmente, la *ecuación diferencial de la órbita*:

$$\begin{aligned}
 \frac{l^2}{\mu} u^2 \left[\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right] &= -f(1/u), \\
 \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u &= -\frac{\mu}{l^2} \frac{dU(1/u)}{du}.
 \end{aligned} \tag{5.22}$$





Para obtener la **Ecuación (5.22)** debe tenerse en cuenta que $f = -\frac{dU}{dr} = -\frac{dU}{du} \frac{du}{dr} = u^2 \frac{dU}{du}$.

La **Ecuación (5.22)** se puede utilizar en dos direcciones: **(a)** Para hallar la ecuación de la órbita si se conoce a f (o a U); **(b)** Para hallar a f (o U) si se conoce la ecuación diferencial de la órbita.

Por otra parte, según la **Ecuación (5.22)**, la órbita es *simétrica* respecto a los puntos de inversión. Es decir, la órbita es invariante ante una reflexión respecto a los vectores apsidales (la ecuación diferencial de la órbita es la misma para θ y $-\theta$).

Por último, la ecuación del lado derecho en **(5.22)** se reduce a la ecuación diferencial del oscilador libre cuando $\frac{dU}{du}$ es proporcional a u , lo cual se da cuando $U = ku^2$ (es decir, $U \sim \frac{1}{r^2}$). En este caso, se obtiene

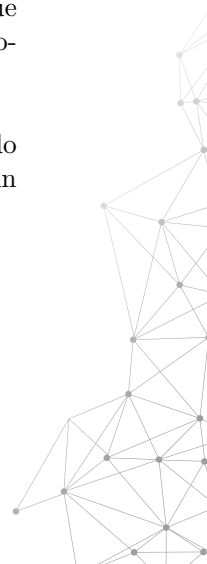
$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\theta^2} + u &= -\frac{\mu}{l^2}(2ku) \\ \frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(1 + \frac{2k\mu}{l^2}\right)u &= 0.\end{aligned}$$

Tercer camino. $d\theta = \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dr} dr = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} dr$ y se reemplaza a $\dot{\theta}$ y $\dot{r}$ por:

$$\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}, \quad \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - U - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}.$$

Pregunta. ¿En qué casos es relativamente sencillo realizar la integral que aparece en la ecuación de la órbita (ver **Ecuación (5.18)**), mediante funciones conocidas?

Respuesta. Cuando la cantidad subradical es un polinomio de 2.º grado la integral se puede efectuar mediante funciones circulares, y cuando es un polinomio de 4.º grado, la integral se expresa mediante funciones elípticas.





Ejercicio

5.2 Considerando $U(r) = ar^{n+1}$ demuestre que **(a)** $n = -3, -2, 1$ conduce a funciones simples -circulares- y **(b)** $n = -7, -5, -4, 0, 3, 5$ conduce a integrales elípticas. Además, si la fuerza es una función proporcional a r^n , donde n es un fraccionario, demuestre que $n = -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}$ también conduce a integrales elípticas.

En $U(r) = ar^{n+1}$ se excluye a $n = -1$ porque se obtiene un potencial constante y, por consiguiente, $f = 0$.

Ejemplo 5.1

Obtener la ecuación de la órbita de una partícula sometida a un potencial central $U(r) = (1/2)kr^2$ (oscilador armónico isótropo).

Solución. La fuerza central correspondiente a este potencial es $f(r) = -kr$. En la **Figura 5.3** se muestra el potencial efectivo y la fuerza efectiva asociados al potencial del oscilador armónico isótropo.

Haciendo $n = -1$ en la **Ecuación (5.16)** se obtiene que en

$$r_{critico} = \left(\frac{k\mu}{l^2} \right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{l^2}{k\mu} \right)^{\frac{1}{4}} \equiv r_0$$

el potencial efectivo es mínimo. Reemplazando a r por r_0 en $U_{ef}(r)$, se obtiene





el mínimo de este potencial:

$$\begin{aligned}
 U_{ef}(r = r_0) &= \frac{1}{2}kr_0^2 + \frac{l^2}{2\mu r_0^2}, \\
 &= \frac{k\mu r_0^4 + l^2}{2\mu r_0^2}, \\
 &= \frac{k\mu \left(\frac{l^2}{k\mu}\right) + l^2}{2\mu \left(\frac{l^2}{k\mu}\right)^{1/2}}, \\
 &= \frac{l^2}{\mu} \sqrt{\frac{k\mu}{l^2}}, \\
 &= \sqrt{\frac{kl^2}{\mu}}.
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

La energía total E debe ser mayor o igual que $U_{ef}(r = r_0)$:

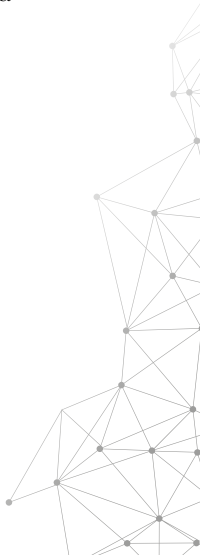
$$E \geq \sqrt{\frac{kl^2}{\mu}}. \tag{5.24}$$

La ecuación de la órbita se puede hallar reemplazando a $U(r)$ en la integral que aparece en la **Ecuación (5.17)**:

$$\theta - \theta_0 = \int \frac{dr}{\left(\frac{\mu r^2}{l}\right) \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - \frac{1}{2}kr^2 - \frac{l^2}{2\mu r^2}\right)}}. \tag{5.25}$$

Haciendo el cambio de variable $r = \sqrt{u}$, lo cual implica $dr = du/2\sqrt{u}$, la ecuación anterior se transforma en

$$\begin{aligned}
 \theta - \theta_0 &= \int \frac{du}{2\sqrt{u} \left(\frac{\mu u}{l}\right) \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - \frac{1}{2}ku - \frac{l^2}{2\mu u}\right)}}, \\
 \theta - \theta_0 &= \frac{l}{2} \int \frac{du}{u \sqrt{-k\mu u^2 + 2\mu Eu - l^2}}.
 \end{aligned}$$





Definiendo $A = -k\mu$, $B = 2\mu E$ y $C = -l^2$ la integral se expresa como:

$$\int \frac{du}{u\sqrt{Au^2 + Bu + C}} = \frac{1}{\sqrt{-C}} \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{Bu + 2C}{u\sqrt{B^2 - 4AC}} \right),$$

de donde se obtiene:

$$\begin{aligned} \theta - \theta_0 &= \frac{l}{2} \frac{1}{\sqrt{l^2}} \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{2\mu Eu - 2l^2}{u\sqrt{4\mu^2 E^2 - 4(-k\mu)(-l^2)}} \right), \\ 2(\theta - \theta_0) &= \operatorname{sen}^{-1} \left[\frac{2\mu E(u - \frac{l^2}{\mu E})}{u\sqrt{4\mu^2 E^2 \left(1 - \frac{kl^2}{\mu E^2}\right)}} \right], \\ 2(\theta - \theta_0) &= \operatorname{sen}^{-1} \left[\frac{u - \frac{l^2}{\mu E}}{u\sqrt{1 - \frac{kl^2}{\mu E^2}}} \right], \\ 2(\theta - \theta_0) &= \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{u - \alpha^2}{u\epsilon} \right), \\ \operatorname{sen} 2(\theta - \theta_0) &= \frac{u - \alpha^2}{u\epsilon}, \\ u\epsilon \operatorname{sen} 2(\theta - \theta_0) &= u - \alpha^2, \\ u[1 - \epsilon \operatorname{sen} 2(\theta - \theta_0)] &= \alpha^2, \end{aligned}$$

con $\alpha^2 = l^2/\mu E$ y la excentricidad ϵ dada por

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{kl^2}{\mu E^2}}.$$

Obsérvese que, como $E \geq \sqrt{\frac{kl^2}{\mu}}$, la excentricidad toma valores entre 0 y 1.

