



Capítulo

2

Elementos de la mecánica newtoniana

Uno de los aspectos distintivos de la física es la estructura matemática que utiliza para establecer sus leyes. Qué tanto se conoce acerca de algo en física, usualmente se relaciona con lo bien que se pueda medir y/o expresar numéricamente. Cuando las ideas de la física se formulan en términos matemáticos son concretas; esto es lo que permite que cualquiera pueda comprobar o refutar sus predicciones.

La mecánica es la rama de la física que estudia el movimiento de los cuerpos materiales. A pesar de los grandes progresos que tuvo la física en Grecia en los siglos III y IV A.C., el verdadero desarrollo de la mecánica (y de la física) se inicia a partir de las formulaciones de Kepler (1571 - 1630), Galileo (1564 - 1642) y Newton (1643 - 1727) en el siglo XVII. Históricamente, la mecánica fue la primera teoría en ser descrita en forma matemática.

La mecánica se puede subdividir en dos ramas, la cinemática, que estudia y describe las trayectorias de los cuerpos durante su movimiento, y la dinámica, que determina cuáles son las trayectorias o movimientos posibles a partir de las fuerzas que actúan sobre los cuerpos.

2.1. Cinemática de una partícula

La cinemática es el estudio y la descripción matemática de las trayectorias de movimiento de los objetos materiales, sin hacer alusión a las causas de dicho movimiento. Por facilidad, supondremos que el lector tiene una idea básica de los conceptos de longitud y tiempo. Empezaremos con la descripción del movimiento de una partícula (o masa puntual), definiendo esta última como un objeto cuyo tamaño y estructura interna son despreciables en relación con el contexto del problema a estudiar. Por ejemplo, un objeto del tamaño de un balón de fútbol que cae bajo la atracción gravitacional de la tierra, o la tierra misma orbitando alrededor del sol, podrían considerarse en muchos casos como partículas.

Para establecer la ubicación de una partícula se requiere especificar la posición de un punto en el espacio, con respecto a un *sistema de referencia*. Esto se logra, por ejemplo, en un espacio tridimensional, definiendo una tripla ordenada (x, y, z) con respecto a un sistema de coordenadas cartesiano $X - Y - Z$. Definimos el *vector posición* ($\vec{r}$) como el vector que parte del origen de coordenadas $X - Y - Z$ y llega al punto (x, y, z) donde se encuentra la partícula.

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}. \quad (2.1)$$

Es claro que si definimos un nuevo sistema de coordenadas $X' - Y' - Z'$, cuyo origen no coincida con el del sistema inicial, el vector posición $\vec{r}'$, referido a este nuevo sistema, no será igual a $\vec{r}$.

Ahora, cuando la partícula se desplace desde un punto inicial especificado por el vector $\vec{r}_0$ (en el tiempo t_0), hasta un punto final especificado por el vector $\vec{r}_f$ (en el tiempo t_f), podemos definir el *vector desplazamiento* ($\Delta\vec{r}$), en el intervalo de tiempo $t_f - t_0$, como el vector que parte desde el punto inicial y llega al punto final de la trayectoria (ver **Figura 2.1**):

$$\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_f - \vec{r}_0. \quad (2.2)$$

El símbolo $\equiv$ en la ecuación anterior denota una definición. La magnitud del vector desplazamiento es independiente del sistema de coordenadas elegido. Sin embargo, este vector no necesariamente contiene información precisa acerca de la distancia recorrida por la partícula, ni de la dirección del movimiento.

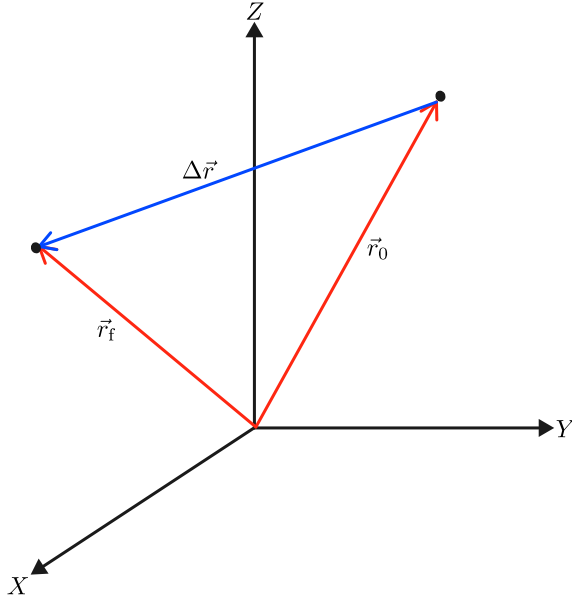


Figura 2.1: Vector desplazamiento.

Actividad. Mencione un ejemplo que corrobore esta última afirmación.

Definamos ahora el vector *velocidad promedio* como el desplazamiento sobre el intervalo de tiempo:

$$\vec{v} \equiv \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_0}{t_f - t_0} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (2.3)$$

Si se requiere información acerca de la velocidad en un punto, es necesario considerar el límite cuando el intervalo de tiempo Δt tienda a cero en la **Ecuación (2.3)**,

$$\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2.4)$$

La **Ecuación (2.4)** define la *velocidad instantánea* (en adelante simplemente velocidad) de la partícula en la posición $\vec{r}$. Si se conoce la velocidad como función del tiempo, esta ecuación puede ser reescrita en forma integral para encontrar la posición en cualquier instante:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} d\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^{t_f} \vec{v} dt. \quad (2.5)$$

De forma análoga, definimos la *aceleración promedio* como el cambio de velocidad sobre el intervalo de tiempo:

$$\vec{a} \equiv \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \quad (2.6)$$

y la *aceleración instantánea*,

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (2.7)$$

Si se conoce la aceleración como función del tiempo, la **Ecuación (2.7)** puede ser reescrita en forma integral, para hallar la velocidad en cualquier instante de tiempo,

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_f} d\vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_0 = \int_{t_0}^{t_f} \vec{a} dt. \quad (2.8)$$

Si se conocen las funciones $\vec{v}(t)$ y/o $\vec{a}(t)$, las **Relaciones (2.5)** y **(2.8)** permiten obtener la descripción completa de la posición de la partícula como función del tiempo, es decir, permiten encontrar la función que describe la trayectoria de la partícula, $\vec{r}(t)$, siempre y cuando se conozcan las condiciones iniciales (posición y velocidad en $t = 0$).

Aunque iniciamos la descripción del movimiento tomando como referencia un sistema de coordenadas cartesianas, es importante anotar que, dependiendo de la geometría del problema, el uso de algún otro sistema de coordenadas puede ser más adecuado para especificar la posición de una partícula. Por ejemplo, para una partícula que se mueva sobre la superficie de una esfera, un sistema de coordenadas curvo facilitaría la descripción de la trayectoria. El uso de otros sistemas de coordenadas como esféricas, cilíndricas o polares, entre otras, requiere transformaciones apropiadas para los vectores posición, velocidad y aceleración.



Ejercicios

2.1 Encontrar la función $\vec{r}(t)$, para el caso en que la aceleración de la partícula sea $\vec{a} = -g\hat{j}$, con g constante.

2.2 Con ayuda de las relaciones definidas en esta sección, demostrar que

$$v_f^2 - v_0^2 = 2 \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

2.3 Encontrar la función $\vec{r}(t)$, para el caso en que la aceleración de la partícula sea $\vec{a} = -kv^2\hat{i}$, con k una constante positiva.

2.4 Convertir los puntos (1,3,7) y (0,5,-2) de coordenadas cartesianas a cilíndricas.

2.5 Transformar el vector

$$\vec{V} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\hat{i} - \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\hat{k}$$

a coordenadas esféricas.

2.2. Dinámica de una partícula

La física es una ciencia natural basada en hechos experimentales. Cualquier concepto en física que apunte a explicar un fenómeno natural, debe ser contrastado y correlacionado con un importante y minucioso número de datos experimentales. Si con esos conceptos se logra interpretar adecuadamente los entre otras, requiere transformaciones apropiadas para los vectores posición, velocidad y aceleración.





La experiencia cotidiana nos indica que el movimiento de los objetos macroscópicos está generalmente asociado a las interacciones (**fuerzas**) gravitacionales o electromagnéticas con otros objetos. El objeto fundamental de la dinámica es, conocidas todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, determinar las posibles trayectorias de movimiento.

Isaac Newton fue el primero en formular un conjunto completo de leyes físicas para describir la dinámica de una partícula. Iniciaremos el estudio de la dinámica con las leyes de Newton. Está fuera del alcance de este texto realizar una discusión en detalle de las implicaciones filosóficas de cada una de estas leyes. En lugar de ello, las enunciaremos en un lenguaje moderno y de manera que nos permita avanzar de forma ágil en la descripción de la mecánica.

2.2.1. Leyes de Newton

Definamos la cantidad de movimiento lineal (o momentum) de una partícula como:

$$\vec{p} \equiv m\vec{v}, \quad (2.9)$$

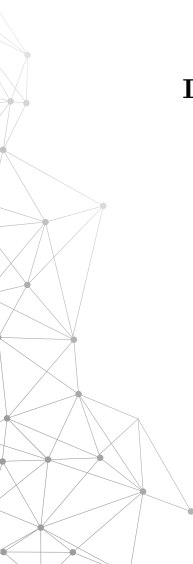
donde m es la masa de la partícula. En términos de la cantidad de movimiento lineal, podemos enunciar las leyes de Newton de la siguiente forma:

- I. Existe un conjunto de sistemas de referencia, denominados inerciales, respecto a los cuales una partícula, sobre la cual la fuerza neta sea nula, conservará constante su cantidad de movimiento lineal.
- II. Cuando sobre una partícula actúen fuerzas, la razón de cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento lineal de la partícula será igual a la fuerza neta (total):

$$\vec{F}_{\text{neta}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}).$$

- III. Para un sistema de n partículas aisladas, es decir, en ausencia de fuerzas externas, la cantidad de movimiento lineal total del sistema, definida como $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n$, permanecerá constante en el tiempo:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n = cte.$$





Un *sistema de referencia* (o *marco de referencia*) se entiende como un conjunto de convenciones utilizadas para medir las variables físicas de un sistema (posición, velocidad, aceleración, etc.). Si definimos una *partícula libre* como aquella sobre la cual la fuerza neta es cero, la primera ley se podría reescribir como: *respecto a un sistema de referencia inercial, la cantidad de movimiento lineal de una partícula libre permanecerá constante en el tiempo.*

La primera ley afirma la existencia de los *sistemas de referencia inerciales* sin aclarar detalles de cómo encontrarlos. Es decir, se delega en el experimento la tarea de definir los sistemas respecto a los cuales es correcta esa ley.

Al igual que la longitud y el tiempo, la masa es ahora un concepto aceptablemente entendido, por lo que la segunda ley introduce una definición operacional de la fuerza: *las fuerzas producen cambios en la cantidad de movimiento lineal de una partícula.* Para los sistemas físicos más generales, la segunda ley de Newton se expresa como:

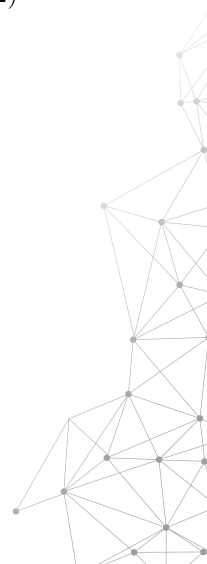
$$\vec{F}_{\text{neta}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (2.10)$$

Si la masa no varía con el tiempo,

$$\vec{F}_{\text{neta}} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}. \quad (2.11)$$

Consideremos ahora un sistema constituido por dos partículas; la cantidad de movimiento lineal de este sistema será $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. Si este es un *sistema aislado*, es decir, un sistema en el cual no actúan fuerzas externas sobre las partículas, de la definición establecida en la tercera ley se tiene que

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0. \quad (2.12)$$



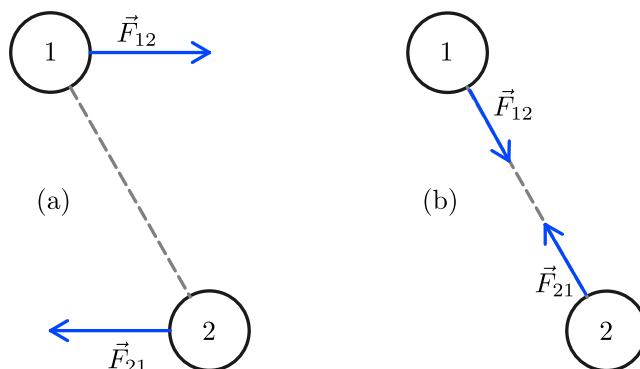


Figura 2.2: Diagrama esquemático de la ley de acción y reacción en sus formas débil (a) y fuerte (b).

