

1

Tópicos matemáticos fundamentales

Este capítulo presenta, con enfoque práctico, una recopilación de tópicos matemáticos sobre los cuales se debe tener conocimiento mínimo y previo al estudiar diversas formulaciones de la mecánica clásica. Asumimos que el lector está familiarizado con las nociones básicas del cálculo y el álgebra lineal.

1.1. Matrices

Una matriz $\mathbf{C}$ de tamaño (o dimensión) $m \times n$ es un arreglo bidimensional de mn elementos (o componentes) ordenados de la siguiente forma:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Los elementos de la matriz $\mathbf{C}$ se representan por c_{ij} , donde el subíndice $i = 1, \dots, m$ indica el número de la fila y $j = 1, \dots, n$ el número de la columna.

A continuación se relacionan algunas operaciones entre matrices:

Suma de matrices. Consideremos dos matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ de dimensión $m \times n$ (en adelante matrices $m \times n$); si $\mathbf{C}$ es la matriz que resulta de la suma de estas dos matrices, $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, entonces, las componentes de $\mathbf{C}$ están dadas por

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Producto de dos matrices. Sean $\mathbf{A}$ una matriz $m \times n$ y $\mathbf{B}$ una matriz $n \times p$, se define su producto, $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ como una matriz $m \times p$, cuyas componentes son:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

En general, el producto entre dos matrices no es conmutativo.

Producto directo (o tensorial) entre matrices. Consideremos dos matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ cuyas componentes son A_{mn} y B_{pq} , respectivamente. El producto tensorial entre las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se denota por $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ y está dado por

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & \dots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix}_{mp \times nq}$$

Traza de una matriz. Sea $\mathbf{A}$ una matriz $n \times n$. La traza de $\mathbf{A}$ se define como la suma de los elementos de la diagonal. Es decir, $Tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. La traza del producto de dos matrices es independiente del orden de la multiplicación. Sea la matriz $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, entonces:

$$\begin{aligned} Tr(\mathbf{AB}) &= \sum_i c_{ii} \\ &= \sum_i \sum_p a_{ip} b_{pi} \\ &= \sum_p \sum_i b_{pi} a_{ip} \\ &= \sum_p c_{pp} \\ Tr(\mathbf{AB}) &= Tr(\mathbf{BA}). \end{aligned}$$

Por otra parte, la traza de la suma de dos matrices es la suma de las trazas de las matrices.

Determinante de una matriz. Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuyos elementos están dados por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & \dots \end{pmatrix}.$$

El determinante de la matriz $\mathbf{A}$ se define como:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i,j,k,\dots} \epsilon_{ijk\dots} a_i b_j c_k \dots$$

donde $\epsilon_{ijk\dots}$ es la generalización del denominado símbolo de permutación (o tensor) de *Levi-Civita*, el cual está definido como:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si el número de permutaciones de los subíndices es par} \\ -1 & \text{si el número de permutaciones de los subíndices es impar} \\ 0 & \text{si al menos dos subíndices son iguales} \end{cases} \quad (1.2)$$

con $i, j = 1, 2, 3$ y $\epsilon_{123} = 1$. De forma explícita tenemos: $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1$ y $\epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1$. Con esta definición, el determinante de una matriz es la suma (o resta) de productos de elementos de la matriz, sin repetir filas y columnas.

Algunas matrices importantes son las siguientes:

- **Matriz identidad.** Es una matriz $n \times n$ cuyos elementos de la diagonal principal son todos unos (1) y el resto de elementos son ceros (0). Se representa por

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que $\text{Tr}(\mathbf{I}) = n$.

- **Matriz inversa.** La inversa de la matriz $\mathbf{A}$ se denota por $\mathbf{A}^{-1}$ y cumple con $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.
- **Matriz transpuesta.** La matriz transpuesta de $\mathbf{A}$ se simboliza por $\mathbf{A}^T$. Los elementos de $\mathbf{A}^T$ se obtienen intercambiando filas por columnas.

$$\text{Si } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Matriz simétrica.** Una matriz se denomina simétrica si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, es decir, si $a_{ij} = a_{ji}$. El número de componentes independientes de una matriz simétrica de dimensión $n \times n$ es $\frac{n(n+1)}{2}$.
- **Matriz antisimétrica.** Una matriz se denomina antisimétrica si $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, es decir, si $a_{ij} = -a_{ji}$. Para cumplir esta condición, los elementos de la diagonal deben ser todos cero y, por lo tanto, la traza de una matriz antisimétrica es igual a cero. El número de componentes independientes de una matriz simétrica de dimensión $n \times n$ es $\frac{n(n-1)}{2}$.

Toda matriz se puede descomponer en una matriz simétrica más una matriz antisimétrica. Si c_{ij} son las componentes de la matriz $\mathbf{C}$, entonces:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \frac{1}{2}c_{ij} + \frac{1}{2}c_{ij} \\ &= \frac{1}{2}(c_{ij} + c_{ji}) + \frac{1}{2}(c_{ij} - c_{ji}) \\ &= \mathbb{S}_{ij} + \mathbb{A}_{ij}. \end{aligned}$$

Al intercambiar los índices i y j ($i \leftrightarrow j$) se obtiene $\mathbb{S}_{ij} = \mathbb{S}_{ji}$ y $\mathbb{A}_{ij} = -\mathbb{A}_{ji}$. La matriz $\mathbb{S}$ es simétrica, mientras que la matriz $\mathbb{A}$ es antisimétrica.

- **Matriz adjunta.** La adjunta de la matriz $\mathbf{A}$, denotada por $\mathbf{A}^\dagger$, es: $\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^*)^T = (\mathbf{A}^T)^*$, donde el símbolo «*» se refiere al complejo conjugado. Si la matriz es real, entonces la adjunta es igual a la transpuesta.
- **Matriz ortogonal.** Una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ es ortogonal si su transpuesta es igual a su inversa. Esto es:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}.$$

Nota. Las transformaciones propias (impropias) se representan por matrices ortogonales con determinante $1(-1)$.

- **Matriz unitaria.** Una matriz $\mathbf{A}$ es unitaria si $\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{I}$ (o equivalentemente, $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{-1}$). Esta definición es la generalización del concepto de matriz ortogonal al caso complejo.
- **Matriz hermítica.** Una matriz $\mathbf{A}$ es hermítica (o autoadjunta) si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$. Estas matrices son de mucha importancia en física, ya que se usan para representar observables en mecánica cuántica. Sus autovalores son reales y sus autovectores son ortonormales, es decir, forman una base del espacio al cual pertenezcan los vectores.

Transformación de similaridad. Consideremos las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ de dimensión $n \times n$, y su inversa. Una transformación de similaridad está dada por

$$\mathbf{A}' = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}.$$

Si la matriz $\mathbf{B}$ es ortogonal, la transformación de similaridad es ortogonal y si la matriz $\mathbf{B}$ es unitaria, la transformación de similaridad es unitaria.

A continuación se presentan algunas instrucciones para trabajar con matrices en el software *Wolfram Mathematica*® (en adelante *Mathematica*), el cual es una herramienta muy útil para realizar operaciones con matrices.