Como $u = r^2$, se obtiene que la ecuación de la órbita está dada por

$$r = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \epsilon \operatorname{sen} [2(\theta - \theta_0)]}}, \quad (5.26)$$

la cual corresponde a una elipse (ver **Figura 5.9**). Este tipo de trayectoria también se evidencia cualitativamente para energías mayores que uno, en la

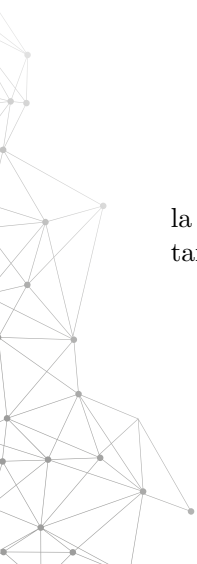


Figura 5.3 derecha.

Cuando $\sin 2(\theta - \theta_0) = 1$ y $\sin 2(\theta - \theta_0) = -1$ se obtienen, respectivamente, las distancias máxima y mínima del cuerpo al centro de fuerzas:

$$r_{max} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \epsilon}},$$

$$r_{min} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \epsilon}}.$$

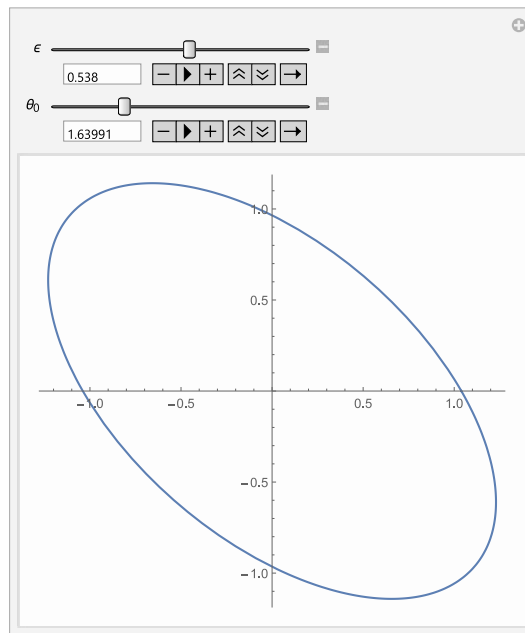


Figura 5.9: Órbita para partícula sometida a un potencial $U = (1/2)kr^2$ dada por la **Ecuación 5.26** con $\alpha = 1$.

A continuación se escribirá la **Ecuación (5.26)** en coordenadas cartesianas con el objetivo de verificar que corresponde a una elipse. Para ello, se escribirá



$\text{sen } 2(\theta - \theta_0)$ en coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}
 \text{sen } 2(\theta - \theta_0) &= 2 \text{sen}(\theta - \theta_0) \cos(\theta - \theta_0), \\
 &= 2[\text{sen } \theta \cos \theta_0 - \cos \theta \text{sen } \theta_0][\cos \theta \cos \theta_0 + \text{sen } \theta \text{sen } \theta_0], \\
 &= 2[\text{sen } \theta \cos \theta \cos^2 \theta_0 + \text{sen}^2 \theta \cos \theta_0 \text{sen } \theta_0 - \cos^2 \theta \text{sen } \theta_0 \cos \theta_0 \\
 &\quad - \cos \theta \text{sen } \theta \text{sen}^2 \theta_0], \\
 &= 2[\text{sen } \theta \cos \theta (\cos^2 \theta_0 - \text{sen}^2 \theta_0) + \text{sen}^2 \theta \cos \theta_0 \text{sen } \theta_0 - \\
 &\quad \cos^2 \theta \text{sen } \theta_0 \cos \theta_0], \\
 &= 2 \cos(2\theta_0) \text{sen } \theta \cos \theta + \text{sen}(2\theta_0) \text{sen}^2 \theta - \text{sen}(2\theta_0) \cos^2 \theta, \\
 \text{sen } 2(\theta - \theta_0) &= A \left(\frac{y}{r} \right) \left(\frac{x}{r} \right) + B \frac{y^2}{r^2} - B \frac{x^2}{r^2}; \tag{5.27}
 \end{aligned}$$

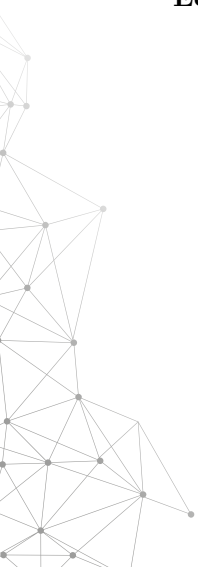
con $A = 2 \cos(2\theta_0)$ y $B = \text{sen}(2\theta_0)$. Elevando al cuadrado a la **Ecuación (5.26)** y utilizando el resultado anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 [1 - \epsilon \text{sen } 2(\theta - \theta_0)] r^2 &= \alpha^2, \\
 \left[1 - \epsilon \frac{Axy + By^2 - Bx^2}{r^2} \right] r^2 &= \alpha^2, \\
 x^2 + y^2 - \epsilon Axy - \epsilon By^2 + \epsilon Bx^2 &= \alpha^2, \\
 (1 + \epsilon B)x^2 + (1 - \epsilon B)y^2 - \epsilon Axy &= \alpha^2. \tag{5.28}
 \end{aligned}$$

De esta manera, se verifica que la **Expresión (5.26)**, expresada en la forma **5.28**, corresponde a la ecuación de una elipse en coordenadas cartesianas.

Caso especial. Si $\theta_0 = \pi/4$, se obtienen $A = 0$ y $B = 1$, con lo que la **Ecuación 5.28** se transforma en

$$\frac{x^2}{\frac{\alpha^2}{1+\epsilon}} + \frac{y^2}{\frac{\alpha^2}{1-\epsilon}} = 1.$$





Código en Mathematica para la Figura 5.9

Código Figura 5.9 con $\alpha = 1$

```
In[4]:= Manipulate[PolarPlot[ $\frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon \sin[2(\theta - \theta_0)]}}$ , { $\theta$ , 0, 2 $\pi$ },
Frame→True, FrameStyle→Black, FrameLabel → {" $\theta$ ", " $r$ "},
{ $\epsilon$ , 0,001,0.999}, { $\theta_0$ , 0, 2 $\pi$ }]
```

Ejemplo 5.2

Una partícula sometida a una fuerza central describe una órbita dada por la espiral logarítmica $r = ke^{\rho\theta}$. Encontrar la expresión para la fuerza y el potencial.

Solución.

En este caso nos dan la expresión de la órbita. A partir de la ecuación diferencial de la órbita se puede hallar a $f(r)$:

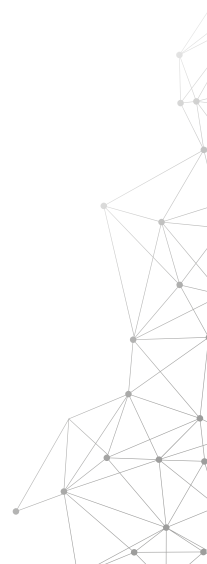
$$f(1/u) = -\left(\frac{l^2}{\mu}\right) u^2 \left[\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right];$$

Por lo tanto, necesitamos hallar a $\frac{du}{d\theta}$ y luego a $\frac{d^2 u}{d\theta^2}$. Como $r = ke^{\rho\theta}$, entonces,
 $u = \frac{1}{k} e^{-\rho\theta}$:

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= -\frac{\rho}{k} e^{-\rho\theta}, \\ \frac{d^2 u}{d\theta^2} &= \frac{\rho^2}{k} e^{-\rho\theta} = \rho^2 u. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} f(1/u) &= -\left(\frac{l^2}{\mu}\right) u^2 (\rho^2 u + u), \\ f(1/u) &= -\frac{l^2(1 + \rho^2)}{\mu} u^3. \end{aligned}$$





La fuerza en función de r es:

$$f(r) = -\frac{l^2(1+\rho^2)}{\mu} \frac{1}{r^3};$$

y el potencial está dado por:

$$\begin{aligned} f(r) &= -\frac{dU}{dr}, \\ U(r) &= -\int f(r)dr, \\ U(r) &= -\frac{l^2(1+\rho^2)}{2\mu} \frac{1}{r^2}. \end{aligned}$$

5.5. Condiciones para órbitas circulares y estables.

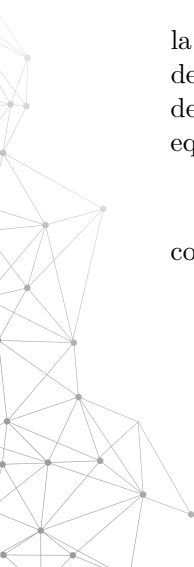
Si recordamos que $E - U_{\text{ef}} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$, se concluye que para fuerzas centrales atractivas se obtienen órbitas circulares cuando $E = U_{\text{ef}}$ ya que en este caso, $\dot{r} = 0$, es decir, la distancia r de la partícula al centro de fuerzas es constante.