En este caso, la única fuerza que actuaría sobre la partícula «uno» sería debida a la partícula «dos», $\vec{F}_{12}$. Con esta notación, la **Ecuación (2.12)** quedaría:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}_1}{dt} &= -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \\ \vec{F}_{12} &= -\vec{F}_{21} \end{aligned} \quad (2.13)$$

La tercera ley de Newton descrita en **(2.13)** se conoce como *ley de acción y reacción* y establece que *en un sistema de dos partículas aisladas, la fuerza que siente la partícula «uno» es igual en magnitud y contraria en dirección a la que siente la partícula «dos»*.

En la **Figura 2.2** se esquematizan dos posibilidades para la ley de acción y reacción: si las fuerzas entre las dos partículas son iguales y contrarias, pero no están sobre la línea que une las dos partículas, la **Relación (2.13)** se denomina *forma débil de la ley de acción y reacción* (ver **Figura 2.2a**). De otro lado, si las fuerzas entre las dos partículas, además de ser iguales y contrarias, están sobre la línea que une las dos partículas, se habla de la *forma fuerte de la ley de acción y reacción* (ver **Figura 2.2b**). Cuando la fuerza está dirigida a lo largo de la línea que une los dos cuerpos y depende solo de la separación entre ellos, se le denomina *fuerza central*.

La tercera ley de Newton no es una ley general de la naturaleza, ya que no aplica para todas las fuerzas. Por ejemplo, las fuerzas entre partículas cargadas en movimiento, las cuales dependen de la velocidad, no obedecen la tercera ley de Newton.

En casos extremos en los que se alcanzan velocidades muy altas o se involucran magnitudes espaciales muy pequeñas, las leyes de Newton pierden su validez. En estos casos no solo las leyes, sino los conceptos fundamentales de la teoría deben ser modificados para dar paso a nuevas teorías. Sin embargo, en una amplia gama de fenómenos naturales la mecánica newtoniana es correcta con un alto grado de precisión. Así mismo, sirve de punto de partida para la formulación de nuevas teorías como la relatividad y la mecánica cuántica.

Con las restricciones señaladas, las leyes de Newton ofrecen una completa descripción de la evolución de los sistemas mecánicos. Si se conoce la fuerza neta (en adelante solo fuerza) como función del tiempo ($F = F(t)$), o de la velocidad ($F = F(v)$), o de la posición ($F = F(x)$), se puede encontrar la función que describe la trayectoria de la partícula a través del siguiente procedimiento:

- Cuando $F = F(t)$: $m \frac{dv}{dt} = F(t) \rightarrow m dv = F(t) dt$, expresión que al ser integrada permite obtener la velocidad en función del tiempo, $v = v(t)$. La posición se obtiene integrando a esta última expresión respecto al tiempo.
- Cuando $F = F(v)$: $m \frac{dv}{dt} = F(v) \rightarrow \frac{dv}{F(v)} = \frac{1}{m} dt$. Al integrar se obtiene a $v = v(t)$. También se puede obtener la posición en función de la velocidad de la siguiente forma: $m \frac{dv}{dt} = F(v) \rightarrow m \frac{dv}{dx} dx = F(v) dx \rightarrow m v dv = F(v) dx \rightarrow \frac{v dv}{F(v)} = \frac{1}{m} dx$.
- Cuando $F = F(x)$: $m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x) \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{m} F(x) = 0$. La solución de esta ecuación diferencial de segundo orden permite obtener la posición en función del tiempo, $x = x(t)$.

Es importante mencionar que en algunas situaciones físicas puede ser complejo obtener una función analítica que describa la fuerza neta que actúa sobre la partícula.



Ejemplo 2.1

Dos masas atadas por una cuerda sobre dos planos inclinados.

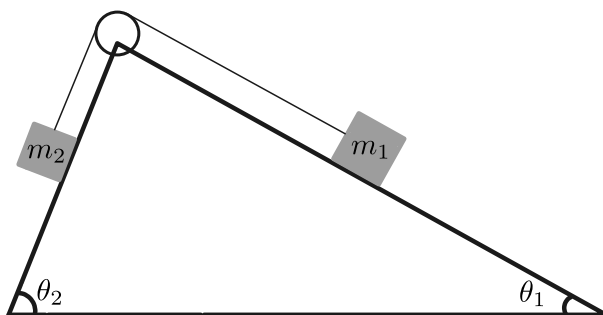


Figura 2.3: Diagrama esquemático del Ejemplo 2.1.

Consideremos dos bloques de masas m_1 y m_2 atados por una cuerda, deslizándose como se muestra en la **Figura 2.3**. Suponiendo que no existe fricción con las superficies y que la cuerda es inextensible y de masa despreciable, encontremos la aceleración de cada bloque.

Solución.

Denotemos como $\vec{F}_g$ la fuerza gravitacional; como $\vec{N}$ la fuerza de contacto entre el bloque y la superficie y como $\vec{T}$ la tensión en la cuerda. Para el bloque m_1 la fuerza neta será:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_g' + \vec{N}_1 + \vec{T}.$$

Las magnitudes de la tensión y la aceleración serán las mismas para los dos bloques, ya que consideramos la cuerda inextensible. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\vec{F}_g' + \vec{N}_1 + \vec{T} = m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2}.$$

Supongamos que el sistema se mueve en la dirección de las agujas del reloj. La anterior ecuación vectorial se puede escribir como dos ecuaciones algebraicas, una en la coordenada x y la otra en y (ver **Figura 2.4**). Tomando $\vec{F}_g^1 = m_1 \vec{g}$ se tiene para la masa m_1 en la coordenada y ,

$$N_1 - m_1 g \cos \theta_1 = 0 \quad (2.14)$$

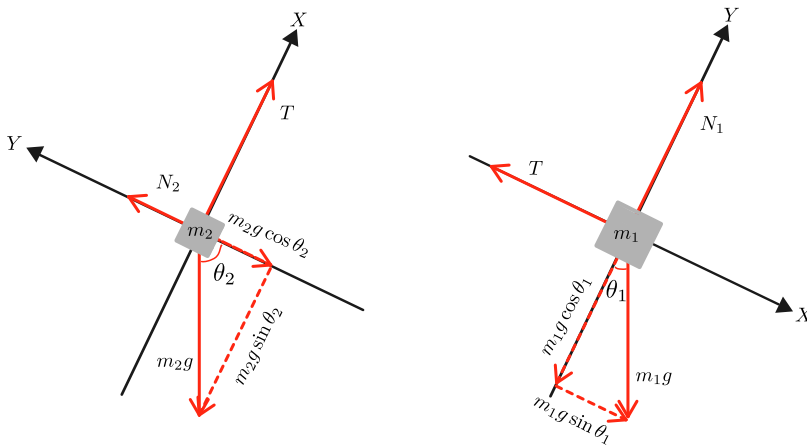


Figura 2.4: Diagrama de fuerzas para los bloques m_1 y m_2 .

La última ecuación es igual a cero, ya que en este caso el movimiento está restringido a la dirección x , por lo que, $\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} \hat{i} = a \hat{i}$. Para la coordenada x se tiene:

$$m_1 g \sin \theta_1 - T = m_1 a \quad (2.15)$$

Análogamente se obtienen dos ecuaciones para la masa m_2 :

$$N_2 - m_2 g \cos \theta_2 = 0 \quad (2.16)$$

$$-m_2 g \sin \theta_2 + T = m_2 a \quad (2.17)$$

Despejando la tensión de (2.15) y reemplazando en (2.17), se obtiene el valor de la aceleración del sistema:

$$a = \left(\frac{m_1 \sin \theta_1 - m_2 \sin \theta_2}{m_1 + m_2} \right) g. \quad (2.18)$$

Observe que si $m_1 g \sin \theta_1 - m_2 g \sin \theta_2 < 0$, el valor de la aceleración será negativo. En este caso, la magnitud de la aceleración seguirá siendo válida, pero el signo menos indicará que el sistema se mueve en el sentido contrario al que se supuso inicialmente.

Ejercicios

2.6 Utilizando el valor de la aceleración dado en (2.18), encontrar la velocidad de las masas como función de la posición.

2.7 Encontrar el valor de la aceleración en el sistema considerando que exista fricción entre los bloques y la superficie, caracterizada por los coeficientes de fricción μ_1 y μ_2 (Nota: considere que la magnitud de la fuerza de fricción sobre cada bloque se puede escribir como $F_f = \mu N$).

Ejemplo 2.2

Masa atada a un resorte.

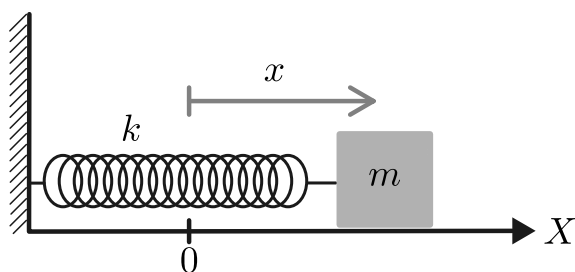


Figura 2.5: Masa atada a un resorte.



Considere un bloque de masa m sujeta a un resorte de constante elástica k , como se muestra en la **Figura 2.5**. Obtener la ecuación de movimiento suponiendo que la fuerza que ejerce el resorte sobre la masa es proporcional a su deformación.

Solución.

La fuerza del resorte sobre la masa m es proporcional y opuesta a la deformación del resorte (x): $\vec{F} = -kx\hat{i}$. A partir de la segunda ley de Newton se obtiene:

$$m\ddot{x} = -kx \quad \rightarrow \quad \ddot{x} + (k/m)x = 0.$$

La solución a esta ecuación diferencial se encuentra desarrollada en el **Capítulo 3**.

Ejemplo 2.3

Sistema de masa variable.

Analicemos ahora el movimiento de un cohete, como un caso particular de un sistema de masa variable. Encontraremos la velocidad del cohete en función del tiempo.

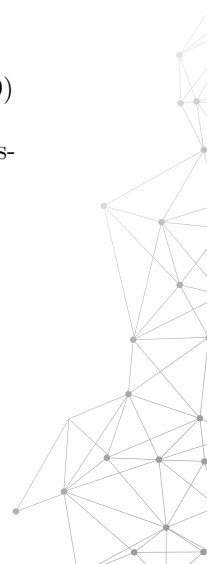
Solución.

En la **Figura 2.6** se esquematiza el problema en un instante de tiempo t y en un instante posterior $t + dt$; $\vec{v}$ representa la velocidad del cohete respecto a la tierra y $\vec{u}$ la velocidad relativa de los gases respecto al cohete. Debido a que el cohete pierde masa con el tiempo, la variación de la masa debe ser negativa, es decir, $dm < 0$. A partir de la segunda ley de Newton, la ecuación de movimiento del sistema se escribe como:

$$m\vec{g} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt}. \quad (2.19)$$

Los momentos lineales, calculados con respecto a la tierra, para los dos instantes de tiempo de la **Figura 2.6** serán:

$$\vec{p}(t) = m\vec{v}$$



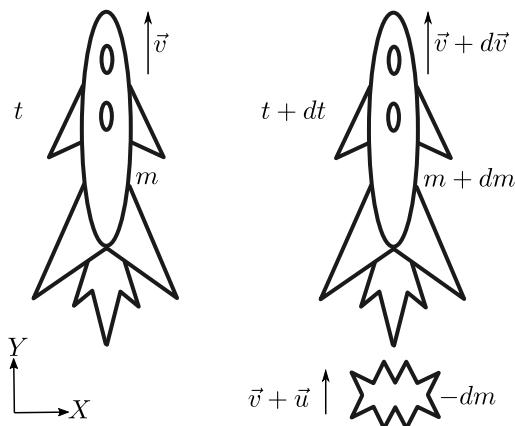


Figura 2.6: Diagrama esquemático de un sistema de masa variable en dos instantes de tiempo: t y $t + dt$.

y

$$\vec{p}(t + dt) = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + (\vec{v} + \vec{u})(-dm),$$

donde $\vec{v} + \vec{u}$ es la velocidad de los gases respecto a la tierra. Entonces,

$$\begin{aligned} \vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) &= m\vec{v} + md\vec{v} + \vec{v}dm + dmd\vec{v} - \vec{v}dm - \vec{u}dm - m\vec{v} \\ &= md\vec{v} - \vec{u}dm, \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde hemos despreciado el término $dmd\vec{v}$. Reemplazando (2.20) en la **Relación (2.19)** y dividiendo a ambos lados de la ecuación por la masa m obtenemos:

$$\vec{g}dt = d\vec{v} - \vec{u}\frac{dm}{m}. \quad (2.21)$$

Si establecemos como condiciones iniciales que en el tiempo $t = 0$, $m = m_0$ y $\vec{v} = \vec{v}_0$, podemos reescribir (2.21) en forma integral:

$$\vec{g} \int_0^t dt = \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} - \vec{u} \int_{m_0}^m \frac{dm}{m},$$

de donde, resolviendo la integral y reorganizando los términos se obtiene la velocidad del cohete como función del tiempo:



$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u} \ln \left(\frac{m}{m_0} \right) + \vec{g}t.$$

Finalmente, si tomamos como sistema de referencia el plano cartesiano mostrado en la **Figura 2.6**, tenemos que $\vec{g} = -g\hat{j}$, $\vec{v} = v\hat{j}$ y $\vec{u} = -u\hat{j}$, por lo que la magnitud de la velocidad (la rapidez) del cohete en el tiempo estará dada por

$$v = v_0 + u \ln \left(\frac{m_0}{m} \right) - gt. \quad (2.22)$$

Ejemplo 2.4

Movimiento parabólico considerando fricción.