Código en *Mathematica*

```
In[1]:= A= {{5,0,0}, {0,3,-2}, {0,-2,3}} (*Genera la matriz A*)

Out[1]= {{5,0,0},{0,3,-2},{0,-2,3}}

In[2]:= MatrixForm[A] (*Muestra la matriz*)

Out[2]= 
$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$


In[3]:= Id=IdentityMatrix[3]//MatrixForm (*Genera la matriz
identidad 3x3*)

Out[3]= 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


In[4]:= Det[A] (*Calcula el determinante de la matriz*)

Out[4]= 25

In[5]:= Tr[A] (*Calcula la traza de la matriz*)

Out[5]= 11

In[6]:= Solve[Det[A- λ Id]==0, λ] (*Calcula los autovalores de
la matriz A*)

Out[6]= {{λ → 1},{λ → 5},{λ → 5}}

In[7]:= Eigenvalues[A] (*Otra forma de obtener los autovalores
de la matriz A*)

Out[7]= {5,5,1}

In[8]:= Eigenvectors[A] (*Devuelve los autovectores de la
matriz A*)

Out[8]= {{0,-1,1},{1,0,0},{0,1,1}}

In[9]:= A.A (*o MatrixPower[A,2]. Devuelve el producto de la
matriz A por si misma*)

Out[9]= {{25,0,0},{0,13,-12},{0,-12,13}}
```

Ejercicios

1.1 Obtener la traza y el determinante de cada una de las tres matrices de Pauli (σ_1 , σ_2 , σ_3):

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Además, verificar que son matrices hermíticas.

1.2 Hallar $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ y $\sigma_2 \otimes \sigma_3$.

1.3 Considere la matriz cuadrada $\mathbf{J}_{2n \times 2n}$ dada por

$$\begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{0} \end{pmatrix},$$

donde $\mathbb{0}$ representa una matriz $n \times n$ cuyos elementos son todos ceros y $\mathbb{1}$ representa la matriz identidad $n \times n$. Haga explícita la matriz $\mathbf{J}$ para $n = 2$.

Demuestre que $\mathbf{J}^2 = -\mathbf{I}_{2n}$, $\mathbf{J}^T \mathbf{J} = \mathbf{I}_{2n}$ (es decir, es ortogonal), $\mathbf{J}^T = -\mathbf{J}$ y $\det(\mathbf{J}) = 1$. Cabe mencionar que la matriz $\mathbf{J}$ se utiliza en el formalismo hamiltoniano y en las transformaciones canónicas.

1.4 Verificar que una matriz simétrica $n \times n$ tiene $\frac{n(n+1)}{2}$ elementos independientes y que una matriz antisimétrica tiene $\frac{n(n-1)}{2}$ elementos independientes.

1.5 Demostrar que el determinante y la traza de una matriz son invariantes ante una transformación de similitud.

1.6 Demostrar que la propiedad de hermiticidad es invariante ante una transformación de similitud unitaria (la transformación de similitud unitaria de una matriz hermítica da como resultado una matriz hermítica).

1.7 Demostrar que $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ y que $(\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger$.

1.2. Rotación de coordenadas

Consideremos dos sistemas cartesianos bidimensionales $X - Y$ y $X' - Y'$ con el mismo origen. El sistema primado está rotado un ángulo θ con respecto al sistema no primado en el sentido contrario a las manecillas del reloj (ver **Figura 1.1**). Un punto P ubicado a una distancia r del origen tiene coordenadas (x, y) o (x', y') relacionadas por

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Las dos ecuaciones anteriores se pueden escribir en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \vec{r}' = \mathbf{O} \vec{r}, \quad (1.4)$$

donde $\mathbf{O}$ es llamada *matriz de rotación*. Obsérvese que $\det(\mathbf{O}) = 1$ y que el producto de dos filas (o columnas) diferentes es 0, mientras que el producto de cada fila (o columna) por ella misma es 1. Además $\mathbf{O}\mathbf{O}^T = \mathbf{O}^T\mathbf{O} = \mathbf{I}$, donde $\mathbf{O}^T$ es la transpuesta de $\mathbf{O}$, e $\mathbf{I}$ es la matriz identidad. Es decir, la matriz de rotación es ortogonal.

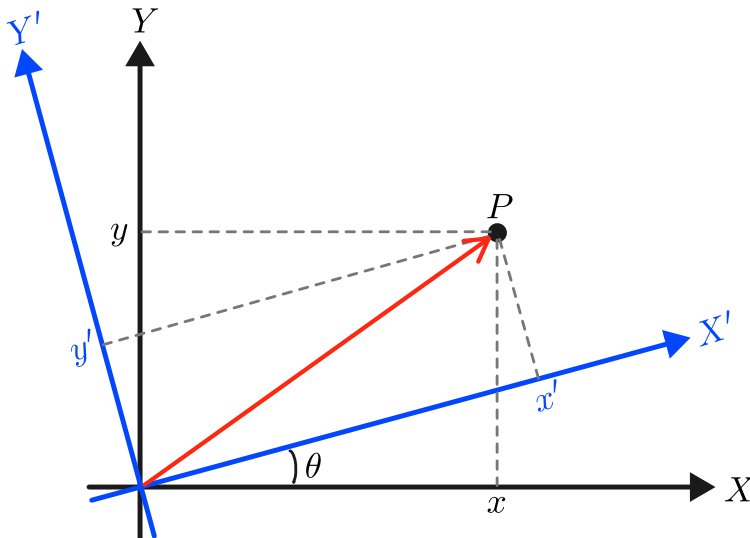


Figura 1.1: Rotación del sistema de coordenadas en un ángulo θ .

En tres dimensiones se tiene que

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o_{11} & o_{12} & o_{13} \\ o_{21} & o_{22} & o_{23} \\ o_{31} & o_{32} & o_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \iff \vec{r}' = \mathbf{O}\vec{r},$$

con

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 o_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, 3.$$

Los elementos o_{ij} son los *cosenos directores* (los cosenos de los ángulos entre los ejes x'_i y x_j dados por $\frac{\partial x_i}{\partial x_j}$), los cuales satisfacen las condiciones de ortogonalidad

$$\sum_{i=1}^3 o_{ij} o_{ik} = \delta_{jk}, \quad \text{o equivalentemente} \quad \sum_{i=1}^3 o_{ji} o_{ki} = \delta_{jk}, \quad (1.5)$$

donde δ_{jk} es el *Delta de Kronecker*, definido de la siguiente manera:

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases} \quad (1.6)$$

Ejercicios

1.8 Obtener las **Ecuaciones (1.3)**.

1.9 A partir de la **Ecuación (1.4)**, obtener las coordenadas (x, y) en función de las coordenadas (x', y') (transformación inversa).

1.10 Verificar que la matriz de rotación $\mathbf{O}$ dada por la **Ecuación (1.4)** es ortogonal.

1.11 Escribir explícitamente las **Ecuaciones (1.5)**.

1.12 Demostrar que para ángulos pequeños la matriz de rotación $\mathbf{O}_{2 \times 2} \approx \mathbf{I} + i\theta\sigma_2 \approx e^{i\theta\sigma_2}$, donde σ_2 es matriz de Pauli:

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

1.13 Escribir la matriz de rotación asociada a rotaciones alrededor del eje X_3 .

1.3. Escalar

Una función escalar S es aquella que permanece invariante (no cambia) ante una transformación de coordenadas. Esto es: $S(x, y, z) = S(x', y', z')$.

Como ejemplos de escalares tenemos la temperatura, la masa, el tiempo, la carga eléctrica, la distancia entre dos puntos, etc.

Hay algunas cantidades que cambian de signo cuando se hace una inversión de ejes ($x'_i \rightarrow -x_i$); a estas se les llama pseudoescalares. Por ejemplo, el volumen (V) de un cuerpo es un pseudoescalar, ya que $V(x', y', z') = -V(x, y, z)$.

1.4. Vector

La cantidad $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$ es un vector si sus componentes se comportan ante una transformación de coordenadas de la siguiente forma:

$$V'_i = \sum_{j=1}^3 o_{ij} V_j \quad \Longleftrightarrow \quad V'_i = o_{ij} V_j. \quad (1.7)$$

En la última ecuación se ha usado la convención suma de Einstein para abreviar la expresión; en esta notación se entiende que hay una suma sobre el índice repetido. Los elementos o_{ij} corresponden a los elementos de la matriz de rotación O . La relación entre las componentes rotadas (V'_i) y no rotadas (V_i) del vector corresponde a una transformación lineal.