Equivalentemente, en esta situación $f_{\text{ef}} = -\frac{dU_{\text{ef}}}{dr} = 0$. Si el radio de la órbita circular es r_0 , el momento cinético l y la energía E están dados por (recuérdese que si $f_{\text{ef}} = 0 \rightarrow f(r) = -\frac{l^2}{\mu r^3}$):

$$f(r_0) = -\frac{l^2}{\mu r_0^3} \quad y \quad E = U_{\text{ef}} = U(r_0) + \frac{l^2}{2\mu r_0^2}. \quad (5.29)$$

El carácter de la órbita circular depende de si $U_{\text{ef}}(r_0)$ es máximo o mínimo y la estabilidad de la órbita circular está determinada por el signo de la segunda derivada de U_{ef} (recuérdese que una función tiene un mínimo si la segunda derivada es positiva en el punto crítico. Y un mínimo en el potencial indica equilibrio estable).

Por lo tanto, se tiene una órbita circular estable si $\left(\frac{d^2U_{\text{ef}}}{dr^2}\right)_{r=r_0} > 0$. Esta condición implica lo siguiente:





$$\begin{aligned}
 U_{\text{ef}} &= U + \frac{l^2}{2\mu r^2}, \\
 \frac{dU_{\text{ef}}}{dr} &= \frac{dU}{dr} - \frac{l^2}{\mu r^3} = -f(r) - \frac{l^2}{\mu r^3}, \\
 \frac{d^2U_{\text{ef}}}{dr^2} &= -\frac{df}{dr} + \frac{3l^2}{\mu r^4} > 0, \\
 -\frac{df}{dr} &> \frac{3}{r} \left(-\frac{l^2}{\mu r^3} \right), \\
 -\frac{df}{dr} &> \frac{3}{r} f, \\
 \frac{df}{dr} &< -\frac{3}{r} f.
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

Esta inecuación da la condición para que la órbita sea circular y estable.

Supongamos ahora que la fuerza tiene la dependencia con respecto a r de la forma

$$f = -\frac{k}{r^n}.$$

De la condición para órbitas circulares estables se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{df}{dr} &< -\frac{3}{r} f, \\
 \frac{d[-kr^{-n}]}{dr} &< -\frac{3}{r} \left(-\frac{k}{r^n} \right), \\
 \frac{kn}{r^{n+1}} &< \frac{3k}{r^{n+1}}.
 \end{aligned}$$

La inecuación anterior implica $n < 3$. Por lo tanto, un potencial atractivo que cumpla una ley potencial que varíe más lentamente que $\frac{1}{r^2}$ dará *órbitas circulares estables* para todos los valores de r_0 .

Pregunta. Qué forma debe tener la ley de la fuerza para que la órbita ligeramente perturbada respecto a cualquiera de estas órbitas circulares sea cerrada?





Respuesta. Para pequeñas desviaciones de las condiciones de circularidad, la partícula ejecuta un movimiento armónico simple en u alrededor de u_0 : $u = u_0 + a \cos \beta \theta$, donde

$$\beta^2 = 3 + \frac{r}{f} \left(\frac{df}{dr} \right)_{r=r_0}. \quad (5.31)$$

Reordenando la expresión anterior se obtiene:

$$\frac{dLn f}{dLn r} = \beta^2 - 3 \quad \Rightarrow \quad f(r) = -\frac{k}{r^{3-\beta^2}}. \quad (5.32)$$

Todas las leyes de la fuerza de esta forma, donde β es un número racional, conducen a órbitas cerradas para condiciones iniciales que difieren un poco de las condiciones para órbitas circulares. Este procedimiento corresponde al *teorema de Bertrand*.

Las únicas fuerzas centrales que dan lugar a órbitas cerradas para todas las partículas ligadas son la *inversamente proporcional al cuadrado* ($\beta^2 = 1$) y la *ley de Hooke* ($\beta^2 = 4$).

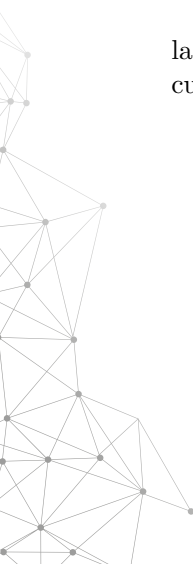
Ejercicio

5.3 ¿Qué tipo de movimiento se genera con $\beta = 5$ y $\beta = \frac{5}{3}$?

Ejemplo 5.3

Considere una fuerza central de la forma $f(r) = -(k/r^2)e^{-r/a}$. Encuentre la condición que debe cumplir la constante a para que el movimiento sea circular y estable.

Solución.





A partir de la condición para que la órbita sea circular y estable se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dr} &< -\frac{3}{r}f, \\ -k \left[-\frac{2}{r^3}e^{-r/a} - \left(\frac{1}{a}\right) \frac{1}{r^2}e^{-r/a} \right] &< -\frac{3}{r} \left(-\frac{ke^{-r/a}}{r^2} \right), \\ ke^{-r/a} \left[\frac{2}{r^3} + \frac{1}{ar^2} \right] &< ke^{-r/a} \left(\frac{3}{r^3} \right), \\ \frac{2}{r^3} + \frac{1}{ar^2} &< \frac{3}{r^3}, \\ \frac{1}{ar^2} &< \frac{1}{r^3}.\end{aligned}$$

A partir de este resultado se obtiene que la constante a debe cumplir la condición $a > r$.

Generalización. Suponiendo que la fuerza es $f(r) = -(k/r^n)e^{-r/a}$, la condición para que la órbita sea circular y estable da como resultado $r < (3 - n)a$. Así, para $n = 1$, se obtiene órbita circular estable cuando $r < 2a$; para $n = 2$, cuando $r < a$. Para $n > 3$ no hay órbitas circulares.

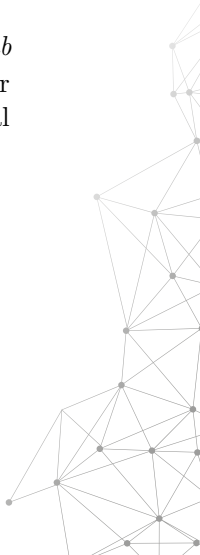
Pregunta. ¿Cuáles son las unidades de a y k ?

Ejercicio

5.4 Como complemento al ejemplo anterior, estudie detalladamente la estabilidad de órbitas circulares cuando el potencial central sea

$$U(r) = -\frac{k}{r}e^{-r/a}.$$

A este potencial se le conoce como *potencial de Yukawa* o *potencial de Coulomb apantallado*. Hacer un análisis cualitativo de la gráfica U_{ef} vs r . Establecer una comparación entre $1/r$ y $e^{-r/a}$, obtener el valor mínimo para el potencial efectivo y la ecuación diferencial de la órbita.