Consideremos el movimiento de un proyectil en el aire teniendo en cuenta el efecto retardante de una fuerza proporcional a la velocidad, $\vec{F}_r = km\vec{v} = km(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j})$, donde $\dot{x} = dx/dt$, $\dot{y} = dy/dt$, m es la masa del proyectil y k es una constante positiva que modula la fuerza de resistencia del aire. Sus unidades son s^{-1} .

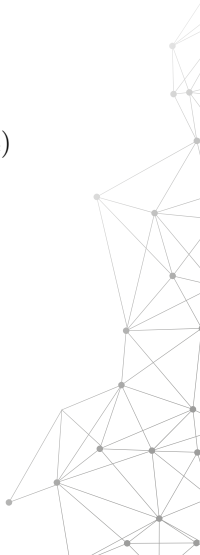
Solución.

Supongamos las siguientes condiciones iniciales: $\vec{r}(t=0) = (0,0)$ y velocidad inicial $\vec{v}(t=0) \equiv \vec{V}_0 = (V_0 \cos \theta, V_0 \sin \theta) = (U, V)$, donde θ es el ángulo de elevación con respecto a la horizontal. Las ecuaciones de movimiento para los ejes de coordenadas horizontales y verticales son:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -km\dot{x} \\ m\ddot{y} &= -km\dot{y} - mg, \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde g es la magnitud de la aceleración de la gravedad. La solución de estas ecuaciones es:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{U}{k} (1 - e^{-kt}) \\ y(t) &= -\frac{gt}{k} + \frac{kV + g}{k^2} (1 - e^{-kt}). \end{aligned} \quad (2.24)$$



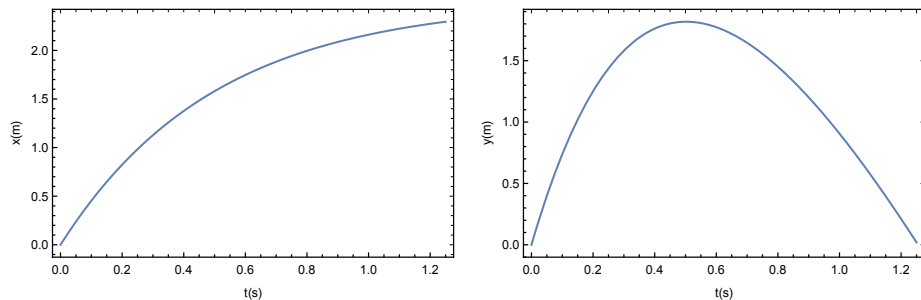


Figura 2.7: Evolución de la posición horizontal x (izquierda) y vertical y (derecha) en función del tiempo con $k = 2 \text{ s}^{-1}$ y $\theta = 30^\circ$.

Las componentes horizontal y vertical de la velocidad son

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ue^{-kt} \\ \dot{y} &= -\frac{g}{k} + \frac{kV + g}{k}e^{-kt},\end{aligned}\tag{2.25}$$

y las componentes de la aceleración están dadas por

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -kUe^{-kt} \\ \ddot{y} &= -(kV + g)e^{-kt}.\end{aligned}\tag{2.26}$$

La **Figura 2.7** muestra la evolución temporal de la posición horizontal, $x(t)$, y de la posición vertical, $y(t)$, según las **Ecuaciones (2.24)**, para $k = 2 \text{ s}^{-1}$, $\theta = 30^\circ$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ y $V_0 = 10 \text{ m/s}$.

El tiempo para alcanzar la máxima altura, o tiempo de subida, se obtiene haciendo $\dot{y} = 0$:

$$t_{\text{subida}} = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{kV + g}{g} \right).\tag{2.27}$$

Sean $(X(Y_{\text{max}}), Y_{\text{max}})$ las coordenadas del punto de altura máxima alcanzada por el proyectil. Estas se obtienen al sustituir el tiempo de subida en las



expresiones para $x(t)$ y $y(t)$:

$$X(Y_{\max}) = \frac{UV}{g} \left(1 + \frac{kV}{g}\right)^{-1} \quad (2.28)$$

$$Y_{\max} = -\frac{g}{k^2} \text{Ln} \left(1 + \frac{kV}{g}\right) + \frac{V}{k}. \quad (2.29)$$

A continuación se obtendrá la trayectoria del proyectil despejando el tiempo t de la ecuación $x = x(t)$:

$$t = \frac{1}{k} \text{Ln} \left(1 - \frac{k}{U}x\right)^{-1},$$

y sustituyendo este tiempo en la expresión $y = y(t)$:

$$y = \frac{g}{k^2} \text{Ln} \left(1 - \frac{k}{U}x\right) + \frac{kV + g}{kU}x. \quad (2.30)$$

La ecuación anterior da la trayectoria $y = y(x)$ del proyectil. En la **Figura 2.8** se muestra esta trayectoria para $k = 2 \text{ s}^{-1}$, $\theta = 30^\circ$, $V_0 = 10 \text{ m/s}$ y $g = 10 \text{ m/s}^2$.

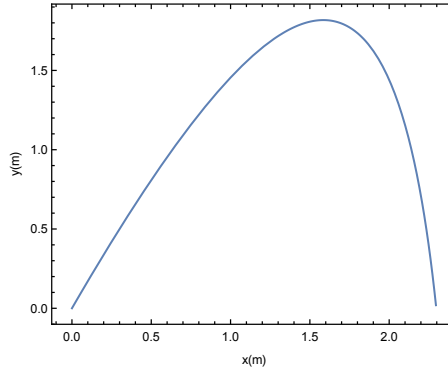
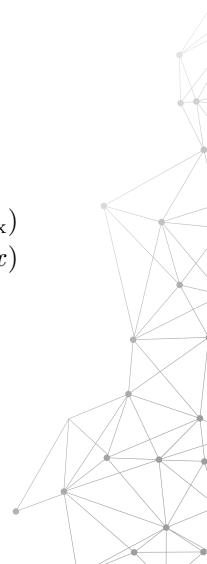


Figura 2.8: Trayectoria del proyectil con $k = 2 \text{ s}^{-1}$ y $\theta = 30^\circ$.

Usando la serie $(1 + z)^{-1} = 1 - z + z^2 - \dots$ en la expresión para $X(Y_{\max})$ y la serie $\text{Ln}(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$ en las ecuaciones para $Y_{\max}$ y $y = y(x)$



se obtiene:

$$\begin{aligned} X(Y_{\max}) &= \frac{V_0^2 \sin 2\theta}{2g} \left[1 - \frac{kV}{g} + \left(\frac{kV}{g} \right)^2 - \dots \right], \\ Y_{\max} &= \frac{V_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \left[1 - \frac{2kV}{3g} + \dots \right], \\ y &= (\tan \theta)x - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \theta} x^2 - \frac{gk}{3V_0^3 \cos^3 \theta} x^3 + \dots, \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde se ha asumido que el parámetro perturbativo adimensional $\frac{kV}{g}$ es pequeño. Al hacer $k = 0$ en la ecuaciones anteriores, se obtienen las expresiones –ampliamente conocidas– para el movimiento del proyectil en ausencia de la resistencia del aire.

La *distancia radial* (r) desde el origen hasta el proyectil se puede expresar como una función del tiempo ($r = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$) o de la distancia horizontal ($r = \sqrt{x^2 + y(x)^2}$). En la **Figura 2.9** se muestra a $r(t)$ y a $r(x)$, respectivamente, con $k = 2 \text{ s}^{-1}$, $\theta = 30^\circ$, $V_0 = 10 \text{ m/s}$ y $g = 10 \text{ m/s}^2$. Se observa que la distancia radial presenta un comportamiento especial: crece, luego decrece y vuelve a crecer nuevamente, es decir, hay una oscilación radial. El ángulo crítico a partir del cual se da este comportamiento depende del producto de la velocidad inicial y el parámetro k .

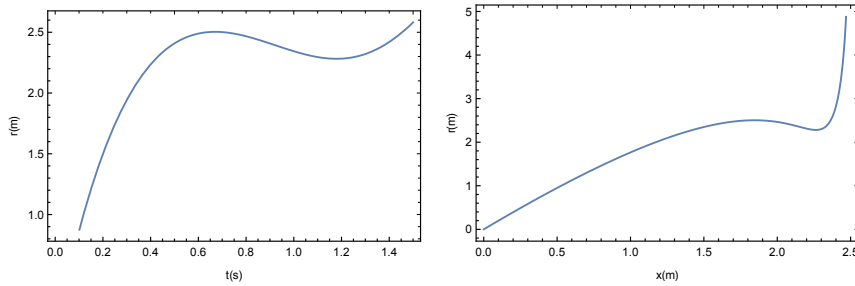


Figura 2.9: Distancia radial desde el origen hasta el proyectil (r) como función del tiempo (izquierda) y de la posición horizontal (derecha), para $k = 2 \text{ s}^{-1}$ y $\theta = 30^\circ$.

A continuación se presenta el código utilizado para obtener las gráficas del **Ejemplo 2.4**.

Código en *Mathematica* para el Ejemplo 2.4

Definiciones:

```
In[1]:= g = 10;
In[2]:= V0 = 10;
In[3]:= θ = π/6;
In[4]:= V = V0 Cos[θ];
In[6]:= k = 2;
In[7]:= x =  $\frac{U}{k} (1 - e^{-k t})$ ;
In[8]:= y =  $-\frac{g}{k} t + \frac{k V + g}{k^2} (1 - e^{-k t})$ ;
```

Código Figura 2.7 izquierda:

```
In[9]:= Plot[x, {t, 0, 1.25}, Frame→True, FrameStyle→Black,
FrameLabel → {"t(s)", "x(m)"}]
```

Código Figura 2.7 derecha:

```
In[10]:= Plot[y, {t, 0, 1.25}, Frame→True, FrameStyle→Black,
FrameLabel → {"t(s)", "y(m)"}]
```

Código Figura 2.8:

```
In[11]:= ParametricPlot[{ $\frac{U}{k} (1 - e^{-k t})$ ,  $-\frac{g}{k} t + \frac{k V + g}{k^2} (1 - e^{-k t})$ },
{t, 0, 1.25}, Frame→True, FrameStyle→Black,
FrameLabel → {"x(m)", "y(m)"}]
```

Definiciones:

```
In[12]:= r =  $\sqrt{x^2 + y^2}$ ;
```

Código Figura 2.9 izquierda:

```
In[13]:= Plot[r, {t, 0, 1.5}, Frame→True, FrameStyle→Black,
FrameLabel → {"t(s)", "r(m)"}]
```

Definiciones:

```
In[14]:= Yx =  $\frac{g}{k^2} \text{Log}[1 - \frac{k}{U} x1] + \frac{k V + g}{k U} x1$ ;
In[15]:= rx =  $\sqrt{(x1)^2 + Yx^2}$ 
```

Código Figura 2.9 derecha:

```
In[16]:= Plot[rx, {x1, 0, 2.5}, Frame→True, FrameStyle→Black,
FrameLabel → {"x(m)", "r(m)"}]
```



Ejemplo 2.5

Partícula deslizándose sobre un cascarón esférico.

En la parte más alta de medio cascarón esférico (de radio R) se encuentra una partícula de masa m . Si la partícula desciende, encuentre el ángulo o la altura en la cual se desprenderá de la superficie.

Solución.