Como ejemplos de vectores tenemos las siguientes observables: desplazamiento, velocidad, aceleración, fuerza, momento lineal, momento angular (o cinético), torque (o momento de fuerza), etc. La **Expresión 1.7** se puede generalizar a un vector de N dimensiones $\vec{V} = (V_1, V_2, \dots, V_N)$. En este caso se tiene:

$$V'_i = o_{ij} V_j, \quad j = 1, \dots, N. \quad (1.8)$$

Todo vector se puede representar en forma general como $\vec{V} = V_i \hat{e}_i$ (usando la convención suma de Einstein), donde los $\hat{e}_i$ son vectores unitarios ortonormales que forman una *base* del espacio vectorial al que pertenecen.

La magnitud de un vector es un escalar y está dada por

$$V = |\vec{V}| = (V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_n^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.9)$$

Ejemplo 1.1

Sea $\vec{V} = (V_1, V_2) = (xyc_x + y^2c_y, -x^2c_x - xyc_y)$. Verificar que V_1 y V_2 satisfacen las reglas de transformación (1.8), donde c_x y c_y son las componentes de un vector constante $\vec{c}$.

Solución.

Las componentes rotadas del vector deben cumplir con la transformación lineal $V'_i = o_{ij}V_j$:

- $i = 1$: $V'_1 = y'(x'c'_x + y'c'_y)$. Desarrollamos primero el término dentro del paréntesis:

$$\begin{aligned} x'c'_x + y'c'_y &= (x \cos \theta + y \sin \theta)(c_x \cos \theta + c_y \sin \theta) \\ &\quad + (-x \sin \theta + y \cos \theta)(-c_x \sin \theta + c_y \cos \theta) \\ &= xc_x(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + yc_y(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= xc_x + yc_y. \end{aligned}$$

Podemos observar que este término es invariante bajo rotaciones (escalar) por lo que:

$$\begin{aligned} V'_1 &= y'(xc_x + yc_y) \\ &= (-x \sin \theta + y \cos \theta)(xc_x + yc_y) \\ &= (xyc_x + y^2c_y) \cos \theta + (-x^2c_x - xyc_y) \sin \theta \\ &= V_1 \cos \theta + V_2 \sin \theta = O_{11}V_1 + O_{12}V_2. \end{aligned}$$

- $i = 2$: $V'_2 = -x'(x'c'_x + y'c'_y)$.

$$\begin{aligned} V'_2 &= -x'(xc_x + yc_y) \\ &= -(x \cos \theta + y \sin \theta)(xc_x + yc_y) \\ &= -(xyc_x + y^2c_y) \sin \theta + (-x^2c_x - xyc_y) \cos \theta \\ &= -V_1 \sin \theta + V_2 \cos \theta = O_{21}V_1 + O_{22}V_2. \end{aligned}$$

De esta manera, se ha mostrado que las componentes V'_1 y V'_2 satisfacen las reglas de transformación (1.8).

Ejercicio

1.14 Demostrar que la magnitud del vector $\vec{V} = (V_1, V_2)$ es invariante ante una transformación de coordenadas.

1.5. Producto de un escalar por un vector

El producto de un escalar (λ) por un vector ($\vec{A}$) produce como resultado otro vector. Algunos observables en física tienen esta estructura. Por ejemplo, $\vec{F} = m\vec{a}$, $\vec{p} = m\vec{v}$ y $\vec{F} = q\vec{E}$, donde los vectores $\vec{F}$, $\vec{a}$, $\vec{p}$, $\vec{v}$, $\vec{E}$ denotan fuerza, aceleración, momento lineal, velocidad y campo eléctrico, respectivamente, y los escalares m y q se refieren a la masa y a la carga, en su orden.

Derivada respecto al tiempo del producto $\lambda\vec{A}$:

$$\frac{d(\lambda\vec{A})}{dt} = \frac{d\lambda}{dt}\vec{A} + \lambda\frac{d\vec{A}}{dt}. \quad (1.10)$$

Los dos términos del lado derecho de la ecuación anterior son vectores. Esta expresión se usa, por ejemplo, en la segunda ley de Newton cuando la masa de la partícula *no es constante*. En este caso la segunda ley de Newton es:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}.$$

Preguntas. (1) ¿Qué efecto se produce en un vector cuando se multiplica por un escalar? ¿Cambia su dirección? ¿Cambia su magnitud? (2) ¿Conoce algunos sistemas físicos donde la masa varíe con el tiempo? Mencione algunos ejemplos.

1.6. Producto escalar de dos vectores

Consideremos los vectores $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \equiv \sum_{i=1}^3 A_i\hat{e}_i$ y $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k} \equiv \sum_{i=1}^3 B_i\hat{e}_i$, donde $\hat{e}_1 = \hat{i}$, $\hat{e}_2 = \hat{j}$ y $\hat{e}_3 = \hat{k}$. El *producto escalar* (o producto punto) entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ está definido por la expresión:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta, \quad (1.11)$$

donde θ es el ángulo entre los dos vectores. Obsérvese que $B\cos\theta$ es la proyección del vector $\vec{B}$ sobre el vector $\vec{A}$ (ver **Figura 1.2**), y que el producto escalar es *cero* cuando los dos vectores son *perpendiculares*. Además, si $0 \leq \theta \leq \pi$, entonces, $-AB \leq \vec{A} \cdot \vec{B} \leq AB$.

Si $\vec{A} = \vec{B}$ en la **Ecuación 1.11**, se obtiene la magnitud del vector mediante el producto escalar:

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{A} &= A^2, \\ A &= \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}.\end{aligned}\tag{1.12}$$

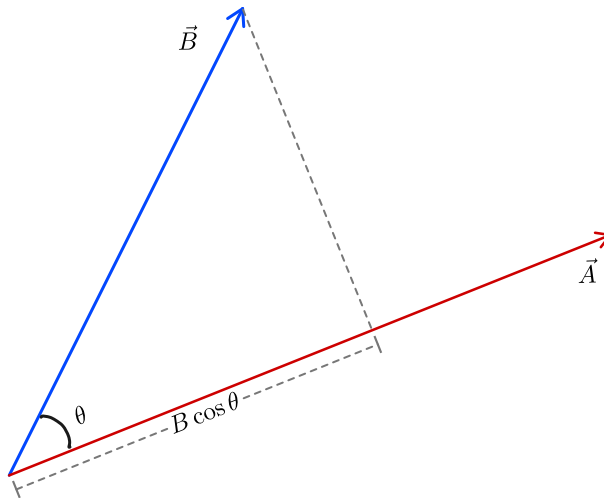


Figura 1.2: Proyección del vector $\vec{B}$ sobre el vector $\vec{A}$.

Una cantidad física que se define mediante el producto escalar es el *trabajo mecánico* (W) realizado por una fuerza $\vec{F}$, cuando la partícula se desplaza de una posición a otra: $W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r} = F(\Delta r) \cos \theta$, donde $\vec{\Delta r}$ es el vector desplazamiento y $\vec{F}$ es la fuerza que actúa sobre la partícula. Nótese que cuando estos dos vectores son perpendiculares, la fuerza $\vec{F}$ no realiza trabajo sobre el cuerpo.

Algunas propiedades del producto escalar:

- Es conmutativo: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
- Es distributivo respecto a la suma de vectores: $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{B}) + (\vec{A} \cdot \vec{C})$
- Es asociativo respecto al producto por un escalar λ : $\lambda(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\lambda\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (\lambda\vec{B})$.

En general,

$$\begin{aligned}
 \vec{A} \cdot \vec{B} &= \left(\sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 B_j \hat{e}_j \right) \\
 &= \sum_{i,j=1}^3 A_i B_j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j \\
 &= \sum_{i=1}^3 A_i B_i = A_i B_i,
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

donde se usó la convención suma o convención de Einstein en el último término. Además, se asumió que

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}, \tag{1.14}$$

con δ_{ij} simbolizando el Delta de Kronecker (ver **Ecuación (1.6)**).