5.6. Problema de Kepler: fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

El objetivo en este problema es hallar la ecuación de la órbita cuando $f(r) = -\frac{k}{r^2}$ o equivalentemente $U(r) = -\frac{k}{r}$. Para ello, podemos tomar dos caminos:

Primer camino. A partir de la ecuación diferencial de la órbita (**Ecuación. (5.22)**), sustituyendo la expresión para la fuerza en términos de u : $f(1/u) = -ku^2$. Esta sustitución nos lleva a la ecuación general de una cónica con un foco en el origen. Veamos el procedimiento:

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\theta^2} + u &= -\frac{\mu}{l^2 u^2} (-ku^2), \\ \frac{d^2u}{d\theta^2} + u &= \frac{\mu k}{l^2}, \\ \frac{d^2u}{d\theta^2} + u - \frac{\mu k}{l^2} &= 0.\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $X = u - \frac{\mu k}{l^2}$ en la ecuación diferencial anterior se llega a

$$\frac{d^2X}{d\theta^2} + X = 0.$$

Esta expresión corresponde a una ecuación diferencial análoga a la de un oscilador armónico simple, con $\omega_0 = 1$. Su solución es

$$\begin{aligned}X &= B \cos(\theta - \theta_0), \\ u - \frac{\mu k}{l^2} &= B \cos(\theta - \theta_0), \\ u &= \frac{\mu k}{l^2} + B \cos(\theta - \theta_0).\end{aligned}$$

Así, se obtiene, en función de r , la expresión

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2} \left[1 + \frac{Bl^2}{\mu k} \cos(\theta - \theta_0) \right] \Leftrightarrow \frac{1}{r} = C(1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)), \quad (5.33)$$

donde B y θ' son constantes de integración y ϵ es la excentricidad de la cónica.





Segundo camino. Resolviendo la integral que aparece en la expresión $\theta = \theta(r)$ (ver **Ecuación (5.18)**) se obtiene:

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} - \frac{2\mu U}{l^2} - u^2}}, \\ &= \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} - \frac{2\mu(-ku)}{l^2} - u^2}}, \\ &= \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{c + bu + au^2}},\end{aligned}$$

donde $a = -1$, $b = \frac{2\mu k}{l^2}$ y $c = \frac{2\mu E}{l^2}$. Por medio de la fórmula

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \cos^{-1} \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \right),$$

se obtiene, con un poco de procedimiento algebraico, la expresión que describe la ecuación de la órbita:

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \cos(\theta - \theta_0) \right]. \quad (5.34)$$

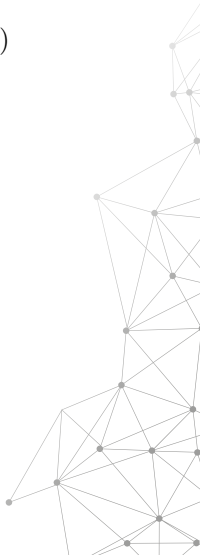
Este camino permite relacionar la excentricidad ϵ con la energía E y el momento cinético l , donde la excentricidad está dada por:

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}. \quad (5.35)$$

Así, la expresión de la órbita, **Ecuación (5.34)**, se puede escribir como:

$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)}, \quad (5.36)$$

con $\alpha = l^2/\mu k$.





Teniendo en cuenta que $-1 \leq \cos(\theta - \theta_0) \leq 1$, cuando $\cos(\theta - \theta_0) = -1$ se obtiene $r_{\max}$ y para $\cos(\theta - \theta_0) = +1$ se obtiene $r_{\min}$:

$$\begin{aligned} r_{\max} &= \frac{\alpha}{1 - \epsilon}, \\ r_{\min} &= \frac{\alpha}{1 + \epsilon}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Ejercicio

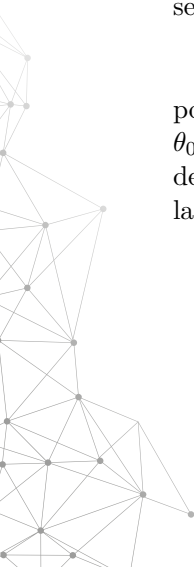
5.5 Hacer explícitamente el desarrollo matemático para obtener la **Ecuación (5.34)**.

A continuación se analizará la expresión para la excentricidad dada por la **Ecuación (5.35)**:

- Para $\epsilon > 1$, $E > 0$. En este caso la trayectoria de la partícula corresponde a una *hipérbola*.
- Para $\epsilon = 1$, $E = 0$. La trayectoria es una *parábola*.
- Para $0 < \epsilon < 1$, $(U_{ef})_{\min} < E < 0$. La trayectoria es una *elipse*.
- $\epsilon = 0$, $E = (U_{ef})_{\min}$. La trayectoria es una *circunferencia*.

En el caso de $\epsilon = 0$ (*órbitas circulares*), $E = -\frac{\mu k^2}{2l^2}$, lo cual indica que solo se obtienen órbitas circulares cuando la energía total es negativa.

En las **Figuras 5.10 y 5.11** se muestra la órbita que sigue el cuerpo, dada por la **Ecuación (5.34)**, asignando valores diferentes a la excentricidad ϵ y a θ_0 , con $\mu = 1$, $k = 1$ y $l = 1$. Se observa que la inclinación de la órbita está determinado por el valor de θ_0 . Únicamente en el caso de $\epsilon = 0$, la órbita tiene la misma inclinación, independiente del valor de θ_0 .



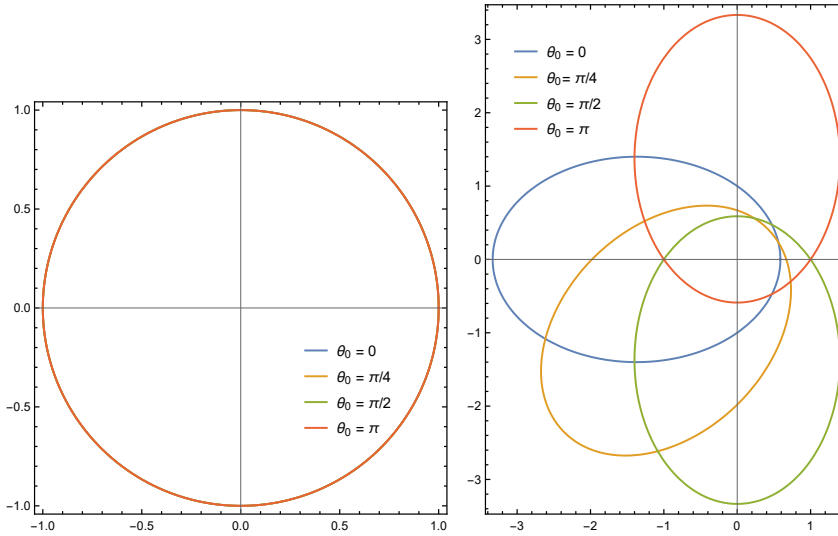


Figura 5.10: *Izquierda:* Órbitas para $\epsilon = 0$; *Derecha:* Órbitas para $\epsilon = 0,7$.

Código en Mathematica para las Figuras 5.10 y 5.11

Código Figuras 5.10 y 5.11, con $k = 1$, $l = 1$ y $\mu = 1$ en la Ecuación (5.36):

```
In[6]:= Manipulate[PolarPlot[ $\frac{1}{1 + \epsilon \text{Cos}[\theta - \theta_0]}$ , { $\theta$ , 0, 2 $\pi$ },
  Frame→True, FrameStyle→Black], { $\epsilon$ , 0, 5}, { $\theta_0$ , 0, 2 $\pi$ }]
```

Para órbitas elípticas: La velocidad radial es nula en los puntos apsidales, es decir, $\dot{r}_a = 0$ en dichos puntos (con r_a el vector posición para los puntos apsidales). Por lo tanto, a partir de la expresión para la energía E obtenemos:

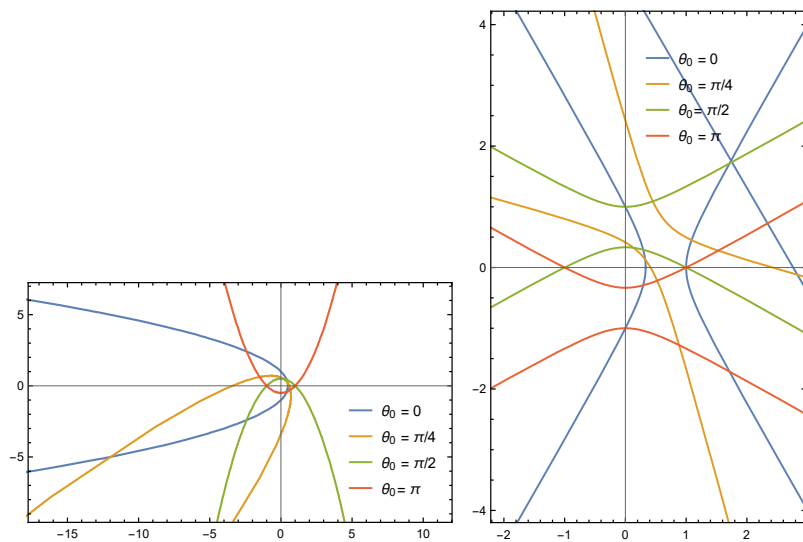
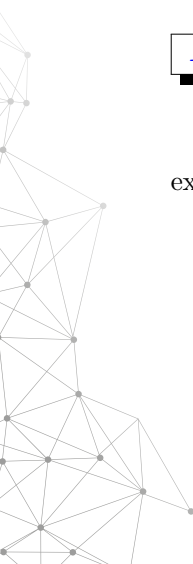