El movimiento se encuentra restringido a un plano, por lo que podemos plantear las ecuaciones de movimiento en coordenadas cilíndricas (ver **Figura 2.10** y **Ecuaciones (1.28)**):

$$\sum F_\varphi = mg \sin \varphi = m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}), \quad (2.32)$$

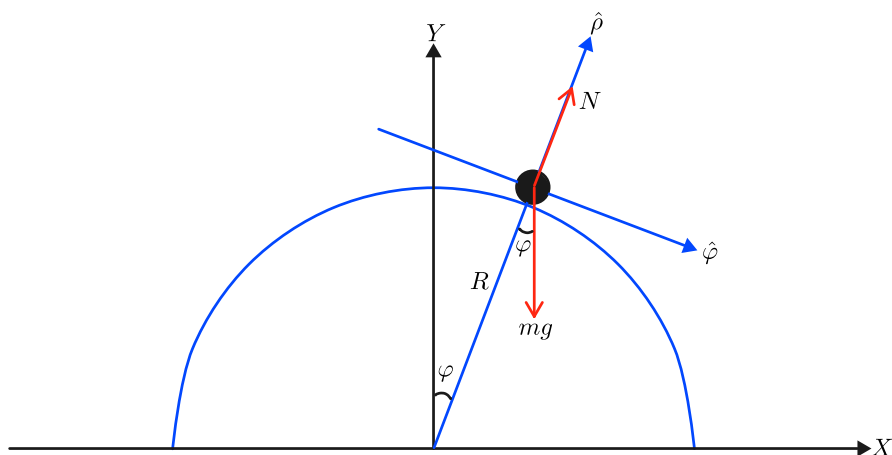


Figura 2.10: Diagrama de fuerzas para el Ejemplo 2.5.



$$\sum F_\rho = N - mg \cos \varphi = m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2). \quad (2.33)$$

Ya que el movimiento se realiza sobre la superficie del cascarón, $\rho = R$ y entonces $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$. Así, las ecuaciones de movimiento se reducen a

$$mg \sin \varphi = mR\ddot{\varphi}, \quad (2.34)$$

$$N - mg \cos \varphi = -mR\dot{\varphi}^2. \quad (2.35)$$

Ahora, si multiplicamos la **Ecuación (2.34)** por $\dot{\varphi}$, tenemos:

$$\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = \frac{g}{R}\dot{\varphi} \sin \varphi,$$

o

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{g}{R} \cos \varphi \right) = 0. \quad (2.36)$$

De otro lado, de la **Ecuación (2.35)** podemos despejar $\dot{\varphi}^2$:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{R} \cos \varphi - \frac{N}{mR}. \quad (2.37)$$

Reemplazando **(2.37)** en **(2.36)**, tenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} \frac{g}{R} \cos \varphi - \frac{N}{2mR} \right) = 0, \quad (2.38)$$

o

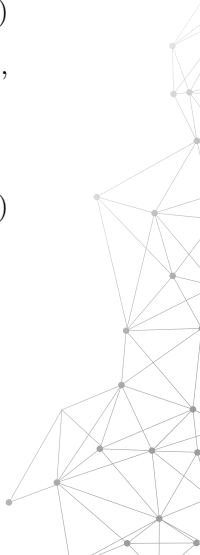
$$\frac{d}{dt} (N - 3mg \cos \varphi) = 0, \quad (2.39)$$

de manera que

$$N - 3mg \cos \varphi = K. \quad (2.40)$$

Para hallar el valor de la constante K , se tiene en cuenta que para $\varphi = 0$, se cumple que $N - mg = -m \frac{v_0^2}{R}$. Así,

$$K = -2mg - m \frac{v_0^2}{R}, \quad (2.41)$$





por lo que la **Ecuación (2.40)** se reescribe como

$$N - 3mg \cos \varphi = -2mg - m \frac{v_0^2}{R}. \quad (2.42)$$

Finalmente, en el instante en que la partícula se desprenda de la superficie la fuerza normal se hará cero. Utilizando esta condición en la **Ecuación (2.42)** encontramos el ángulo buscado,

$$\varphi = \arccos \left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR} \right). \quad (2.43)$$

Como un caso particular, si la partícula parte del reposo se obtiene

$$\varphi = \arccos \left(\frac{2}{3} \right) \quad \rightarrow \quad \varphi \approx 48,19^\circ. \quad (2.44)$$

Ejemplo 2.6

Partícula en el interior de un paraboloide de revolución.

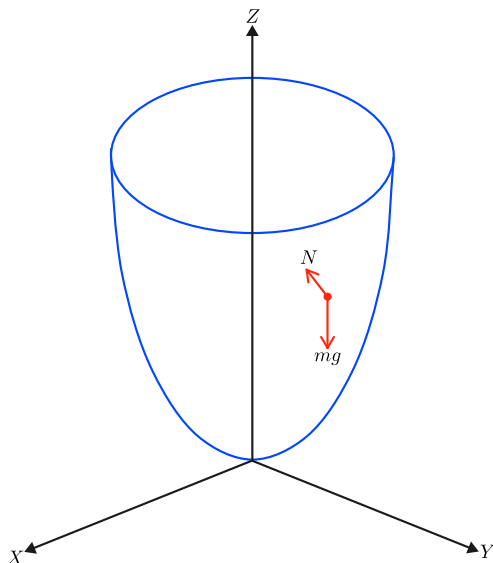


Figura 2.11: Partícula en el interior de un paraboloide de revolución.

Una partícula de masa m se mueve en el interior de un paraboloide de revolución, cuya ecuación es $z = a(x^2 + y^2)$, bajo la acción del campo gravitacional $\vec{g} = -g\hat{z}$ (ver **Figura 2.11**). Suponga que la partícula está inicialmente a una altura h y que se le imprime una velocidad inicial $\vec{v}_0$ en la dirección horizontal y tangente a la superficie de revolución. Encuentre las alturas máxima y mínima que alcanzaría la partícula en su movimiento sobre el paraboloide.

Solución.

El sistema de coordenadas adecuado para resolver este problema es el cilíndrico polar por la simetría que exhibe el problema. Las fuerzas que actúan sobre la partícula se muestran en la **Figura 2.11**.

Si asumimos que no hay fricción entre la superficie del paraboloide y la partícula tendremos que, tanto la fuerza normal como el peso, se encontrarán contenidas en el plano ρ - z , ver **Figura 2.12**.

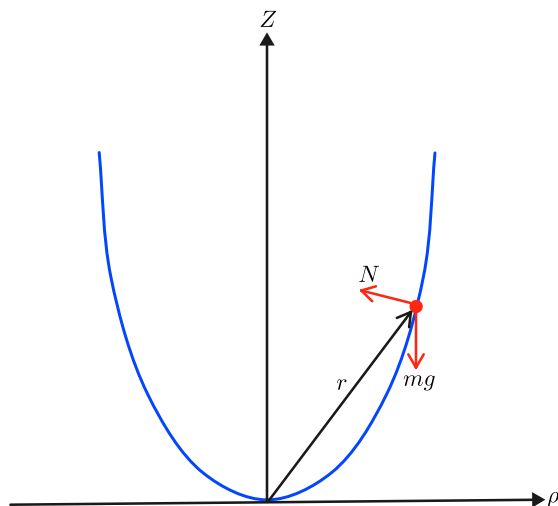


Figura 2.12: Fuerzas en el plano $\rho - z$.

Por otro lado, las expresiones para los vectores posición, velocidad y aceleración en coordenadas cilíndricas polares están dadas por:

$$\begin{aligned}
 \vec{r} &= \rho \hat{\rho} + z \hat{z}, \\
 \dot{\vec{r}} &= \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi} + \dot{z} \hat{z}, \\
 \ddot{\vec{r}} &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{\rho} + (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi}) \hat{\phi} + \ddot{z} \hat{z}.
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Escribiendo la ecuación del paraboloide en coordenadas cilíndricas tenemos: $z = a\rho^2$, por lo que $\dot{z} = 2a\rho\dot{\rho}$ y $\ddot{z} = 2a(\dot{\rho}^2 + \rho\ddot{\rho})$.

Notemos también que la fuerza normal es perpendicular a la velocidad en todo momento, por lo que $\vec{N} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$ y $\vec{N} = -N_\rho \hat{\rho} + N_z \hat{z}$. Así, $N_\rho = 2a\rho N_z$. Haciendo uso de estos resultados podemos ahora escribir las ecuaciones de movimiento para la partícula:

$$\Sigma F_\rho = -2a\rho N_z = m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2), \tag{2.46}$$

$$\Sigma F_\phi = 0 = m(\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi}), \tag{2.47}$$

$$\Sigma F_z = -mg + N_z = 2ma(\dot{\rho}^2 + \rho\ddot{\rho}). \tag{2.48}$$

Estas últimas forman un conjunto de tres ecuaciones con incógnitas ρ , ϕ y N_z . Eliminando N_z de las **Ecuaciones (2.46) y (2.48)**, tenemos

$$-2a\rho g = \ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 + 4a^2\rho(\dot{\rho}^2 + \rho\ddot{\rho}). \tag{2.49}$$

Multiplicando la **Ecuación (2.47)** por ρ tenemos $(\rho^2 \ddot{\phi} + 2\rho\dot{\rho}\dot{\phi}) = \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\phi}) = 0$, por lo que $m\rho^2\dot{\phi} = l$, con l constante. Despejando $\dot{\phi}$ obtenemos

$$\dot{\phi} = \frac{l}{m\rho^2}. \tag{2.50}$$

Sustituyendo en la **Ecuación (2.49)** obtenemos una ecuación diferencial para ρ ,

$$\ddot{\rho} - \frac{l^2}{m^2\rho^3} + 4a^2(\rho\dot{\rho}^2 + \rho^2\ddot{\rho}) + 2a g \rho = 0; \tag{2.51}$$

multiplicando por $\dot{\rho}$ tenemos $\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\rho}^2}{2} + \frac{l^2}{2m^2\rho^2} + 2a^2\rho^2\dot{\rho}^2 + 2ag\rho^2 \right) = 0$, por lo que el término al interior del paréntesis es constante:

$$\frac{\dot{\rho}^2}{2} + \frac{l^2}{2m^2\rho^2} + 2a^2\rho^2\dot{\rho}^2 + 2ag\rho^2 = \text{cte.} \quad (2.52)$$

Esta constante puede ser calculada con las condiciones iniciales del problema $z(0) = h \Rightarrow \rho(0)^2 = h/a$ y $\rho(0) = 0$; $\rho(0)\dot{\phi}(0) = v_0 \Rightarrow l^2 = hm^2v_0^2/a$, con lo que $\text{cte} = \frac{1}{2}v_0^2 + gh$. Así,

$$\frac{\dot{\rho}^2}{2} + \frac{l^2}{2m^2\rho^2} + 2a^2\rho^2\dot{\rho}^2 + 2ag\rho^2 = \frac{1}{2}v_0^2 + gh. \quad (2.53)$$

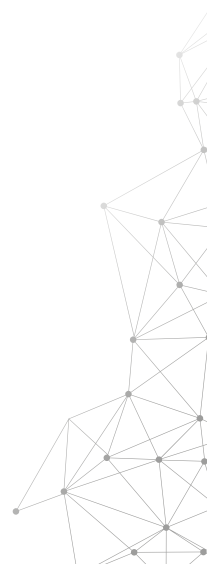
Cuando la partícula se encuentra en su altura máxima (o mínima) $\dot{z} = 0$, lo que equivale a $\dot{\rho} = 0$. Al reemplazar esto en la expresión anterior obtenemos la siguiente ecuación cuadrática en ρ ,

$$2a^2g\rho^4 - (2agh + av_0^2)\rho^2 + hv_0^2 = 0. \quad (2.54)$$

Las soluciones a esta última ecuación son $\rho_1^2 = \frac{h}{a}$ y $\rho_2^2 = \frac{v_0^2}{2ag}$ que, en términos de z , se escriben como:

$$z_1 = h \quad \text{y} \quad z_2 = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (2.55)$$

Se puede ver que si $v_0 < \sqrt{2gh}$ la partícula desciende, por lo que h será la altura máxima; por otra parte, si $v_0 > \sqrt{2gh}$, la partícula ascenderá y h será la altura mínima.



Ejemplo 2.7

Bloque deslizando sobre un plano inclinado con movimiento horizontal.

Un bloque de masa m_2 se desplaza sobre un plano inclinado de masa m_1 que se mueve sobre una superficie horizontal, tirado por una fuerza externa $\vec{F}$ (ver **Figura 2.13**). Asumiendo que hay fuerzas de fricción entre el bloque y el plano inclinado y entre la superficie horizontal y el plano inclinado, obtener las aceleraciones de los dos cuerpos.

Solución.