Derivada respecto al tiempo de un producto escalar:

$$\frac{d(\vec{A} \cdot \vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} \tag{1.15}$$

Observe que el resultado de esta derivada es un escalar.

Ejemplo 1.2

Demostrar que para una partícula de masa constante m

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad (1.16)$$

donde $\vec{v}$ es la velocidad de la partícula, T es la energía cinética ($\frac{1}{2}mv^2$) y $\vec{F}$ es la fuerza que actúa sobre la partícula ($\frac{d\vec{p}}{dt}$), con $\vec{p} = m\vec{v}$ denotando el momento lineal.

Solución.

En la **Ecuación (1.15)** asuma que los dos vectores son iguales: $\vec{A} = \vec{B} \equiv \vec{v}$:

$$\frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2 \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}, \quad (1.17)$$

es decir,

$$\frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}.$$

Al multiplicar la ecuación anterior por la masa m se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d(\frac{1}{2}mv^2)}{dt} &= \frac{d(m\vec{v})}{dt} \cdot \vec{v}, \\ \frac{dT}{dt} &= \vec{F} \cdot \vec{v}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Pregunta. ¿Cómo cambia esta ecuación si la masa m no es constante?

Ejercicios

1.15 Utilizando la definición de producto escalar, hallar un vector perpendicular al vector $\vec{M} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$. ¿El vector hallado es único?

1.16 Dados los vectores $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ y $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$, hallar el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ y el ángulo entre los dos vectores.

1.17 Verificar que $\delta_{ii} = 3$ y que $C_i = C_j \delta_{ij}$.

1.18 La ecuación de un plano es $x + y + z = 0$. Escribir esta expresión como un producto escalar entre dos vectores. ¿Qué concluye?

1.19 Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen la misma magnitud. Suponga que la magnitud de la diferencia entre ellos ($|\vec{A} - \vec{B}|$) es 100 veces la magnitud de su suma ($|\vec{A} + \vec{B}|$). ¿Qué ángulo forman los vectores? ¿Podrían ser perpendiculares?

1.20 ¿Cómo cambia el producto escalar de dos vectores ante una inversión de coordenadas ($x_i \rightarrow -x_i, i = 1, 2, 3$)?

1.7. Producto vectorial de dos vectores

El producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es otro vector, perpendicular al plano determinado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Su dirección está determinada por la regla de la mano derecha y su magnitud por

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta, \quad (1.19)$$

donde θ es el ángulo entre los vectores. A partir de esta expresión se concluye que si los dos vectores son *paralelos*, su producto vectorial es *cero*.

En física hay varias cantidades que se definen u obtienen a partir de un producto vectorial. Por ejemplo, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ y $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, donde $\vec{L}$ es el momento cinético o angular, $\vec{\tau}$ es el torque o momento de una fuerza, $\vec{\omega}$ es la velocidad angular y $\vec{r}$ es el vector posición de la partícula; $\vec{v}$, $\vec{p}$ y $\vec{F}$ denotan la velocidad, el momento lineal y la fuerza, respectivamente.

Otra forma de hallar el producto vectorial es a través del determinante

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \quad (1.20)$$

Utilizando propiedades de determinantes se demuestra que $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$. En forma compacta, la i -ésima componente de $\vec{A} \times \vec{B}$ se puede escribir como:

$$(\vec{A} \times \vec{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k, \quad (1.21)$$

donde ϵ_{ijk} es el tensor *Levi-Civita* (ver **Ecuación (1.2)**).

Derivada respecto al tiempo de un producto vectorial:

$$\frac{d(\vec{A} \times \vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}. \quad (1.22)$$

Ejercicios

1.21 Considere la matriz (trabajada al final de la **Sección 1.1**)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Con ayuda del *Mathematica*, comprobar que los autovectores de la matriz $\mathbf{A}$ son perpendiculares entre sí. Como veremos más adelante, en el caso en que $\mathbf{A}$ esté asociada al tensor de inercia de un cuerpo rígido, estos tres vectores indican la dirección de los *ejes principales* del cuerpo rígido. En este ejemplo, uno de ellos corresponde al eje X y los otros dos se encuentran en el plano YZ.

1.22 Demostrar que:

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B})^2 &= (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = A^2 B^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2, \\ \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}), \\ \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}), \\ (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) &= (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C}). \end{aligned}$$

1.23 Demostrar que $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ipq} = \delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kp} \equiv \begin{vmatrix} \delta_{jp} & \delta_{jq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix}$. *Sugerencia:* partir de la tercera ecuación del punto anterior.

1.24 ¿Qué condiciones deben cumplir los vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$ para que el momento angular de un cuerpo, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, sea cero?

1.25 ¿Qué condiciones deben cumplir los vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$ para que el momento angular de un cuerpo, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, sea un valor constante diferente de cero?

1.26 ¿Cómo cambia el producto vectorial de dos vectores ante una inversión de coordenadas ($x_i \rightarrow -x_i, i = 1, 2, 3$)?

1.8. Coordenadas cilíndricas y esféricas

1.8.1. Coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas están dadas por (ver **Figura 1.3**):

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \phi = \arctan \frac{y}{x}; \quad z = z, \quad (1.23)$$

donde

$$x = \rho \cos \phi; \quad y = \rho \sin \phi. \quad (1.24)$$

Los vectores unitarios de las coordenadas cilíndricas en términos de los vectores unitarios cartesianos están dados por:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \frac{\frac{d\vec{r}}{d\rho}}{\left| \frac{d\vec{r}}{d\rho} \right|} = \hat{i} \cos \phi + \hat{j} \sin \phi, \\ \hat{\phi} &= \frac{\frac{d\vec{r}}{d\phi}}{\left| \frac{d\vec{r}}{d\phi} \right|} = -\hat{i} \sin \phi + \hat{j} \cos \phi, \\ \hat{z} &= \hat{z}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Los vectores posición, velocidad y aceleración pueden ser escritos como:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \rho \hat{\rho} + z \hat{z}, \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\hat{\rho}} + \dot{z} \hat{z}, \\ \ddot{\vec{r}} &= \ddot{\rho} \hat{\rho} + 2\dot{\rho} \dot{\hat{\rho}} + \rho \ddot{\hat{\rho}} + \ddot{z} \hat{z}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

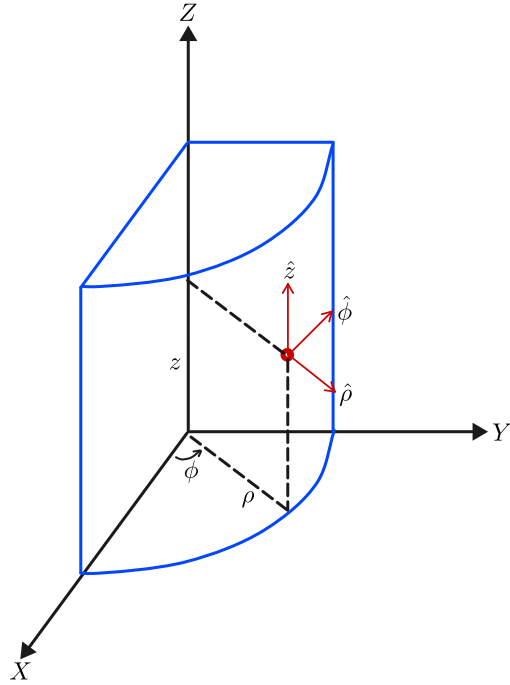


Figura 1.3: Coordenadas cilíndricas.