Figura 5.11: *Izquierda:* Órbitas para $\epsilon = 1$. ; *Derecha:* Órbitas para $\epsilon = 2$

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2}\mu\dot{r}_a^2 + \frac{l^2}{2\mu r_a^2} - \frac{k}{r_a}, \\
 E - \frac{l^2}{2\mu r_a^2} + \frac{k}{r_a} &= 0, \\
 r_a^2 + \frac{k}{E}r_a - \frac{l^2}{2\mu E} &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

Ejemplo 5.4

Obtener las raíces de la **Ecuación cuadrática (5.38)** en función de la excentricidad.





Solución.

Asumiendo que $a = 1$, $b = k/E$ y $c = -l^2/(2\mu E)$, la **Ecuación (5.38)** adopta la forma $ar_a^2 + br_a + c = 0$, cuya solución es

$$\begin{aligned}(r_a)_\pm &= \frac{-\frac{k}{E} \pm \sqrt{\frac{k^2}{E^2} - 4(1)\left(-\frac{l^2}{2\mu E}\right)}}{2} = \frac{-\frac{k}{E} \pm \sqrt{\frac{k^2}{E^2} + \left(\frac{2l^2}{\mu E}\right)}}{2}, \\(r_a)_\pm &= \frac{-\frac{k}{E} \pm \sqrt{\frac{k^2}{E^2} \left(1 + \frac{2l^2 E}{\mu k^2}\right)}}{2} = \frac{-\frac{k}{E} \pm \frac{k}{E}\epsilon}{2}, \\(r_a)_\pm &= \frac{k}{2E}(-1 \pm \epsilon).\end{aligned}$$

A partir de la definición de la excentricidad, dada por la **Ecuación (5.35)**, se obtiene que la energía total E está dada por

$$E = \frac{\mu k^2}{2l^2}(\epsilon^2 - 1);$$

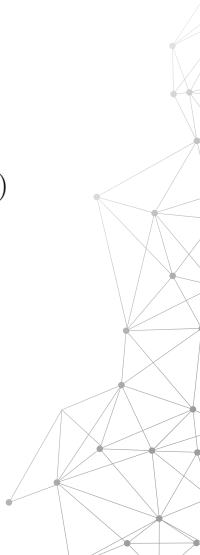
sustituyendo esta expresión en la de las raíces se llega a

$$\begin{aligned}(r_a)_+ &= \frac{l^2}{\mu k} \left(\frac{1}{\epsilon + 1} \right) = \frac{\alpha}{1 + \epsilon} \equiv r_{\min}, \\(r_a)_- &= -\frac{l^2}{\mu k} \left(\frac{1}{\epsilon - 1} \right) = \frac{\alpha}{1 - \epsilon} \equiv r_{\max},\end{aligned}$$

donde $\alpha = l^2/\mu k$. Este resultado se obtuvo de forma general a través de las **Ecuaciones (5.37)**.

Los semiejes mayor (a) y menor (b) de la elipse están dados por:

$$\begin{aligned}a &= \frac{\alpha}{1 - \epsilon^2} = \frac{l^2/\mu k}{1 - \left(1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}\right)} = \frac{k}{2|E|}, \\b &= \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} = \frac{l^2/\mu k}{\sqrt{1 - \left(1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}\right)}} = \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}}.\end{aligned}\tag{5.39}$$





Por otra parte, a partir de la expresión para la velocidad areolar $\frac{dA}{dt} = \frac{l}{2\mu}$, se puede hallar el período del movimiento elíptico: $\tau = \frac{2\mu}{l} A$. Como el área de la elipse es $A = \pi ab$ y utilizando las expresiones para a y b se obtiene:

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2\mu}{k} a^3. \quad (5.40)$$

Este resultado corresponde a la tercera ley de Kepler: el cuadrado del período es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita elíptica.

La excentricidad ϵ se puede expresar en función del semieje mayor a . Para ello, debemos escribir la energía E en términos de este parámetro:

$$E = -\frac{k}{2a}.$$

Reemplazando este valor de E en la **Ecuación 5.35** se obtiene

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{l^2}{\mu k a}},$$

de donde

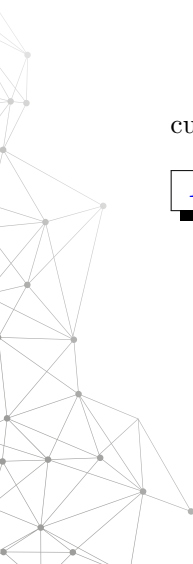
$$\frac{l^2}{\mu k} = a(1 - \epsilon^2).$$

El factor $\frac{l^2}{\mu k}$ se sustituye en la ecuación de la órbita para obtener:

$$r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)}. \quad (5.41)$$

Con esta última expresión es inmediato encontrar las distancias apsidales, las cuales se obtienen cuando $(\theta - \theta_0) = 0, \pi$. En efecto, $r_{\pm} = a(1 \pm \epsilon)$.

Ejemplo 5.5





Considere una partícula sometida al potencial

$$U(r) = -\frac{k}{r} + \frac{h}{r^2},$$

con $h, k > 0$. Haga un estudio amplio del movimiento de esta partícula utilizando las siguientes estrategias para abordar un problema de fuerza central cuando se conoce el potencial o la fuerza:

- (a) Analizar el potencial efectivo.
- (b) Obtener la ecuación de la órbita.
- (c) Obtener la condición de estabilidad para órbitas circulares.
- (d) Encontrar regiones donde este acotado el movimiento a partir de un análisis cualitativo del potencial efectivo.

Solución.

Haciendo el cambio de variable $u = \frac{1}{r}$, se obtiene

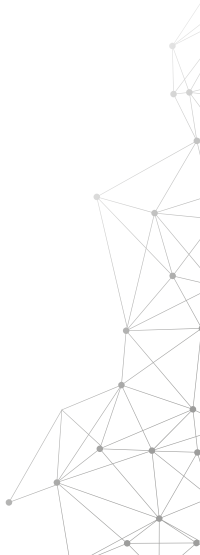
$$U(u) = -ku + hu^2.$$

La fuerza central está dada por $f = -dU/dr$:

$$\begin{aligned} f(r) &= -\frac{k}{r^2} + \frac{2h}{r^3}, \\ f(1/u) &= -ku^2 + 2hu^3. \end{aligned}$$

(a) Análisis del potencial efectivo: el potencial efectivo $U_{ef} = U_{centrifugo} + U_{central}$ para el problema dado es:

$$\begin{aligned} U_{ef} &= \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r), \\ U_{ef} &= \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} + \frac{h}{r^2}, \\ U_{ef} &= \left(\frac{l^2 + 2\mu h}{2\mu} \right) \frac{1}{r^2} - \frac{k}{r}. \end{aligned}$$





Se concluye que siempre que el potencial central $U(r)$ esté conformado por un potencial de Kepler ($\approx 1/r$) más un potencial de la forma $\approx 1/r^2$, este último término se agrupa con el potencial centrífugo que también depende de la forma $1/r^2$, llegando así a un problema similar al de Kepler, pero con precesión.