A partir de la **Figura 2.13** se observa que las variables x_1 , x_2 y y_2 están relacionadas entre sí mediante la siguiente expresión:

$$\tan \theta = \frac{y_2}{x_2 - x_1}.$$

Derivando esta expresión dos veces con respecto al tiempo se tiene:

$$\ddot{y}_2 = (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) \tan \theta. \quad (2.56)$$

En la **Figura 2.14** se muestran los diagramas de cuerpo libre correspondientes a las masas m_1 y m_2 . Descomponiendo las fuerzas mostradas en los diagramas de cuerpo libre, se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

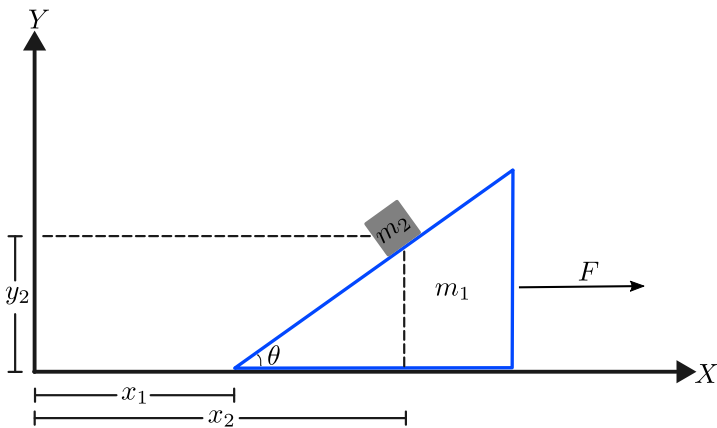


Figura 2.13: Bloque deslizando sobre plano inclinado con movimiento horizontal.

Para m_1 :

$$\sum F_X = -\mu_{k1}N_1 + N_2 (\sin \theta - \mu_{k2} \cos \theta) + F = m_1 \ddot{x}_1, \quad (2.57)$$

$$\sum F_Y = N_1 - N_2 (\cos \theta + \mu_{k2} \sin \theta) - m_1 g = 0. \quad (2.58)$$

Para m_2 :

$$\sum F_X = N_2 (-\sin \theta + \mu_{k2} \cos \theta) = m_2 \ddot{x}_2, \quad (2.59)$$

$$\sum F_Y = N_2 (\cos \theta + \mu_{k2} \sin \theta) - m_2 g = m_2 \ddot{y}_2. \quad (2.60)$$

Las cinco **Ecuaciones (2.56) a (2.60)** forman un sistema de solución única en las variables $\ddot{x}_1$, $\ddot{x}_2$, $\ddot{y}_2$, N_1 y N_2 que puede ser escrito en forma matricial así:

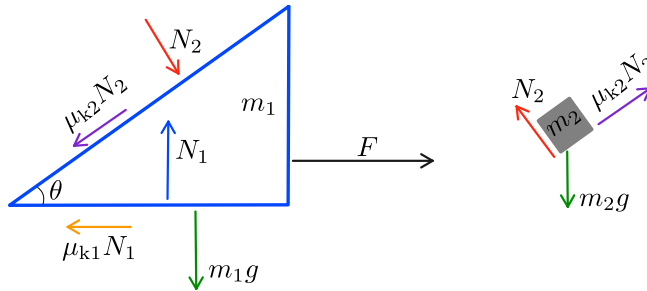
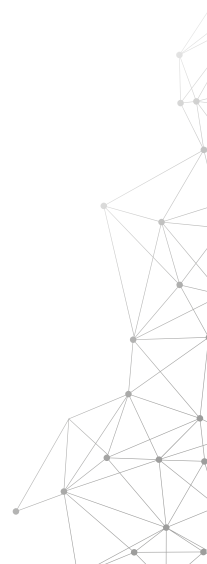


Figura 2.14: Diagramas de cuerpo libre para las masas m_1 y m_2 .



$$\begin{pmatrix} \tan \theta & -\tan \theta & 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_1 & 0 & 0 & \mu_{k1} & -\sin \theta + \mu_{k2} \cos \theta & F \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \cos \theta + \mu_{k2} \sin \theta & -m_1 g \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & \sin \theta - \mu_{k2} \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 & -\cos \theta - \mu_{k2} \sin \theta & -m_2 g \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

Solucionando este sistema por el método de Gauss-Jordan tenemos:

$$\ddot{x}_1 = \frac{(-\mu_{k1}\mu_{k2} \cot \theta + \cot \theta + \mu_{k1} + \mu_{k2})m_2 g + (-F + \mu_{k1}(m_1 + m_2)g + \mu_{k2}m_2 g) \csc^2 \theta}{m_1 + m_2 - \mu_{k1}\mu_{k2}m_2 - (\mu_{k1} + \mu_{k2})m_2 \cot \theta + m_1 \cot^2 \theta}, \quad (2.62)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{(\mu_{k2} \cos \theta - \sin \theta)(m_1 g + (-F + \mu_{k1}m_1 g) \tan \theta)}{m_1 \sec \theta - m_2 \sin \theta (\mu_{k1} + \mu_{k2} + (\mu_{k1}\mu_{k2} - 1) \tan \theta)}, \quad (2.63)$$

$$\ddot{y}_2 = -\frac{2 \sin \theta (\sin \theta (\mu_{k2} F - (\mu_{k1}\mu_{k2} - 1)(m_1 + m_2)g) + \cos \theta (F - g(\mu_{k1} + \mu_{k2})(m_1 + m_2)))}{2m_1 - m_2 \sin 2\theta (\mu_{k1} + \mu_{k2}) + m_2 (\mu_{k1}\mu_{k2} - 1) \cos 2\theta - \mu_{k1}\mu_{k2}m_2 + m_2}, \quad (2.64)$$

$$N_1 = \frac{F\mu_{k2}m_2 \cos 2\theta - Fm_2 \sin 2\theta - F\mu_{k2}m_2 + 2m_1 g(m_1 + m_2)}{2m_1 - m_2 \sin 2\theta (\mu_{k1} + \mu_{k2}) + m_2 \cos 2\theta (\mu_{k1}\mu_{k2} - 1) - \mu_{k1}\mu_{k2}m_2 + m_2}, \quad (2.65)$$

$$N_2 = \frac{m_2 (\tan \theta (\mu_{k1}m_1 g - F) + m_1 g)}{m_1 \sec \theta - m_2 \sin \theta (\tan \theta (\mu_{k1}\mu_{k2} - 1) + \mu_{k1} + \mu_{k2})}. \quad (2.66)$$



En el caso especial en que no se tenga la fuerza aplicada $\vec{F}$ y que las superficies sean totalmente lisas, es decir, $\mu_{k1} = \mu_{k2} = 0$, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\ddot{x}_1 = \left(\frac{m_2 \sin \theta \cos \theta}{m_1 + m_2 \sin^2 \theta} \right) g, \quad (2.67)$$

$$\ddot{x}_2 = - \left(\frac{m_1 \sin \theta \cos \theta}{m_1 + m_2 \sin^2 \theta} \right) g, \quad (2.68)$$

$$\ddot{y}_2 = - \left(\frac{(m_1 + m_2) \sin^2 \theta}{m_1 + m_2 \sin^2 \theta} \right) g, \quad (2.69)$$

$$N_1 = \left(\frac{(m_1 + m_2)m_1}{m_1 + m_2 \sin^2 \theta} \right) g, \quad (2.70)$$

$$N_2 = \left(\frac{m_1 m_2 \cos \theta}{m_1 + m_2 \sin^2 \theta} \right) g. \quad (2.71)$$

A continuación se presenta el código en *Mathematica* utilizado para resolver el sistema de **Ecuaciones (2.56)** a **(2.60)** y la aproximación cuando no se considere la fuerza aplicada ni fricción entre las superficies.

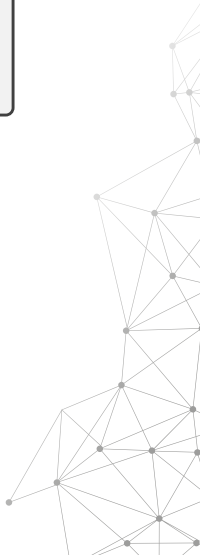
Código en *Mathematica* para el Ejemplo 2.7

Solución al sistema de **Ecuaciones (2.61)**:

```
In[1]:= A=RowReduce[{{Tan[θ],-Tan[θ],1,0,0,0},{m1,0,0,μk1,
-Sin[θ]+μk2*Cos[θ],F},{0,0,0,1,Cos[θ]+μk2*Sin[θ],-m1*g},
{0,m2,0,0,-μk2*Cos[θ]+Sin[θ],0},{0,0,m2,0,-μk2*Sin[θ]
-Cos[θ],-m2*g}}]//FullSimplify
```

Aproximación ($F = 0, \mu_1 = \mu_2 = 0$)

```
In[2]:= A /. {F→0,μk1→0,μk2→0}//FullSimplify
```





Ejercicios

2.8 En relación con el **Ejemplo 2.3** obtener la altura del cohete como función del tiempo, $y(t)$, a partir de (2.22). Asuma que la masa del cohete disminuye linealmente con el tiempo.

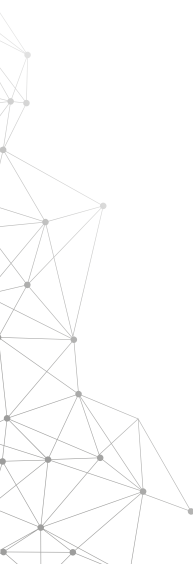
2.9 Obtener las **Ecuaciones (2.24)**.

2.10 Supongamos una partícula de masa m , restringida a moverse sobre la superficie de una esfera de radio R , por la aplicación de una fuerza $\vec{F}(\theta, \phi)$. Escribir la ecuación de movimiento.

2.11 Una partícula esta sujeta a un fuerza unidimensional de la forma $F = te^{t/2}$. Con ayuda de *Mathematica* o de cualquier otro paquete computacional, encuentre la posición, la velocidad y la aceleración como funciones del tiempo.

2.12 Suponga un sistema como el de la **Figura 2.3**, con $\theta_2 = 90^\circ$ y con $m_1 = 2m_2$. Si existe un coeficiente de fricción μ entre el bloque y la superficie, encuentre el valor de θ_1 para el cual el sistema se mueva con velocidad constante.

2.13 Movimiento parabólico sin fricción. Una partícula se lanza desde el piso con una velocidad inicial V_0 formando un ángulo α con la horizontal. Calcule el tiempo requerido para que la partícula intercepte una línea que pase por el origen y forma un ángulo $\beta < \alpha$ con la horizontal. ¿Cuál es la distancia (sobre la recta) alcanzada por la partícula?, ¿para qué ángulo α esta distancia será máxima? ¿Cuál es el rango máximo?



2.14 En relación con el **Ejemplo 2.5** discuta qué sucede en los siguientes casos: (a) cuando la velocidad inicial (v_0) se encuentre en el rango $0 \leq v_0 < \sqrt{gR}$. Grafique el ángulo φ en función de $v_0/\sqrt{gR}$; (b) cuando $v_0 \geq \sqrt{gR}$.

2.15 Dos masas atadas por una cuerda con tensión *variable*. Dos masas en reposo están atadas por una cuerda inextensible como se muestra en la **Figura 2.15**. Demuestre que la tensión T en función del ángulo θ está dada por

$$T(\theta) = \frac{\mu_s mg}{\cos\theta + \mu_s \sin\theta};$$

donde μ_s es el coeficiente de fricción estática entre la superficie horizontal y la masa m . Grafique a T en función de θ . Demuestre que si la tensión es igual en dos ángulos diferentes, $T(\theta_1) = T(\theta_2)$, la condición que deben cumplir estos ángulos es

$$\theta_1 + \theta_2 = 2\tan^{-1}(\mu_s) = 2\theta_{min},$$

donde θ_{min} corresponde al ángulo en el cual la tensión es mínima.

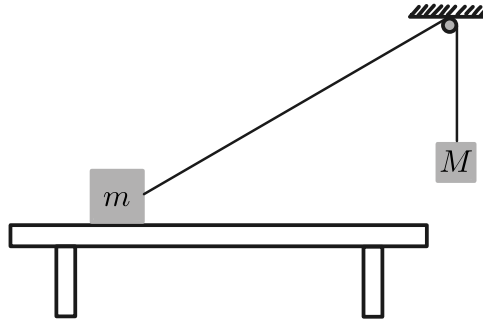


Figura 2.15: Dos masas atadas por una cuerda con tensión variable.



2.2.2. Trabajo y energía

En esta subsección estudiaremos los conceptos de trabajo y energía, los cuales complementan el enfoque vectorial de las leyes de Newton.