A partir de las **Ecuaciones (1.25)** se obtiene $\dot{\hat{\rho}} = \dot{\phi}\hat{\phi}$ y $\ddot{\hat{\rho}} = \ddot{\phi}\hat{\phi} - \dot{\phi}^2\hat{\rho}$. Reemplazando estas expresiones en $\ddot{\vec{r}}$ y $\dot{\vec{r}}$ (dadas por las **Ecuaciones (1.26)**) se obtienen las componentes de la velocidad y la aceleración en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} v_{\rho} &= \dot{\rho}, \\ v_{\phi} &= \rho\dot{\phi}, \\ v_z &= \dot{z} \end{aligned} \tag{1.27}$$

y

$$\begin{aligned} a_\rho &= \ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2, \\ a_\phi &= \rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}, \\ a_z &= \ddot{z}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

1.8.2. Coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas se definen como (ver **Figura 1.4**):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \theta = \arccos \frac{z}{r}; \quad \phi = \arctan \frac{y}{x}, \quad (1.29)$$

donde $\theta \in [0, \pi]$; $\phi \in [0, 2\pi]$ y

$$x = r \sin \theta \cos \phi; \quad y = r \sin \theta \sin \phi; \quad z = r \cos \theta. \quad (1.30)$$

Los vectores unitarios de las coordenadas esféricas en términos de los vectores unitarios cartesianos están dados por:

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \frac{\frac{d\vec{r}}{dr}}{\left| \frac{d\vec{r}}{dr} \right|} = \hat{i} \sin \theta \cos \phi + \hat{j} \sin \theta \sin \phi + \hat{k} \cos \theta, \\ \hat{\theta} &= \frac{\frac{d\vec{r}}{d\theta}}{\left| \frac{d\vec{r}}{d\theta} \right|} = \hat{i} \cos \theta \cos \phi + \hat{j} \cos \theta \sin \phi - \hat{k} \sin \theta, \\ \hat{\phi} &= \frac{\frac{d\vec{r}}{d\phi}}{\left| \frac{d\vec{r}}{d\phi} \right|} = -\hat{i} \sin \phi + \hat{j} \cos \phi. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Los vectores posición, velocidad y aceleración pueden ser escritos como:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r\hat{r}, \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}}, \\ \ddot{\vec{r}} &= \ddot{r}\hat{r} + 2\dot{r}\dot{\hat{r}} + r\ddot{\hat{r}}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

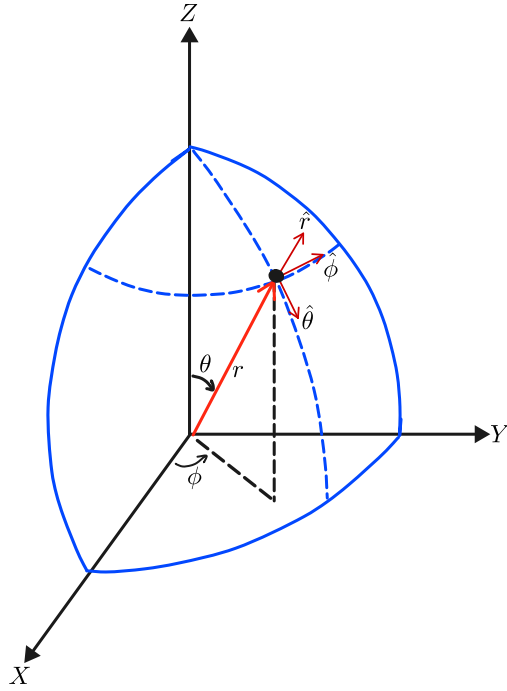


Figura 1.4: Coordenadas esféricas.

A partir de las **Ecuaciones (1.31)** se obtiene $\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}$ y $\ddot{\hat{r}} = -(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta)\hat{r} + (\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta} + (\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\hat{\phi}$. Al sustituir estas expresiones en $\dot{\vec{r}}$ y $\ddot{\vec{r}}$ (dadas por las **Ecuaciones (1.32)**) se obtienen las componentes de la velocidad y la aceleración en coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r}, \\ v_\theta &= r\dot{\theta}, \\ v_\phi &= r\sin\theta\dot{\phi} \end{aligned} \tag{1.33}$$

y

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2, \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2, \\ a_\phi &= r\sin\theta\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Ejemplo 1.3

A partir de las **Ecuaciones (1.31)** obtener $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$, en función de los vectores unitarios en coordenadas esféricas.

Solución.

(a) Tomando la derivada respecto al tiempo de la primera de las **Ecuaciones (1.31)** se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{r}} &= \dot{\hat{i}}\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - \dot{\hat{i}}\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi + \dot{\hat{j}}\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + \dot{\hat{j}}\dot{\phi}\sin\theta\cos\phi - \dot{\hat{k}}\dot{\theta}\sin\theta, \\ \dot{\hat{r}} &= \underbrace{\dot{\theta}(\hat{i}\cos\theta\cos\phi + \hat{j}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta)}_{\hat{\theta}} + \underbrace{\dot{\phi}\sin\theta(-\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi)}_{\hat{\phi}}, \\ \dot{\hat{r}} &= \dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}. \end{aligned}$$

(b) Considerando la derivada respecto al tiempo de la segunda de las **Ecuaciones (1.31)** se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}} &= -\dot{\hat{i}}\dot{\theta}\sin\theta\cos\phi - \dot{\hat{i}}\dot{\phi}\cos\theta\sin\phi - \dot{\hat{j}}\dot{\theta}\sin\theta\sin\phi + \dot{\hat{j}}\dot{\phi}\cos\theta\cos\phi - \dot{\hat{k}}\dot{\theta}\cos\theta, \\ \dot{\hat{\theta}} &= -\underbrace{\dot{\theta}(\hat{i}\sin\theta\cos\phi + \hat{j}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta)}_{\hat{r}} + \underbrace{\dot{\phi}\cos\theta(-\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi)}_{\hat{\phi}}, \\ \dot{\hat{\theta}} &= -\dot{\theta}\hat{r} + \dot{\phi}\cos\theta\hat{\phi}. \end{aligned}$$

(c) Al derivar respecto al tiempo la última de las **Ecuaciones (1.31)** se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\phi}} &= -\dot{\hat{i}}\dot{\phi}\cos\phi - \dot{\hat{j}}\dot{\phi}\sin\phi, \\ \dot{\hat{\phi}} &= -\dot{\phi}(\hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi), \\ \dot{\hat{\phi}} &= -\dot{\phi}(\sin\theta\hat{r} + \cos\theta\hat{\theta}). \end{aligned}$$

1.9. Tensores

Un tensor $\mathbb{T}$ de rango r es una estructura matemática cuyas componentes $T_{ijk\dots r}$ se transforman, bajo una rotación de coordenadas, de la siguiente manera (nos limitaremos solo a este tipo de transformaciones):

$$T'_{ijk\dots}(X') = A_{im}A_{jn}A_{kp}\cdots T_{mnp\dots}(X), \quad (1.35)$$

donde están implícitas sumas entre índices repetidos y $A_{im} = \partial x'_i / \partial x_m$ es el coseno del ángulo entre los ejes x'_i y x_m .

Un tensor $\mathbb{T}$ es totalmente *simétrico* cuando al permutar cualquier par de índices se obtiene la misma componente: $T_{\dots pq\dots} = T_{\dots qp\dots}$. Por otro lado, cuando al permutar un par de índices se obtiene la misma componente multiplicada por -1 , el tensor es *antisimétrico*: $T_{\dots pq\dots} = -T_{\dots qp\dots}$. En física son muy importantes los tensores y es útil determinar si el tensor es simétrico (o antisimétrico).

A continuación se presentan algunos ejemplos de tensores.