(b) Ecuación de la trayectoria a partir de la ecuación diferencial de la órbita:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u &= -\frac{\mu}{l^2} \frac{dU}{du}, \\ \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u &= -\frac{\mu}{l^2} (-k + 2hu), \\ \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \left(1 + \frac{2h\mu}{l^2}\right) u - \frac{\mu k}{l^2} &= 0.\end{aligned}$$

Considerando

$$X = \left(1 + \frac{2h\mu}{l^2}\right) u - \frac{\mu k}{l^2},$$

se obtiene la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 X}{d\theta^2} + \left(1 + \frac{2h\mu}{l^2}\right) X &= 0, \\ \frac{d^2 X}{d\theta^2} + \omega_0^2 X &= 0,\end{aligned}\tag{5.42}$$

donde $\omega_0 = \sqrt{1 + \frac{2h\mu}{l^2}}$. Esta ecuación diferencial es de segundo orden, lineal, homogénea con coeficientes constantes. Su solución es:

$$\begin{aligned}X &= B \cos(\omega_0 \theta - \theta_0), \\ \omega_0^2 u - \frac{\mu k}{l^2} &= B \cos(\omega_0 \theta - \theta_0), \\ \frac{1}{r} &= \frac{\mu k}{l^2 \omega_0^2} \left[1 + \frac{l^2 B}{\mu k} \cos(\omega_0 \theta - \theta_0)\right].\end{aligned}\tag{5.43}$$

De esta manera, se obtiene que el movimiento de la partícula corresponde al movimiento generado por el potencial de Kepler con precesión.





Nota. La ecuación de la órbita también se puede obtener haciendo la integral de la **Ecuación 5.17**

(c) Aplicación de la condición de estabilidad para órbitas circulares: considerando la fuerza central de la forma general

$$f(r) = -\frac{k}{r^n} + \frac{2h}{r^m}, \quad \text{con } m > n$$

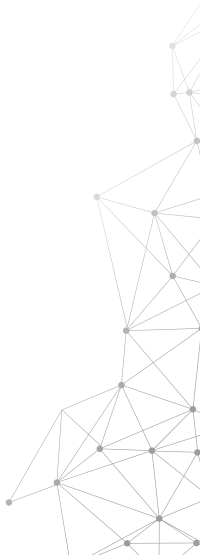
La condición de estabilidad de la órbita $df/dr < -(3/r)f$ da:

$$\begin{aligned} \frac{kn}{r^{n+1}} + \frac{2hm}{r^{m+1}} &< -\frac{3}{r} \left(-\frac{k}{r^n} + \frac{2h}{r^m} \right), \\ \frac{kn}{r^{n+1}} + \frac{2hm}{r^{m+1}} &< \frac{3k}{r^{n+1}} - \frac{6h}{r^{m+1}}, \\ \frac{k(n-3)}{r^n} &< -\frac{2h(3+m)}{r^m}, \\ k(n-3)r^{m-n} &< -2h(3+m), \\ r^{m-n} &< -\frac{2h(3+m)}{k(n-3)}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Haciendo $m = 3$ y $n = 2$ en la desigualdad anterior, se obtiene $r < -2h(6)/(-k)$. Por lo tanto, para la fuerza central dada en este problema es posible obtener órbitas circulares estables cuando $r < 12h/k$.

De la condición dada por la **Inecuación (5.44)** se concluye que solo para $n = 1, 2$ se pueden obtener órbitas circulares estables ya que $n - 3$ es negativo. Para valores diferentes de n se obtendría que r es menor que un número negativo, lo cual no corresponde a una situación física. Por lo tanto, solo las fuerzas $f = -k/r + 2h/r^m$ con $m > 1$ y $f = -k/r^2 + 2h/r^m$ con $m > 2$ podrían conducir a órbitas circulares estables.

(d) Análisis cualitativo de la gráfica U_{ef} vs r por medio de una herramienta computacional. Se utilizará el paquete *Mathematica* con el objetivo de encontrar regiones donde el sistema este acotado.





La **Figura 5.12** muestra los potenciales central, centrífugo y efectivo en función de r haciendo $k = 1$, $l = 2$, $\mu = 2$ y $h = 0,5$. Teniendo en cuenta la condición dada por la **Inecuación 5.44** y como $12h/k = 6$, se concluye que para $r < 6$ se pueden obtener órbitas circulares, lo cual es consistente con el mínimo que presenta U_{ef} entre $0 < r < 6$. Para una energía total $E \approx -0,126$ el sistema es acotado entre $2 \lesssim r \lesssim 6$.

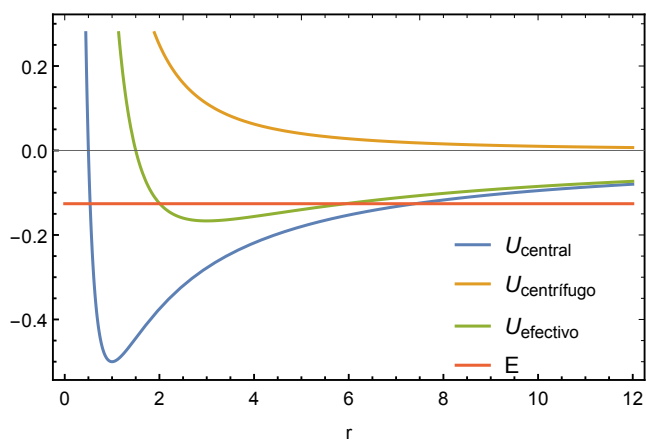
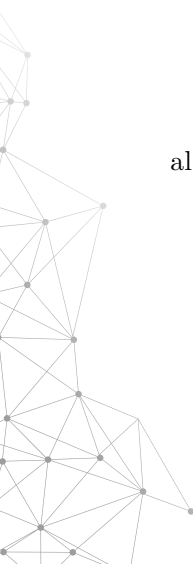


Figura 5.12: Potenciales central ($= -k/r + h/r^2$), centrífugo ($= l^2/2\mu r^2$) y efectivo ($= -k/r + h/r^2 + l^2/2\mu r^2$) en función de r con $k = 1$, $l = 2$, $\mu = 2$ y $h = 0,5$.

Ejercicios

5.6 Analizar exhaustivamente el movimiento cuando se le cambia de signo al segundo término del potencial del **Ejemplo 5.5**:

$$U(r) = -\frac{k}{r} - \frac{h}{r^2};$$





o, equivalentemente, cuando la fuerza es

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{2h}{r^3}.$$

5.7 Analizar el movimiento de una partícula sometida a la fuerza central

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{\lambda}{r^4}.$$

Grafique con el *Mathematica* (u otro programa) U_{ef} en función de r y determine si hay regiones donde el movimiento sea acotado. Obtenga la condición para órbitas circulares estables.

5.8 En el modelo de quarks no-relativista ISGW (N. Isgur, D. Scora, B. Grinstein and M. B. Wise, *Phys. Rev. D*, vol. 39, no. 3, pp. 799, 1985) consideran el siguiente potencial entre dos quarks:

$$U(r) = -\frac{4\alpha_s}{3r} + c + br,$$

con $\alpha_s = 0,5$, $c = -0,84$ GeV y $b = 0,18$ GeV². Analizar gráficamente este potencial y el potencial efectivo.

5.9 Un cuerpo es sometido al potencial de *Lennard-Jones* (ver **Ejercicio 2.19**):

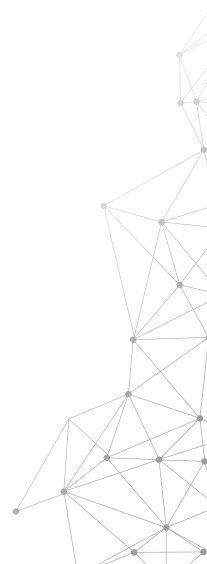
$$U(r) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right].$$

Analizar el potencial efectivo y encontrar regiones de estados ligados.

5.10 Considere una partícula sometida a la fuerza central

$$f(r) = -\frac{\lambda}{r^4} - \frac{\rho}{r^3};$$

demuestre que la órbita de la partícula es una espiral.





Considere el problema inverso: asuma que la órbita del cuerpo es $r = k\theta^2$. Obtenga la fuerza, haga la gráfica de la órbita y discuta la condición de estabilidad para órbitas circulares.

5.11 Un cuerpo es sometido a la fuerza central atractiva

$$f(r) = -ke^{-\rho r} \quad k > 0.$$

Aplice la condición para órbitas circulares estables y determine para que valores de r es posible obtener este tipo de órbitas.