Supongamos una partícula que se desplaza del punto A al punto B , por cualquier trayectoria, bajo la acción de una fuerza $\vec{F}$. Definiremos el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ como:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (2.72)$$

Cuando la fuerza $\vec{F}$ sea constante, se obtiene $W_{AB} = F(dr)\cos\theta$. Cuando $\theta = 90^\circ$, la fuerza no realiza trabajo.

Podemos definir un diferencial de trabajo, considerando un desplazamiento infinitesimal de la partícula:

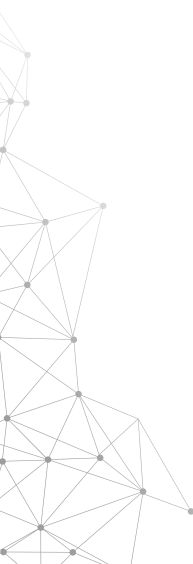
$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (2.73)$$

De la **Ecuación (2.73)** puede verse que el trabajo en cada desplazamiento infinitesimal será positivo, si el vector fuerza tiene una componente en la dirección del desplazamiento; será negativo, si el vector fuerza tiene una componente en la dirección contraria al desplazamiento; y será cero, si el vector fuerza es perpendicular al desplazamiento. Representar gráficamente estas tres situaciones.

Si $\vec{F}$ representa la fuerza neta sobre la partícula, el lado derecho de la **Ecuación (2.73)** se puede escribir así:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt, \\ &= \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) dt = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (v^2) dt = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right). \end{aligned} \quad (2.74)$$

En el procedimiento anterior se utilizó la **Ecuación (1.16)**.



El trabajo neto para llevar la partícula de A hasta B por cualquier trayectoria se obtiene como:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = T_B - T_A, \quad (2.75)$$

donde $T = \frac{1}{2}mv^2$, se define como la *energía cinética* de la partícula. La **Ecuación (2.75)** se conoce como el *teorema fundamental del trabajo y la energía* y relaciona el trabajo neto hecho sobre una partícula, cuando esta se desplaza entre dos puntos, con la diferencia de la energía cinética de la partícula calculada en esos dos puntos, sin importar la trayectoria.

El teorema del trabajo y la energía permite conocer el trabajo total realizado sobre un objeto, conociendo únicamente los valores de la velocidad en los puntos inicial y final, sin tener información de las fuerzas. De otro lado, existen fuerzas para las cuales el valor de la integral de línea en la **Ecuación (2.75)** depende solo de las posiciones inicial y final y es *independiente* de la trayectoria; estas fuerzas son llamadas *conservativas* y son de gran importancia en el estudio de la mecánica.

Definimos una *fuerza conservativa* como aquella para la cual el trabajo requerido para transportar una partícula solo depende de los valores, en la posición inicial y final, de una función escalar $U(\vec{r})$, así:

$$\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B), \quad (2.76)$$

o, de manera equivalente,

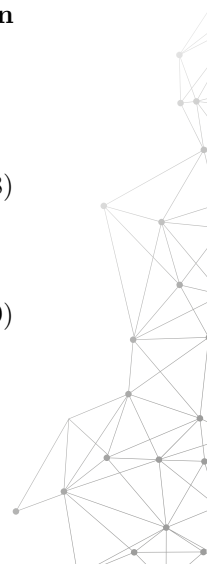
$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r}). \quad (2.77)$$

La función escalar $U(\vec{r})$ se conoce como la *energía potencial* de la partícula. Si combinamos el teorema fundamental del trabajo y la energía (**Ecuación (2.75)**) y la definición de energía potencial (**Ecuación (2.76)**), obtenemos:

$$\begin{aligned} U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B) &= \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2, \\ U(\vec{r}_A) + \frac{1}{2}mv_A^2 &= U(\vec{r}_B) + \frac{1}{2}mv_B^2, \end{aligned} \quad (2.78)$$

o, definiendo la *energía mecánica total del sistema* como $E = T + U$,

$$E_A = E_B. \quad (2.79)$$





La **Relación (2.79)** se conoce como el *teorema de la conservación de la energía mecánica*. Este teorema indica que para un sistema en el cual las fuerzas que actúan sobre la partícula son conservativas, la energía mecánica total, entendida como la suma de la energía cinética más la energía potencial, tiene el mismo valor en cada tiempo y en cada punto de la trayectoria.

Ejemplo 2.8

Partícula bajo la acción de una fuerza conservativa unidimensional.

Consideremos una partícula bajo la influencia de una fuerza conservativa representada mediante un potencial $U(x)$ dado por la **Figura 2.16**. Hacer un análisis cualitativo exhaustivo a partir de la gráfica del potencial para diversos valores de la energía total.

Solución.

El teorema de la conservación de la energía mecánica establece que

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + U(x),$$

de donde se puede encontrar la velocidad como:

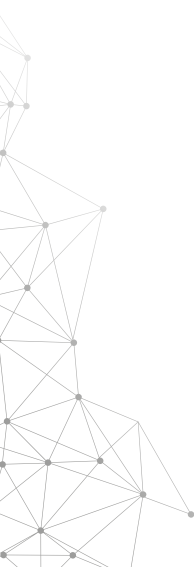
$$v(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que $v = \frac{dx}{dt}$, se obtiene

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}.$$

Si en el tiempo inicial t_0 la partícula se encontraba en la posición x_0 ,

$$\int_{t_0}^t dt = t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}. \quad (2.80)$$



Si se conoce la expresión para la energía potencial $U(x)$ solo se requiere integrar esta última ecuación para obtener la posición como función del tiempo. En muchas ocasiones no es posible obtener una solución analítica por lo que se debe recurrir a soluciones numéricas.

Sin embargo, aun sin resolver la **Ecuación (2.80)**, se puede realizar un análisis *cualitativo* del movimiento de la partícula a partir de la gráfica de la energía potencial.

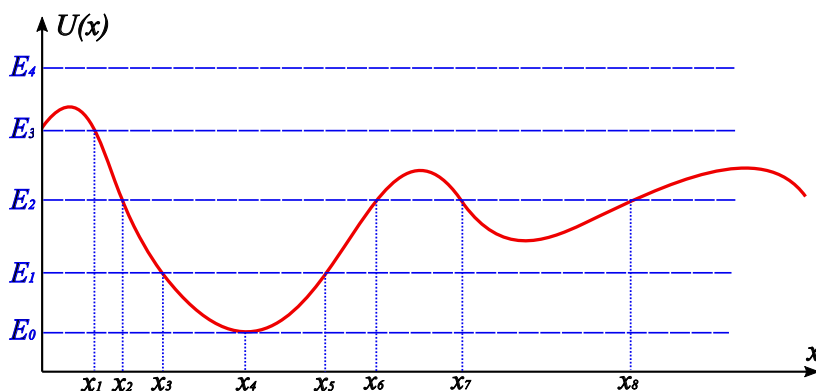


Figura 2.16: Curva de energía potencial $U(x)$ con algunos valores de la energía total indicados.

Supongamos que la partícula se encuentra bajo la acción de un potencial de la forma representada en la **Figura 2.16**. Debemos anotar que ya que la energía cinética siempre es positiva, la energía total debe ser mayor o igual que la energía potencial ($E \geq U$), para que el movimiento corresponda a un caso físico real.

Cuando la partícula tenga una energía total E_1 , su movimiento estará restringido a la zona comprendida entre los puntos x_3 y x_5 . Si la función $U(x)$ en esta región es, por ejemplo, parabólica, la partícula realizará un *movimiento armónico simple*, con x_4 como punto de equilibrio. Debido a la importancia del *movimiento armónico* en diferentes campos de la física, en el **Capítulo 3** se estudia en detalle este tema.





Si la energía total de la partícula es E_2 su movimiento será similar, pero restringido a una de dos regiones: $x_2 < x < x_6$ o $x_7 < x < x_8$; si está inicialmente en una de ellas, no podrá pasar a la otra. La región $x_6 < x < x_7$ es prohibida porque en ella $U(x) > E$.

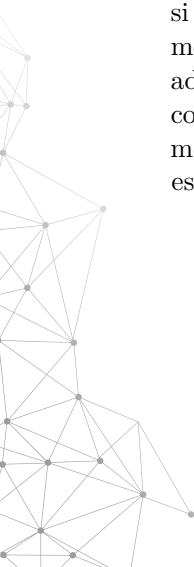
Si su energía total es E_0 , toda su energía será potencial; su energía cinética será cero, es decir, estará en reposo en la posición x_4 .

Con energía total E_3 , la partícula será libre de moverse en $x > x_1$. Si la partícula se acerca al origen, rebotará en la barrera de potencial en x_1 , invertirá su velocidad y regresará hacia el infinito. La región $0 < x < x_1$ es prohibida.

Por último, si la partícula tiene energía total E_4 , se podrá mover en cualquier lugar del espacio, pero su velocidad cambiará de acuerdo con las variaciones de $U(x)$.

De la definición dada en la **Ecuación (2.77)**, se puede apreciar que a la energía potencial se le puede agregar una constante sin alterar el resultado de la fuerza. Esto implica que la energía potencial, por sí sola, no tiene ningún significado físico, lo que realmente importa son los cambios de energía potencial. Así mismo, ya que la velocidad de una partícula depende del sistema de referencia desde el que se mida, son las diferencias de energía cinética las que tienen sentido físico.

Si las fuerzas que actúan sobre la partícula no son conservativas, es decir, si no se puede definir una energía potencial o si la energía potencial definida mediante la **Ecuación (2.76)** no depende únicamente de la posición, sino además, por ejemplo, del tiempo y/o la velocidad y/o la aceleración, no se conserva la energía mecánica, aún cuando esta se pueda seguir definiendo como $E = T + U$. El ejemplo más representativo de una fuerza no conservativa es el rozamiento.



Vale la pena destacar que los dos teoremas de conservación enunciados en esta sección (conservación de la cantidad de movimiento lineal y conservación de la energía mecánica total) no fueron demostrados. Ellos surgieron de forma natural como consecuencia de las leyes de Newton. En este mismo sentido, existe una cantidad adicional que se conserva: el *momento angular*. El momento angular es de gran importancia en el estudio de las fuerzas centrales.

Ejemplo 2.9

Considere una partícula que se mueve bajo la influencia del potencial

$$U(x) = U_0 \left(\frac{a}{x^p} + \frac{x^p}{a} \right),$$

donde $x > 0$, p es un parámetro y las unidades de a son $[x]^p$. Asuma el valor fijo $U_0 = 1$ J y $a > 0$. Hacer el gráfico de $U(x)$ Vs. x para $p = 1, 2, 3, 4$ y determinar si el potencial tiene mínimos (o máximos) y en cuáles regiones el movimiento de la partícula es restringido (o acotado).

Solución.

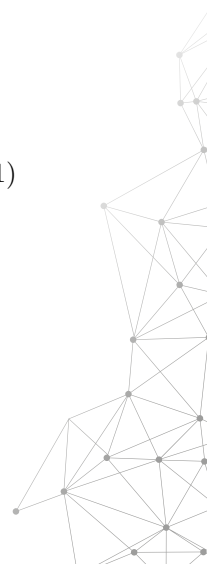
(a) Con el objetivo de analizar la contribución de cada uno de los términos que conforman el potencial, en la **Figura 2.17** se muestra la variación en función de x de a/x^p , x^p/a y $a/x^p + x^p/a$, con $a = 1$ y $p = 1, 2, 3, 4$. En estas gráficas se observa que para valores pequeños de x domina $1/x^p$ y para valores grandes de x domina el término x^p . Como se tomó a positivo, el potencial siempre será positivo y va a tener un mínimo.

(b) La derivada del potencial $U(x)$ respecto a x está dada por:

$$\frac{dU}{dx} = -\frac{ap}{x^{p+1}} + \frac{p}{a}x^{p-1}.$$

Aplicando la condición $\frac{dU}{dx} = 0$, se obtiene que hay puntos críticos en

$$x = a^{\frac{1}{p}}. \quad (2.81)$$



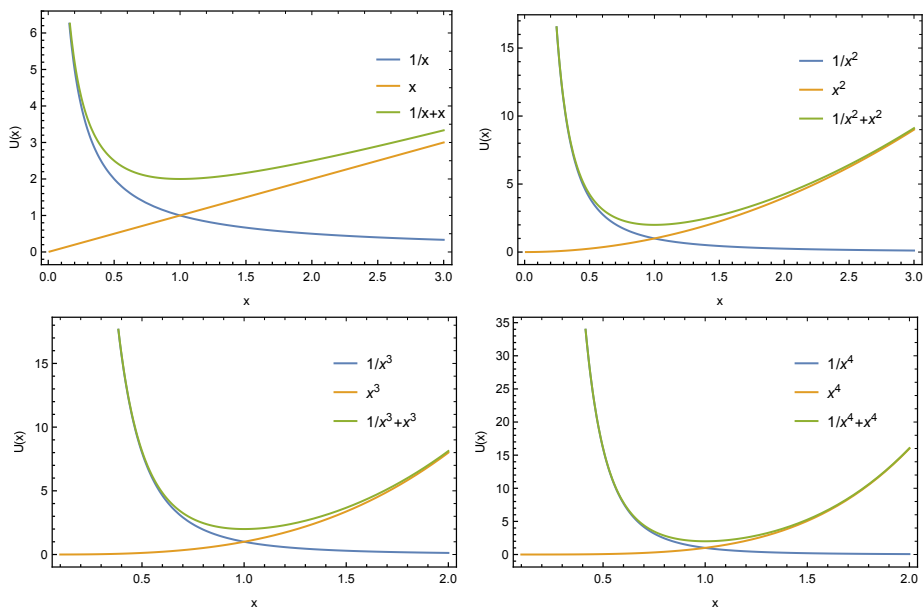


Figura 2.17: Variación de $1/x^p$, x^p y $1/x^p + x^p$ en función de x .