- **Escalares:** son tensores de rango 0.
- **Vectores:** son tensores de rango 1.
- **Delta de Kronecker** δ_{jk} (definido en la **Ecuación (1.6)**): es un tensor simétrico de rango 2. En tres dimensiones, tiene seis componentes nulas (cuando $j \neq k$). Sus componentes no nulas (e iguales a 1) son δ_{11} , δ_{22} y δ_{33} . Este tensor se representa por la matriz identidad $\mathbf{I}$.
- **Levi-Civita** ϵ_{ijk} (definido en la **Expresión (1.2)**): es un tensor de rango 3, antisimétrico en cualquier par de índices. En tres dimensiones, tiene 27 componentes de las cuales seis son no nulas: ϵ_{123} , ϵ_{132} , ϵ_{213} , ϵ_{231} , ϵ_{312} y ϵ_{321} .
- **Tensor de Inercia:** para un sistema conformado por N partículas, las componentes del tensor de inercia están definidas por

$$\mathbb{I}_{jk} \equiv \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \left(\delta_{jk} \sum_{i=1}^3 x_{\alpha,i}^2 - x_{\alpha,j} x_{\alpha,k} \right), \quad (1.36)$$

donde m_α es la masa de la α -ésima partícula, $x_{\alpha,j}$ es la j -ésima componente del vector posición de la α -ésima partícula, δ_{jk} es el Delta de Kronecker y $j, k = 1, 2, 3$. La expresión para el tensor de inercia es simétrica, ya que $\mathbb{I}_{jk} = \mathbb{I}_{kj}$. Por lo tanto, tiene seis componentes independientes: $\mathbb{I}_{11}, \mathbb{I}_{22}, \mathbb{I}_{33}, \mathbb{I}_{12}, \mathbb{I}_{13}$ e $\mathbb{I}_{23}$.

Si la distribución de masa en el cuerpo es continua, la expresión para calcular las componentes del tensor de inercia será

$$\mathbb{I}_{jk} \equiv \int \int \int \rho(\vec{r}) \left(\delta_{jk} \sum_i x_i^2 - x_j x_k \right) dV, \quad (1.37)$$

donde ρ es la densidad del cuerpo y dV el diferencial de volumen.

- **Tensor de campo electromagnético:** es un tensor de rango 2, cuyas componentes están dadas por $F_{\alpha,\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$, donde $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$, $A_\alpha = (\Phi/c, \vec{A})$ es el cuadripotencial y $\partial_\alpha = (\frac{\partial}{\partial x_0}, \nabla)$. Este tensor es antisimétrico, ya que $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$ y su representación matricial es

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix},$$

donde E_i son las componentes del campo eléctrico y B_i son las componentes del campo magnético.

Nota. Un tensor de segundo rango se puede representar por una matriz, pero no toda matriz cuadrada corresponde a un tensor.

Producto directo entre tensores. El producto directo de dos tensores es un tensor de rango igual a la suma de los rangos de los dos tensores. Por ejemplo, el producto directo de un tensor de segundo rango con uno de tercer rango da como resultado un tensor de quinto rango: $A_{jk} \otimes B_{mlp} = A_{jk} B_{mlp} = T_{jkm lp}$. Otro ejemplo importante es el producto directo de los vectores $\vec{C} = (C_1, C_2, C_3)$ y $\vec{D} = (D_1, D_2, D_3)$ definido como $\vec{C} \otimes \vec{D} = \vec{C}\vec{D}$ y componentes $C_i D_j \equiv T_{ij}$, el cual da un tensor de segundo rango. En tres dimensiones la representación matricial de este tensor es:

$$\vec{C} \otimes \vec{D} = \vec{C}^T \vec{D} = \begin{pmatrix} C_1 D_1 & C_1 D_2 & C_1 D_3 \\ C_2 D_1 & C_2 D_2 & C_2 D_3 \\ C_3 D_1 & C_3 D_2 & C_3 D_3 \end{pmatrix}.$$

Contracción de tensores. Esta operación entre tensores es una generalización al producto escalar entre dos vectores. Al multiplicar escalarmente dos vectores (tensores de rango 1) se obtiene un escalar (= tensor de rango 0). La suma de los rangos de los tensores que intervienen en el producto es 2 y el rango del tensor final es 0, es decir, disminuye en dos el rango al contraer los índices. Así, se generaliza la contracción de tensores de la siguiente forma:

$$A_{ijkm} B_{pj} = T_{ipkm}.$$

Si en un producto directo de tensores hay dos índices repetidos, el resultado final es un tensor cuyo rango es la suma de los rangos de los tensores menos dos.

Ejemplo 1.4

Demostrar que el producto de un tensor simétrico por uno antisimétrico (en el mismo par de índices) es cero.

Solución.

Asumiendo que $\mathbb{A}$ es un tensor de rango n , simétrico en los índices j, k , y que $\mathbb{B}$ es un tensor de rango m , antisimétrico en los mismos índices j, k , se obtiene:

$$\begin{aligned} A_{...jk...} B_{...jk...} &= A_{...kj...} B_{...kj...} && (\text{intercambiando } j \leftrightarrow k) \\ &= (A_{...jk...})(-B_{...jk...}) && (\text{por ser A simétrico y B antisimétrico}) \\ &= -A_{...jk...} B_{...jk...} \\ &= 0. \end{aligned}$$

De acuerdo con este resultado se obtiene $\delta_{ij} \epsilon_{ijk} = 0$.

Ejemplo 1.5

Obtener la traza del tensor de inercia.

Solución.

La traza del tensor de inercia está dada por:

$$\text{Traza } \mathbb{I} = \mathbb{I}_{11} + \mathbb{I}_{22} + \mathbb{I}_{33}.$$

Utilizando la **Ecuación (1.36)** se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{Traza } \mathbb{I} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{11} \sum_i x_{\alpha,i}^2 - x_{\alpha,1} x_{\alpha,1} \right) + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{22} \sum_i x_{\alpha,i}^2 - x_{\alpha,2} x_{\alpha,2} \right) \\ &\quad + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{33} \sum_i x_{\alpha,i}^2 - x_{\alpha,3} x_{\alpha,3} \right) \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\sum_i x_{\alpha,i}^2 + \sum_i x_{\alpha,i}^2 + \sum_i x_{\alpha,i}^2 - x_{\alpha,1}^2 - x_{\alpha,2}^2 - x_{\alpha,3}^2 \right) \\ \text{Traza } \mathbb{I} &= 2 \sum_{\alpha} m_{\alpha} \sum_i x_{\alpha,i}^2 = 2 \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha}^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.6

Obtener el tensor de inercia para un cuerpo rígido *plano*.

Solución.

Supongamos que el cuerpo está en el plano XY. En este caso el vector posición de la α -ésima partícula es $\vec{r}_{\alpha} = (x_{\alpha}, y_{\alpha}, 0)$. Las componentes del tensor de inercia son (ver **Ecuación (1.36)**):

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{11} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[(x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) - x_{\alpha}^2 \right] = \sum_{\alpha} m_{\alpha} y_{\alpha}^2 \\ \mathbb{I}_{22} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[(x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) - y_{\alpha}^2 \right] = \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha}^2 \\ \mathbb{I}_{33} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[(x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) - 0 \right] = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) \equiv \mathbb{I}_{11} + \mathbb{I}_{22} \end{aligned}$$

Las componentes no diagonales están dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{12} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (0 - x_{\alpha,1} x_{\alpha,2}) = - \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} y_{\alpha} \\ \mathbb{I}_{13} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (0 - x_{\alpha,1} x_{\alpha,3}) = 0 \\ \mathbb{I}_{23} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (0 - x_{\alpha,2} x_{\alpha,3}) = 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.7

Obtener el tensor de inercia de la molécula de agua (ver **Figura 1.5**).

Solución.

La molécula de agua es un cuerpo rígido *plano* conformado por tres masas. Por lo tanto, se pueden aplicar los resultados obtenidos en el ejemplo anterior. Los vectores posición de los átomos son:

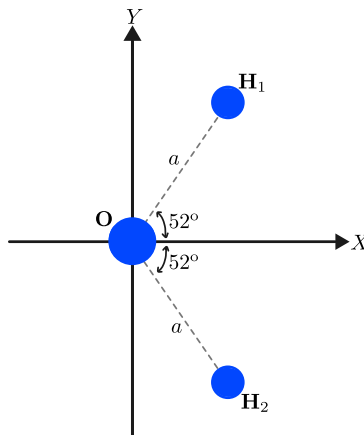


Figura 1.5: Molécula de agua.