5.12 Un cuerpo es sometido a la fuerza central atractiva

$$f(r) = -kr^3e^{-\rho r^2}, \quad k > 0.$$

A partir de la condición para órbitas circulares estables determine para que valores de r es posible obtener este tipo de órbitas.

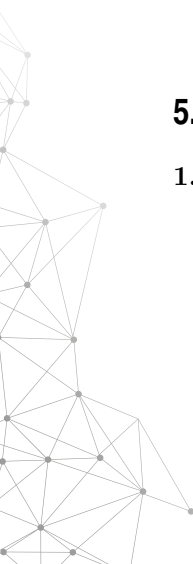
5.13 Las fuerzas centrales dadas en los **Ejercicios 5.11** y **5.12** se pueden escribir en forma general como:

$$f(r) = -kr^n e^{-\rho r^m}.$$

¿Cuáles son las unidades de ρ y k ? Hacer un análisis de las contribuciones de r^n y $e^{-\rho r^m}$ al producto $r^n e^{-\rho r^m}$, y encontrar bajo qué condición será posible obtener órbitas circulares. Además hacer un análisis cualitativo del potencial efectivo U_{ef} variando n y m .

5.7. Actividades complementarias

1. Estudiar el *Problema de los tres cuerpos*. Es una extensión del problema de dos cuerpos en la cual se considera la interacción de tres cuerpos debido a fuerzas centrales. Revisar la siguiente referencia:





- Quaresma LJB, Rodrigues ME. Choreographies on the restricted three-body problem. *Rev Bras Ens Fis.* 2019; 41(2).

En este artículo se estudia el comportamiento y la estabilidad de dos tipos de soluciones periódicas importantes al problema restringido de tres cuerpos interactuando mutuamente por la fuerza gravitacional.

2. Analizar la combinación del potencial de Kepler (ver **Sección 5.6**) con el potencial de Yukawa (ver **Ejercicio 5.4**). Revisar la siguiente publicación:

- Cavan E, Haranas I, Gkigkitzis I. Cobbett Dynamics and Stability of the Two Body Problem with Yukawa Correction. *Astrophysics and Space Science* 2020; 365.

En esta referencia se estudia la estabilidad de las órbitas de un cuerpo sometido a un potencial $U(r) = U_{\text{Kepler}} + U_{\text{Yukawa}}$. Al final de la sección 4, los autores presentan un ejemplo numérico comparable a la órbita de Marte. Al problema planteado en este artículo se le puede aplicar la teoría presentada en este capítulo.

3. El problema de dos cuerpos sometidos a una fuerza central también se puede estudiar mediante el formalismo newtoniano. Ver la referencia:

- Lucic D, Varga M. Simulation of the two-body problem in GeoGebra. *Acta Electrotechnica et Informatica.* 2012; 12(3): 47–50.

En este artículo estudia el problema de Kepler obteniendo la ecuación de la trayectoria a partir de la segunda ley de Newton en coordenadas polares, usando el paquete GeoGebra. De esta manera, este artículo complementa el enfoque presentado en este capítulo y el uso de herramientas computacionales para abordar el problema de fuerzas centrales.

4. Una aplicación interesante del problema de dos cuerpos se presenta en el juego del billar. Ver la referencia siguiente:





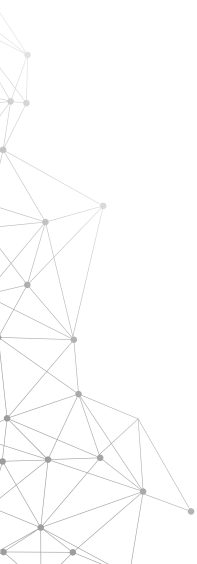
- Antón C, Brun JL. Gravitational pocket billiards with *MathematicaTM*. *Rev Mex Fis.* 2009; 55: 168–75.

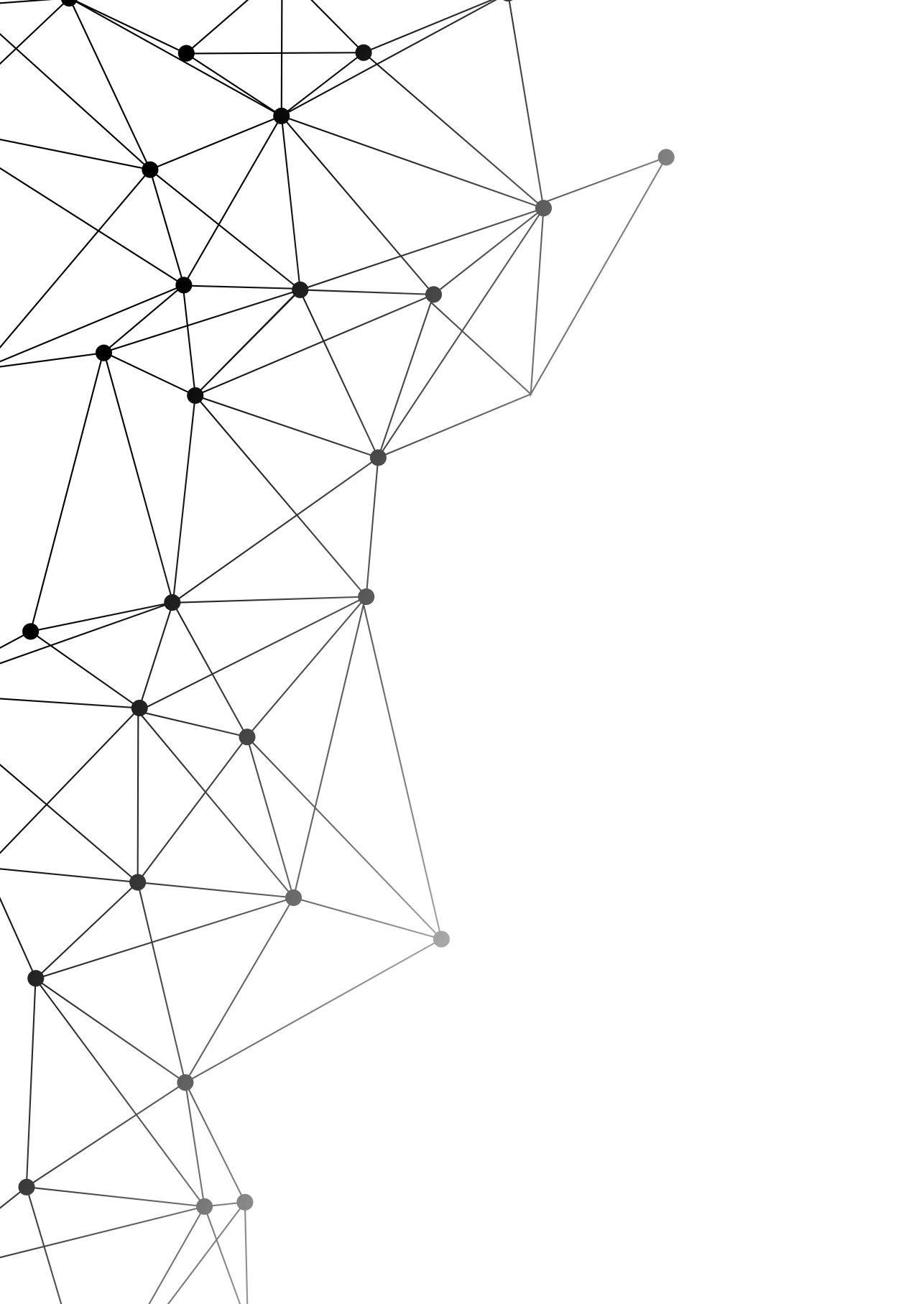
En este trabajo se estudia el movimiento de dos bolas de billar sometidas a la fuerza gravitacional $\approx 1/r^2$ y un hueco no interactuante, por medio del paquete *Mathematica*. Este artículo complementa el uso dado en este libro a esta herramienta computacional.