Para determinar si el potencial es máximo o mínimo en este punto crítico se obtiene la segunda derivada del potencial y se evalúa en $x = a^{\frac{1}{p}}$:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{ap(p+1)}{x^{2+p}} + \frac{p(p-1)}{ax^{2-p}},$$

$$\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=a^{\frac{1}{p}}} = 2p^2 > 0;$$

por lo tanto, el potencial es mínimo en $x = a^{\frac{1}{p}}$ y su valor está dado por

$$U_{min} = U(x = a^{\frac{1}{p}}) = 2.$$

Se concluye que el mínimo del potencial es independiente de los valores de p y a .

(c) Cuando la energía total del sistema sea mayor que U_{min} el sistema estará acotado. Una situación especial se muestra en la **Figura 2.18** con la energía total $E = 3 > U_{min}$, y con $a = 4$ y $p = 7$ (aunque U_{min} es independiente de estos valores).

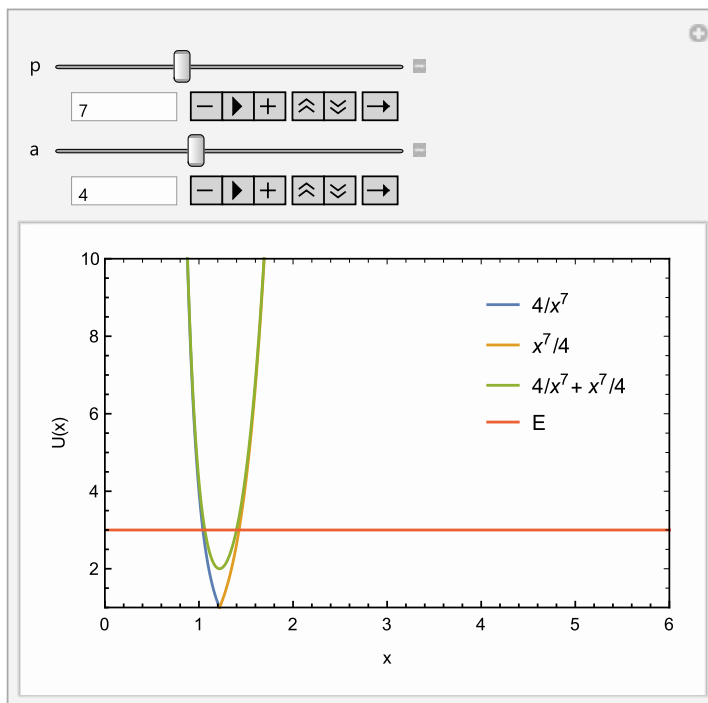
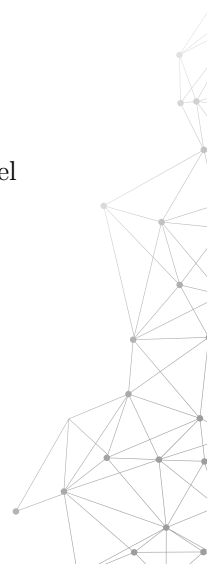


Figura 2.18: Variación de $4/x^7$, $x^7/4$ y $4/x^7 + x^7/4$ en función de x . Parámetros $a = 4$, $p = 7$ y $E = 3$.

A continuación se presenta el código utilizado para obtener las gráficas del **Ejemplo 2.9**.



Código en Mathematica para el Ejemplo 2.9

Definiciones:

```
In[1]:= U0 = 1;
```

```
In[2]:= U[x-, p-, a-] := U0 (  $\frac{a}{x^p}$  +  $\frac{x^p}{a}$  );
```

```
In[3]:= U[x, 1, 2];
```

Código Figuras 2.17

```
In[4]:= Manipulate[Plot[{ $\frac{U_0 a}{x^p}$ ,  $\frac{U_0 x^p}{a}$ , U[x,p,a]}, {x, 0.1, 5},
  Frame→True, FrameStyle→Black, FrameLabel → {"x", "U(x)"},
  PlotLegends→Placed[{1/x4, x4, 1/x4+x4},{0.8, 0.7}]],
  {p, 0, 10}, {a, 0.1, 10}]
```

Código Figura 2.18

```
In[5]:= Manipulate[Plot[{ $\frac{U_0 a}{x^p}$ ,  $\frac{U_0 x^p}{a}$ , U[x,p,a], 3}, {x, 0, 10},
  Frame→True, FrameStyle→Black, FrameLabel → {"x", "U(x)"},
  PlotLegends→Placed[{4/x7, x7/4, 4/x7+x7/4, "E"},
  {0.8, 0.7}], PlotRange → {{0, 6},{1, 10}}], {p, 0, 20},
  {a, 0.1, 10}]
```

Pregunta. Asumiendo que

$$U(x) = U_0 \left(\frac{a}{x^p} + \frac{x^q}{b} \right),$$

con $a, b, p, q > 0$ y $p \neq q$, ¿tiene el potencial un valor mínimo? Si es así, ¿para qué valor de x ?

Ejemplo 2.10

Resolveremos el problema del **Ejemplo 2.5** utilizando la conservación de la energía.

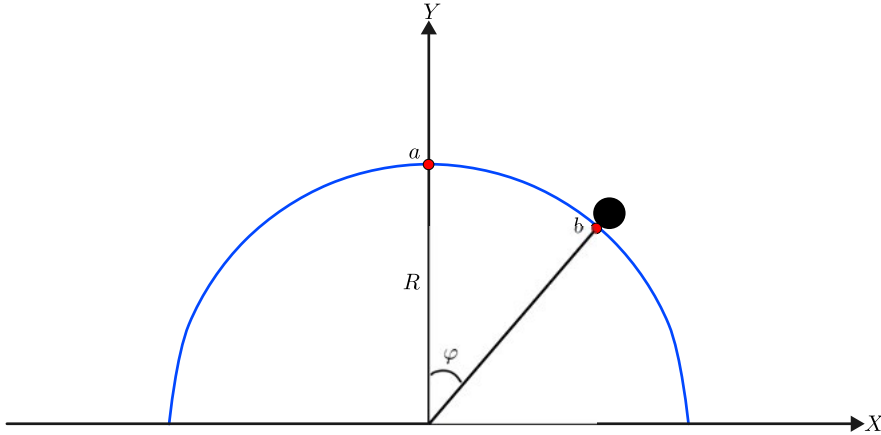


Figura 2.19: Partícula descendiendo sobre la superficie de un cascarón esférico.

Solución.

Ya que no consideramos la fricción, podemos igualar las energías mecánicas en los puntos *a* (donde $\varphi = 0$) y *b* (donde se desprende la partícula) de la **Figura 2.19**,

$$E_a = E_b,$$

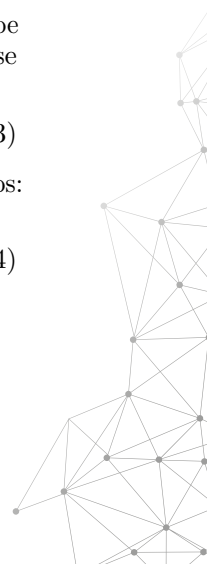
$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgR \cos \varphi. \quad (2.82)$$

Ahora, en el instante en que se desprende la partícula la fuerza normal debe anularse, por lo que, al aplicar la segunda ley de Newton en el punto *b*, se obtiene:

$$mg \cos \varphi = m \frac{v^2}{R}. \quad (2.83)$$

Despejando el valor de v^2 en (2.83) y reemplazándolo en (2.82), obtenemos:

$$\varphi = \arccos \left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR} \right). \quad (2.84)$$





Ejercicios

2.16 Para una fuerza conservativa, demostrar la equivalencia entre las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r}) &= -\nabla U(\vec{r}) ; & \nabla \times \vec{F}(\vec{r}) &= 0 ; \\ \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B) ; & \oint \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= 0 .\end{aligned}$$

2.17 Demostrar que si la energía potencial depende explícitamente del tiempo, no se conserva la energía mecánica.

2.18 Para cada una de las siguientes fuerzas unidimensionales, encuentre la energía potencial asociada. Haga una gráfica (con ayuda del *Mathematica* o de cualquier otro programa computacional) y un análisis del movimiento de la partícula (k es una constante positiva): **a.** $F = \frac{k}{x^2}$. **b.** $F = kx - kx^3$. **c.** $F = -kx$.

2.19 Cuando dos átomos o moléculas se acercan, sus nubes electrónicas empiezan a interactuar y aparecen fuerzas que pueden variar rápidamente con la distancia (ver simulación disponible en https://phet.colorado.edu/sims/html/atomic-interactions/latest/atomic-interactions_en.html).

Un modelo matemático sencillo para representar este comportamiento es el llamado *potencial de Lennard-Jones*:

$$U(r) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right],$$

donde r es la distancia entre las partículas, ϵ es la llamada profundidad del potencial y σ es la distancia en la que el potencial entre las partículas es cero. Con ayuda del *Mathematica* graficar el potencial para diferentes valores de σ y ϵ y analizar el movimiento de la partícula. ¿Para qué valor de r el potencial tiene un mínimo? ¿En qué regiones el movimiento de la partícula está restringido (o acotado)?

Nota. El potencial de Lennard-Jones es un caso particular del potencial de Mie: $U(r) = k_p/x^p - k_q/x^q$, donde k_p y k_q son constantes.

2.2.3. Momento angular

El *momento angular* ($\vec{L}$) de una partícula, respecto al origen de un sistema de coordenadas desde el que se define el vector posición $\vec{r}$, está dado por:

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}. \quad (2.85)$$

El *torque o momento de fuerza* $\vec{N}$, respecto al mismo origen de coordenadas, se define como:

$$\vec{N} \equiv \vec{r} \times \vec{F}. \quad (2.86)$$

Si se toma la derivada del momento angular,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}), \quad (2.87)$$

se obtiene (ver **Capítulo 1**):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{N}. \quad (2.88)$$

La **Ecuación (2.88)** implica que si no hay un torque neto actuando sobre la partícula, el momento angular se conserva, es decir, no varía en el tiempo. Ya que el torque depende del sistema de referencia, la adecuada elección del sistema de coordenadas puede facilitar el análisis del problema.

2.3. Dinámica de un sistema de partículas

Hasta aquí hemos estudiado la dinámica de una partícula. Como lo expresamos anteriormente, en diversas situaciones podemos considerar como partícula algunos objetos macroscópicos, despreciando las interacciones entre las partículas que constituyen ese objeto. En lo que sigue, extenderemos nuestra discusión a sistemas formados por muchas partículas. Este estudio será de especial interés cuando se estudie la mecánica del cuerpo rígido.



2.3.1. Centro de masa

Consideremos ahora un sistema compuesto por n partículas cuyas masas sean $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$. La masa total del sistema M , será

$$M = \sum_{i=1}^n m_i. \quad (2.89)$$

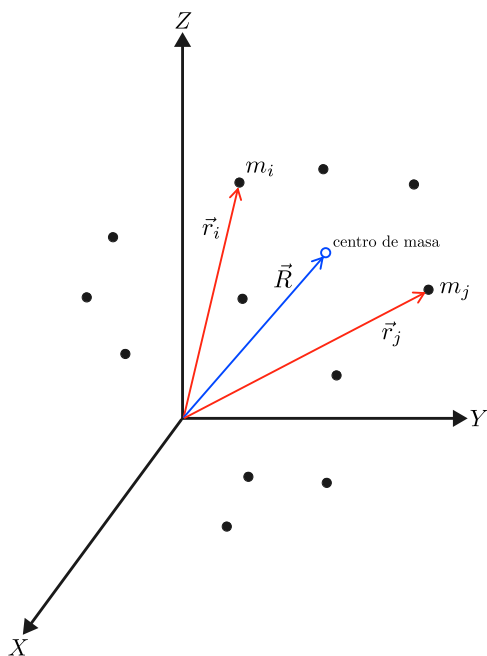


Figura 2.20: Vector posición del centro de masa para un sistema de partículas.