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{r}_O = (0, 0, 0), \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_{H_1} = (a \cos 52^\circ, a \sin 52^\circ, 0), \\ \vec{r}_3 &= \vec{r}_{H_2} = (a \cos 52^\circ, -a \sin 52^\circ, 0).\end{aligned}$$

Asumiendo que $m_1 = m_O = 16m$, $m_2 = m_{H_1} = m$ y $m_3 = m_{H_2} = m$, las componentes del tensor de inercia son:

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{11} &= \sum_{\alpha=1}^3 m_{\alpha} y_{\alpha}^2 = 2m(a \sin(52^\circ))^2, \\ \mathbb{I}_{22} &= \sum_{\alpha=1}^3 m_{\alpha} x_{\alpha}^2 = 2m(a \cos(52^\circ))^2, \\ \mathbb{I}_{33} &= \mathbb{I}_{11} + \mathbb{I}_{22} = 2ma^2(\sin^2(52^\circ) + \cos^2(52^\circ)) = 2ma^2, \\ \mathbb{I}_{12} &= -\sum_{\alpha=1}^3 m_{\alpha} x_{\alpha} y_{\alpha} = -ma(\cos 52^\circ \sin 52^\circ - \cos 52^\circ \sin 52^\circ) = 0, \\ \mathbb{I}_{13} &= 0, \\ \mathbb{I}_{23} &= 0.\end{aligned}$$

De esta manera, la matriz asociada al tensor de inercia es

$$\mathbb{I} = 2ma^2 \begin{pmatrix} \sin^2(52^\circ) & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(52^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 1.8

Obtener el tensor de inercia respecto al origen del triángulo rectángulo e isósceles que se muestra en la **Figura 1.6**.

Solución.

Este es otro ejemplo de cuerpo rígido *plano* (de distribución continua de masa) de tal manera que también se pueden aplicar los resultados del **Ejemplo 1.6**, teniendo en cuenta que el triángulo tiene distribución continua de masa.

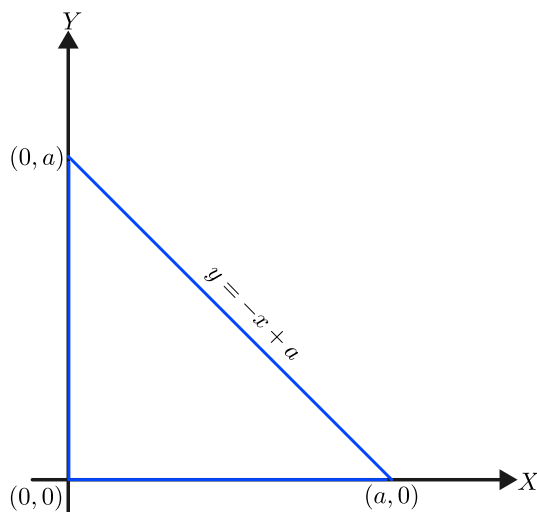


Figura 1.6: Triángulo rectángulo e isósceles.

Como la distribución de masa es superficial, el tensor de inercia es (ver **Ecuación (1.37)**)

$$\mathbb{I}_{ij} = \int \int \sigma \left(r^2 \delta_{ij} - x_i x_j \right) dA = \frac{2m}{a^2} \int \int \left[(x^2 + y^2) \delta_{ij} - x_i x_j \right] dA;$$

En la expresión anterior se tuvo en cuenta que $\sigma = m/A = 2m/a^2$, donde A es el área del triángulo ($= a^2/2$), y que $z = 0$. Teniendo en cuenta que la hipotenusa del triángulo está dada por la ecuación $y = -x+a$, las componentes del tensor de inercia son:

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{11} &= \frac{2m}{a^2} \int_0^a \int_0^{-x+a} y^2 dx dy = \frac{ma^2}{6}, \\ \mathbb{I}_{22} &= \frac{2m}{a^2} \int_0^a \int_0^{-x+a} x^2 dx dy = \frac{ma^2}{6}, \\ \mathbb{I}_{33} &= \mathbb{I}_{11} + \mathbb{I}_{22} = \frac{ma^2}{3}, \\ \mathbb{I}_{12} &= -\frac{2m}{a^2} \int_0^a \int_0^{-x+a} xy dx dy = -\frac{ma^2}{12}, \\ \mathbb{I}_{13} &= 0, \\ \mathbb{I}_{23} &= 0.\end{aligned}$$

Ejercicios

1.27 Demostrar que $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$.

1.28 Demostrar que $\epsilon_{ijk}\epsilon_{pjk} = 2\delta_{ip}$.

1.29 Las componentes del tensor de cuadrupolo eléctrico están dadas por

$$Q_{ij} = \int (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \rho(x_1, x_2, x_3) d^3x,$$

donde ρ es la densidad de carga eléctrica. ¿Es simétrico este tensor? Calcule su traza.

1.10. Derivada total de una función

Consideremos un conjunto de variables $q_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, que dependen de la variable independiente t y una función F que depende de éstas variables, $F = F(q_1, q_2, \dots, q_n; t)$. La derivada total $\frac{dF}{dt}$ está dada por:

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (1.38)$$

En particular, cuando F sea una función que dependa explícitamente de las variables x , y y z : $F = F(x, y, z)$, la derivada total $\frac{dF}{dt}$ estará dada por:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (1.39)$$

La expresión anterior se puede escribir como un producto escalar de la siguiente forma:

$$\frac{dF}{dt} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} = \vec{\nabla} F \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (1.40)$$

donde $\vec{\nabla}$ es un operador diferencial cuya representación en coordenadas cartesianas es $\vec{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$.

En un curso de mecánica clásica se requerirá obtener derivadas totales de funciones con respecto al tiempo. Por ejemplo, obtener $\frac{dE}{dt}$, $\frac{dL}{dt}$ y $\frac{dH}{dt}$, donde E , L y H son la energía total, el lagrangiano y el hamiltoniano, respectivamente.

Ejemplo 1.9

Sea $E = T + U$, donde $T = T(\dot{x}_i)$, $U = U(x_i; t)$ y $E = E(\dot{x}_i, x_i)$, donde $i = 1, 2, 3$, son las energías cinética, potencial y total, respectivamente, y t representa el tiempo. Demostrar que, para un sistema conservativo ($\vec{F} = -\nabla U$), se tiene que $dE/dt = \partial U/\partial t$.

Solución.

Obtenemos $\frac{dE}{dt}$,

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt}, \\ &= \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} + \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t}, \\ &= \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} + \nabla U \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\partial U}{\partial t}, \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial t}.\end{aligned}$$

En el segundo renglón se usó la **Ecuación (1.16)** con la notación $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. El resultado anterior indica que si la energía potencial U no es una función explícita del tiempo, entonces, $\frac{dE}{dt} = 0$, indicando que el campo de fuerzas es conservativo.

Ejemplo 1.10

El lagrangiano de un sistema es una función (realmente es una *funcional*) que depende de las coordenadas generalizadas (q_j) y de las velocidades generalizadas ($\dot{q}_j$), variables que a su vez dependen del tiempo (t): $L = L(q_j, \dot{q}_j; t)$, $j = 1, \dots, 3n - m$, donde n es el número de partículas y m es el número de ligaduras. Hallar $\frac{dL}{dt}$.

Solución.