5. En 1964, Richard Feynman presentó, en una conferencia, una derivación elemental de la primera ley de Kepler utilizando un enfoque geométrico sin acudir al uso del cálculo integral o de ecuaciones diferenciales. En los siguientes artículos, se discute esta construcción geométrica planteando en algunos casos generalizaciones a órbitas abiertas:

- Cariñena JF, Rañada MF, Santander M. A new look at the Feynman ‘hodograph’ approach to the Kepler first law. *Eur J Phys.* 2016; 37.
- Vogt E. Elementary derivation of Kepler’s laws. *American Journal of Physics.* 1996; 64(4).
- Kowen M, Mathur H. On Feynman’s analysis of the geometry of Keplerian orbits. *Am J Phys.* 2003; 71.
- Unruh WG. Kepler’s laws without calculus; 2018.

Este enfoque geométrico facilita el acceso al problema de Kepler a estudiantes que no tengan mucha formación en ecuaciones diferenciales y cálculo diferencial.







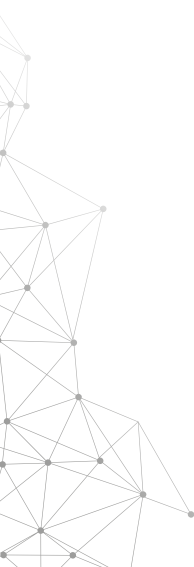
Bibliografía

1. Goldstein H, Poole C, Safko J. *Classical Mechanics*. 3.^a ed.: Addison Wesley; 2001.
2. Thornton S, Marion J. *Classical dynamics of particles and systems*. 5a edición: Brooks/Cole; 2004.
3. Cosenza M. *Mecánica Clásica*. 11.^a ed. Venezuela: Universidad de los Andes; 2016.
4. Arfken GB, Weber, H. J. *Mathematical Methods for Physicists*. 4.^a ed. San Diego, CA.: Academic Press; 1996.
5. Mahecha J, *Mecánica Clásica Avanzada*. Editorial Universidad de Antioquia; 2006.
6. Díaz RA. *Mecánica Analítica: Notas de clase*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia; 2012.
7. De Lange OL, Pierrus J. *Solved Problems in Classical Mechanics. Analytical and numerical solutions with comments*. New York: Oxford University Press; 2010.
8. José JV, Saletan EJ. *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*. USA: Cambridge University Press; 1998.





9. Spiegel MR. *Teoría y Problemas de Mecánica Teórica*. México: McGraw Hill; 1977.
10. Greiner W. *Classical Mechanics, Point Particles and Relativity*. New York: Springer-Verlag; 2004.
11. Greiner W. *Classical Mechanics: Systems of particles and hamiltonian dynamics*. New York: Springer-Verlag; 2003.
12. Landau LD, Lifshitz EM. *Mechanics*. 3.^a ed. Pergamon Press; 1976.
13. Hand LN, Finch JD. *Analytical Mechanics*. 7.^a ed. Cambridge: Cambridge University Press; 2008.
14. Taylor JR. *Classical mechanics*. USA: University Science Books; 2005.
15. Griffiths JB. *The Theory of Classical Dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press; 2008.
16. Iro H A. *Modern Approach to Classical Mechanics*. 2.^a ed. Singapore: World Scientific; 2016.
17. Bagchi BK. *Advance Classical Mechanics*. New York: Taylor and Francis Group; 2017.
18. Lemos NA. *Mecánica analítica*. 2.^a ed. Sao Paulo: Editora Livraria da Física; 2007.
19. Goicolea JM. *Curso de Mecánica*, volumen I y II. 2.^a ed. Granada: Universidad Politécnica de Madrid; 2011.
20. Soldovieri T. *Introducción a la Mecánica de Lagrange y Hamilton*. Venezuela: Universidad del Zulia; 2013.
21. Baez JC, Wise DK. *Lectures on Classical Mechanics*. Riverside: University of California; 2005.
22. Minotti F O. *Apuntes de Mecánica Clásica*. Argentina: Universidad de Buenos Aires; 2010.

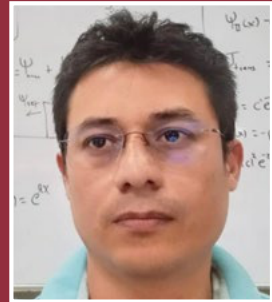


23. Janssen B. *Mecánica Analítica*. España: Universidad de Granada; 2006.
24. González A. *Mecánica Teórica*. España: Universidad Complutense de Madrid; 2007.
25. González A. *Manual de Mecánica Clásica*. España: Universidad Complutense de Madrid; 2014.
26. Abramson G. *Mecánica Clásica: Notas de clase*. Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo – CNEA; 2019.



Ramiro Uribe Kaffure

Físico y magíster en Física de la Universidad Nacional de Colombia, doctor en Físico-Química de la Universidad de Lleida en España. Profesor de planta en el Departamento de Física de la Universidad del Tolima desde 2012. Ha orientado cursos de Física en pregrado y posgrado. Es autor de artículos científicos publicados en revistas internacionales y nacionales. Director de trabajos de grado en pregrado y maestría y de proyectos de investigación en la Universidad del Tolima. Es integrante del Grupo de Investigación en Materiales Semiconductores y Superiónicos (GIMSS), reconocido por COLCIENCIAS.



Carlos Eduardo Vera Aguirre

Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad del Tolima, magíster en Física de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). Cursó estudios de doctorado en Física en la misma universidad. Profesor de planta en el Departamento de Física de la Universidad del Tolima desde 2012. Ha orientado cursos de Física en pregrado y posgrado. Es autor de artículos científicos publicados en revistas internacionales y nacionales. Director de trabajos de grado en pregrado y maestría y de proyectos de investigación en la Universidad del Tolima. Integrante del Grupo de Investigación Física de Partículas – Teórico (QUARK), reconocido por COLCIENCIAS.

A partir de nuestra experiencia como profesores de la Maestría en Física de la Universidad del Tolima, hemos recopilado en estas *Notas de Clase* algunos temas de carácter físico y matemático que los estudiantes deben abordar antes de cursar formalmente la asignatura Mecánica Clásica, a nivel de maestría.

Es un libro apropiado para estudiantes procedentes de pregrados que no incluyen en sus planes de estudio una sólida formación en física o en matemáticas, como la requerida para adelantar el curso de Mecánica Clásica a nivel de maestría. No se trata de un texto que sustituya la formación que proporciona un pregrado en Física, se presenta más bien como un compendio breve y conciso de temas que, a lo largo de los últimos diez años, hemos identificado como fundamentales para los estudiantes que cursan la asignatura Mecánica Clásica de la Maestría en Física, en la Universidad del Tolima.

Algunos de los temas se describen detalladamente, según el criterio y la experiencia de los autores. Se presentan ejemplos, preguntas y ejercicios de nivel básico e intermedio, para que el estudiante reflexione y complemente el aprendizaje. Con esto se pretende que el alumno esté mejor preparado para abordar, durante el curso formal de Mecánica Clásica, problemas de mayor nivel en los cuales se evidencie todo el potencial de las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana.

Como elemento diferenciador, se presentan desarrollos muy detallados en varias secciones y ejemplos, y generalizaciones o extensiones de algunos problemas tradicionales y gráficas que no han sido aún reportadas en la literatura, según nuestra revisión bibliográfica. Otro elemento diferenciador lo constituye el hecho de que, a lo largo del texto, se motiva el uso de herramientas computacionales para resolver algunos ejercicios, exponiendo explícitamente los comandos utilizados. Particularmente, se usa el programa Wolfram Mathematica®, debido a que sus capacidades numéricas, simbólicas y gráficas facilitan el rápido desarrollo de procedimientos matemáticos engorrosos o complejos, lo que permite enfocar la atención hacia la comprensión de los conceptos físicos.

Al final de cada capítulo se incluye una sección de actividades complementarias, en la cual se recomienda la lectura de referencias que permiten profundizar en algunos de los temas abordados. De igual manera, allí se presentan artículos, varios de ellos recientes, publicados en revistas de física y de enseñanza de la física, que contienen formulaciones alternas a las presentadas, o que motivan al estudiante a pensar en variantes que puedan efectuarse en algunos de los sistemas físicos mencionados.

ISBN: 978-628-7537-42-2



9 786287 537422



Universidad
del Tolima



ACREDITADA
DE ALTA CALIDAD

¡Construimos la universidad que soñamos!