Aplicando la **Ecuación (1.38)** se obtiene:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right] + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Ahora, utilizando la expresión $\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0$, conocida como *ecuación de Lagrange*, se llega a

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right] + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Usando la regla para derivar un producto, obtenemos la expresión para $\frac{dL}{dt}$:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (1.41)$$

En mecánica clásica es frecuente el uso de la función energía definida como $h = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$. Reorganizando la **Ecuación (1.41)** se puede obtener la razón de cambio de h respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \right) \\ \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Ejemplo 1.11

El hamiltoniano de un sistema es una función (realmente es una *funcional*) que depende de las coordenadas generalizadas (q_j), los momentos generalizados (p_j) y el tiempo (t): $H = H(q_j, p_j; t)$. Hallar $\frac{dH}{dt}$.

Solución.

$$\frac{dH}{dt} = \sum_j \left[\frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j \right] + \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Ejercicios

1.30 El lagrangiano y el hamiltoniano se pueden relacionar mediante una *transformación de Legendre* de la siguiente forma:

$$H(q_k, p_k; t) = \sum_k p_k \dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k; t). \quad (1.43)$$

(a) Obtener el diferencial del lado derecho de la transformación de Legendre (**Ecuación (1.43)**) y demostrar que

$$dH = \sum_k (\dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$

asumiendo que $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ y $\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}$.

(b) Calcular el diferencial del lado izquierdo de la **Ecuación (1.43)** ($dH(q_k, p_k; t)$) y comparar los coeficientes de dq_k y dp_k con los hallados en (a), para obtener

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}.$$

A estas ecuaciones se les conoce como *ecuaciones de Hamilton*.

1.31 Considere el hamiltoniano $H = H(q_j, p_j; t)$. Utilizando las ecuaciones de Hamilton (ver ejercicio anterior) demostrar que $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$ (utilice el resultado del **Ejemplo 1.10**).

1.32 El vector posición de la i -ésima partícula en función de las coordenadas generalizadas q_i , se escribe como $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n; t)$, donde t es el tiempo. Recordando que $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$, muestre que

$$\vec{v}_i = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}. \quad (1.44)$$

A partir de la ecuación anterior demuestre que

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}. \quad (1.45)$$

Tenga en cuenta que $\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_l}$.

Ejemplo 1.12

Demostrar que la energía cinética se puede escribir como la suma de tres términos: $T = T_0 + T_1 + T_2$, donde T_0 es independiente de las velocidades generalizadas, T_1 es lineal en las velocidades generalizadas y T_2 es cuadrática en estas velocidades. Además, mostrar que si el sistema es esclerónimo (es decir, si el tiempo no aparece explícitamente en las ecuaciones de transformación de coordenadas), se cumple que

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T.$$

Solución.

Consideremos un sistema conformado por n partículas. Su energía cinética T está dada por:

$$\begin{aligned} T &= \sum_i^n \frac{1}{2} m_i v_i^2, \\ &= \sum_i^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i, \\ &= \sum_i^n \frac{1}{2} m_i \left[\sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right] \cdot \left[\sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right], \\ &= \sum_i^n \frac{1}{2} m_i \left[\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 + 2 \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \dot{q}_k + \sum_{k,j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_j \right], \\ T &= M_0 + \sum_k M_k \dot{q}_k + \sum_{j,k} M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \equiv T_0 + T_1 + T_2, \end{aligned} \quad (1.46)$$

donde:

$$\begin{aligned} M_0 &= \sum_i^n \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2, \\ M_k &= \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \\ M_{jk} &= \sum_i^n \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Se observa que T_0 es independiente de las velocidades generalizadas mientras que T_1 y T_2 son expresiones lineal y cuadrática en las velocidades generalizadas, respectivamente.

Si el sistema es *esclerónomo*, es decir, si el tiempo no aparece explícitamente en las ecuaciones de transformación, se obtiene $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0$. Esto hace que $M_0 = 0$ y $M_k = 0$, implicando que $T_0 = 0$ y $T_1 = 0$. Por lo tanto, en un sistema esclerónomo la energía cinética es una función cuadrática en las velocidades generalizadas:

$$T = \sum_{j,k} M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (1.48)$$

La derivada de esta expresión respecto a $\dot{q}_l$ es:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_j M_{jl} \dot{q}_j + \sum_k M_{lk} \dot{q}_k;$$

multiplicando por $\dot{q}_l$ y sumando sobre l se obtiene:

$$\sum_l \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j,l} M_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l + \sum_{k,l} M_{lk} \dot{q}_k \dot{q}_l. \quad (1.49)$$

Como k y j son índices mudos, se puede intercambiar a k por j en el segundo término, obteniéndose que los dos términos son semejantes. Por lo tanto,

$$\sum_l \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = 2 \sum_{j,l} M_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l = 2T. \quad (1.50)$$

Esta expresión es importante ya que muestra que para un sistema *esclerónomo* la energía cinética es función *homogénea* de grado **2**. Este resultado es un caso especial del *Teorema de Euler* para una función $f(y_1, \dots, y_k)$ homogénea de grado n , el cual se expresa de la siguiente manera

$$\sum_k y_k \frac{\partial f}{\partial y_k} = n f. \quad (1.51)$$

1.11. Actividades complementarias

1. Consultar sobre los siguientes operadores vectoriales: *gradiente* ($\vec{\nabla}\phi$), *divergencia* ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$), *rotacional* ($\vec{\nabla} \times \vec{A}$) y *laplaciano* ($\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = \nabla^2\phi$), donde ϕ es una función escalar y $\vec{A}$ es una función vectorial.
2. Con el objetivo de reforzar los temas de producto escalar, producto vectorial y tensores se recomienda estudiar el artículo:
 - Heras JA. Decomposition of a symmetric second-order tensor. *Eur J Phys.* 2018; 39.

En este trabajo se descompone un tensor simétrico de segundo orden a partir del producto escalar y vectorial entre un vector y el tensor simétrico. Se presentan ejemplos aplicados al tensor de esfuerzo de Maxwell y a los tensores de inercia de una esfera sólida y de un cubo.

3. Con el propósito de reforzar el tema de matrices complejas y transformaciones de similitud unitarias, se sugiere estudiar el artículo:
 - Haber HE. A tale of three diagonalizations, *Int. Jour Mod Phys A.* 2021; 36.

Este trabajo es una nota pedagógica en la cual se discuten tres procedimientos para diagonalizar una matriz compleja 2×2 lo más general posible. Los tres formalismos utilizados podrían ser de gran utilidad al trabajar con estas matrices.

4. Consultar sobre los grupos de Lie $SU(N)$ y $SO(N)$ y el *homomorfismo* entre los grupos $SU(2)$ y $SO(3)$.

Los elementos de un grupo de Lie se pueden representar de la forma $e^{-i\alpha_n\lambda_n}$, donde α_n son los parámetros continuos del grupo y λ_n son los generadores del grupo (son matrices).

Los grupos de Lie $SU(N)$ están conformados por matrices *unitarias* $n \times n$ con determinante +1.

Los grupos de Lie $SO(N)$ son conjuntos de matrices *ortogonales* $n \times n$ con determinante $+1$.

Sobre el grupo $SU(2)$. Sea $\mathbf{Q}$ una matriz del grupo $SU(2)$. En general, $\mathbf{Q}$ tiene la forma:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

En principio la matriz $\mathbf{Q}$ tiene ocho parámetros. Sin embargo, al imponer la condición $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\dagger = \mathbf{I}$ se obtiene: $\beta = -\gamma^*$ y $\delta = \alpha^*$. Es decir, quedan solo cuatro parámetros y la matriz $\mathbf{Q}$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}.$$

Si además se impone la condición $\text{Det } \mathbf{Q} = 1$, se tienen solo tres parámetros independientes (coincide con el número exigido para especificar la orientación de un cuerpo rígido).

Sobre el grupo $SO(3)$. Está conformado por las matrices ortogonales 3×3 con determinante $+1$. Son las matrices que hacen las rotaciones en un espacio de tres dimensiones.