Se define el *centro de masa* de un sistema como el punto geométrico que se comporta como si sobre él actuara la resultante de todas las fuerzas externas al sistema.



Si respecto al sistema de referencia escogido, $\vec{r}_i$ representa el vector posición de la i -ésima partícula, se define el vector *posición del centro de masa* $\vec{R}$ como:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i; \quad (2.90)$$

En la **Figura 2.20** se puede ver que el vector $\vec{R}$ depende del sistema de coordenadas elegido.

Para un sistema en el que la distribución de la masa sea continua, la suma en (2.90) se reemplaza por una integral,

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm, \quad (2.91)$$

donde $dm = \rho dV$, siendo ρ la densidad del cuerpo. La integral considerada en esta ecuación es triple.

Ejercicios

2.20 Considere dos masas m_1 y m_2 ubicadas en los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$, respectivamente. Obtener el centro de masa en los siguientes casos: (a) $m_1 = m_2 = m$; (b) $m_1 = m$ y $m_2 = 2m$; (c) $m_1 = m$ y $m_2 = 100m$. ¿Qué concluye?

2.21 Calcular la posición del centro de masa de la distribución mostrada en la **Figura 2.21**



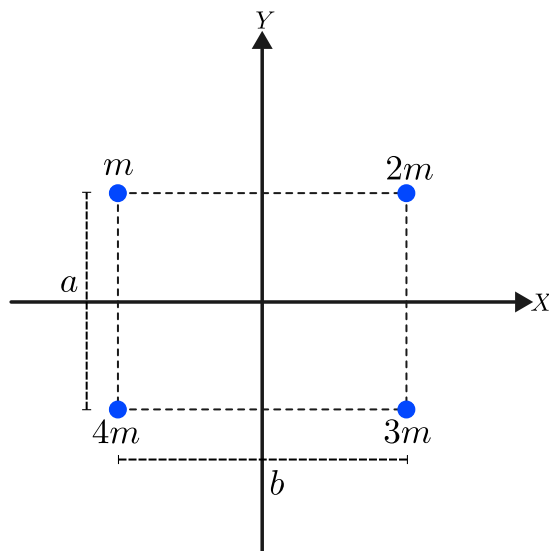


Figura 2.21: Cuatro masas ubicadas en los vértices de un rectángulo de lados a y b .

2.22 Obtener la posición del centro de masa de un sistema formado por tres masas $m_1 = m$, $m_2 = 2m$ y $m_3 = 3m$ ubicadas en los puntos $(b, 0, b)$, $(0, b, 2b)$ y $(0, 2b, b)$, respectivamente.

2.23 Calcular la posición del centro de masa del hemisferio superior de un cascarón esférico de radio R y densidad (masa por unidad de área) constante σ .

2.24 Mostrar que

$$M^2 R^2 = M \sum_i m_i r_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_i m_j r_{ij}^2.$$

Tener en cuenta que $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$, lo cual implica $r_{ij}^2 = \vec{r}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij} = r_i^2 + r_j^2 - 2\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j$.

2.25 Obtener la posición del centro de masa para la molécula de agua (ver **Figura 1.5**, en el **Capítulo 1**, en la sección de Tensores).

2.26 Obtener la posición del centro de masa para los triángulos de densidad uniforme que se muestran en las **Figuras 1.6 y 2.22**.

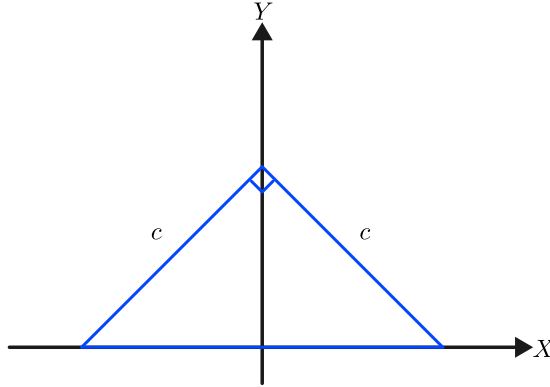


Figura 2.22: Triángulo rectángulo e isósceles ubicado en los cuadrantes I y II.

2.3.2. Momento lineal del sistema

Denotemos con $\vec{F}_i$ la fuerza neta que actúa sobre la i -ésima partícula del sistema. Esta fuerza se puede descomponer en dos: la fuerza neta hecha desde el exterior del sistema sobre la i -ésima partícula, que denotaremos fuerza externa, $\vec{F}_i^{(e)}$; y la resultante de la suma de las fuerzas internas debida a las restantes $n - 1$ partículas del sistema,

$$\vec{f}_i = \sum_{j \neq i}^n \vec{f}_{ij}, \quad (2.92)$$

donde $\vec{f}_{ij}$ representa la fuerza sobre la partícula i , debida a la partícula j ; el término $i = j$ no entra en la suma, ya que $\vec{f}_{ii} = 0$. La fuerza total sobre la partícula i -ésima será:



$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{f}_i. \quad (2.93)$$

Aplicando la segunda ley de Newton a la partícula i -ésima,

$$\vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt} = m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{j \neq i}^n \vec{f}_{ij}. \quad (2.94)$$

La relación (2.94) constituye la ecuación dinámica de movimiento para la partícula i -ésima. Sumemos ahora las ecuaciones para cada una de las partículas del sistema,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \vec{f}_{ij}, \quad \text{ó} \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \right) &= \vec{F}^{(e)} + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \vec{f}_{ij}. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Donde hemos definido la *fuerza externa neta* como la suma de todas las fuerzas externas actuando sobre cada partícula del sistema, $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(e)} \equiv \vec{F}^{(e)}$. El último término de la derecha de la **Ecuación (2.95)** desaparece considerando que, de acuerdo con la tercera ley de Newton, $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$ (verificar para $n = 3$). Utilizando la definición del vector posición del centro de masa:

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \vec{F}^{(e)}. \quad (2.96)$$

Este importante resultado indica que el centro de masa del sistema se mueve como si fuera una única partícula de masa M sobre la que actúa la fuerza externa total $\vec{F}^{(e)}$, sin importar las fuerzas internas.

Ejercicio

2.27 Completar los pasos intermedios para obtener la **Ecuación (2.96)**



Ya definimos anteriormente el *momento lineal del sistema* $\vec{P}$ como la suma de los momentos lineales de cada partícula,

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \frac{d}{dt} (M\vec{R}) = M \frac{d\vec{R}}{dt}, \quad (2.97)$$

o, de manera alternativa

$$\vec{P} = M\vec{V}, \quad (2.98)$$

donde hemos definido la *velocidad del centro de masa* como $\vec{V} \equiv \frac{d\vec{R}}{dt}$. Así, el *momento lineal total del sistema* es el mismo que tendría una partícula de masa M moviéndose con la velocidad del centro de masa. Si tomamos la derivada de $\vec{P}$,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}^{(e)}. \quad (2.99)$$

La **Relación (2.99)** indica que *cuando no existen fuerzas externas sobre el sistema, el momento lineal total del sistema se conserva y su valor es igual al del momento lineal del centro de masa, $\vec{P} = M\vec{V}$.*

2.3.3. Momento angular y torque en un sistema de partículas

Definamos como $\vec{r}_i'$ la posición relativa de la i -ésima partícula con respecto al centro de masa (ver **Figura 2.23**),

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{R}. \quad (2.100)$$

Derivando respecto al tiempo obtendremos las relaciones para las velocidades

$$\vec{v}_i' = \vec{v}_i - \vec{V}, \quad (2.101)$$

donde $\vec{v}_i'$ representa la velocidad de la partícula respecto al centro de masa, y $\vec{V}$ la velocidad del centro de masa.

De manera análoga a como se definió para el caso de una partícula, en un sistema de n partículas se define el momento angular de la i -ésima partícula como:



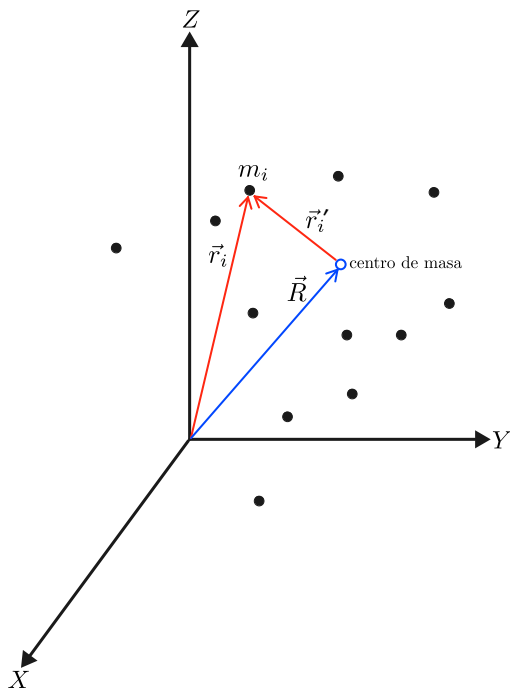


Figura 2.23: Posición relativa de una partícula respecto al centro de masa.

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i; \quad (2.102)$$

y el momento angular total del sistema:

$$L = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i). \quad (2.103)$$

Utilizando la **Ecuación (2.100)**, podemos reescribir el momento angular total en términos del centro de masa:

$$L = \sum_i^n (\vec{r}_i' + \vec{R}) \times m_i (\vec{v}_i' + \vec{V}); \quad (2.104)$$

esto es,

$$L = \sum_i^n (\vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i') + \sum_i^n (m_i \vec{r}_i') \times \vec{V} + \vec{R} \times \sum_i^n (m_i \vec{v}_i') + \vec{R} \times \sum_i^n (m_i \vec{V}) \quad (2.105)$$

El segundo y tercer término de la derecha de la **Ecuación (2.105)** se anulan (demostrarlo o argumentar cualitativamente). Por lo tanto,

$$\vec{L} = \sum_i^n (\vec{r}_i' \times \vec{p}_i') + \vec{R} \times M\vec{V}. \quad (2.106)$$

Es decir, *el momento angular total del sistema $\vec{L}$, se puede escribir como la suma de dos contribuciones: el momento angular relativo al centro de masa ($\sum_i^n (\vec{r}_i' \times \vec{p}_i')$) y el momento angular del centro de masa ($\vec{R} \times M\vec{V}$).*

Tomemos ahora la derivada temporal del momento angular total (**Ecuación (2.103)**),

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_i^n \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i), \\ &= \sum_i^n (\vec{v}_i \times m \vec{v}_i) + \sum_i^n (\vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}), \\ &= \sum_i^n \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i^{(e)} + \sum_{j \neq i}^n \vec{f}_{ij} \right), \\ &= \sum_i^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} + \sum_i^n \sum_{j \neq i}^n (\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}). \end{aligned} \quad (2.107)$$

Teniendo en cuenta la tercera ley de Newton, el último término de la **Ecuación (2.107)** se anula (demostrarlo). Por lo tanto, definiendo el *torque total del sistema* como $\vec{N} = \sum_{i=1}^n \vec{N}_i$, la **Ecuación (2.107)** queda:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} = \sum_i \vec{N}_i = \vec{N}. \quad (2.108)$$



La **Ecuación (2.108)** define la *conservación del momento angular* para un sistema de partículas: si el torque total externo sobre un sistema de partículas es cero, el momento angular total del sistema permanecerá constante en el tiempo.

2.3.4. Teorema del trabajo y la energía en un sistema de partículas

Definamos la *energía cinética total del sistema* (T) de n partículas, como la suma de las energías cinéticas de cada partícula,

$$T = \frac{1}{2} \sum_i^n m_i v_i^2. \quad (2.109)$$

En coordenadas del centro de masa,

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{V}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i^n m_i (\vec{v}_i' + \vec{V}) \cdot (\vec{v}_i' + \vec{V}), \\ &= \frac{1}{2} \sum_i^n m_i V^2 + \frac{1}{2} \sum_i^n m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} (2) \vec{V} \cdot \sum_i^n m_i \vec{v}_i'. \end{aligned} \quad (2.110)$$

El último término de la derecha de la **Ecuación (2.110)** es $\sum_i^n m_i \vec{v}_i' = 0$. Por lo tanto, la energía cinética total del sistema será:

$$T = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum_i^n m_i v_i'^2. \quad (2.111)$$

La energía cinética de un sistema de muchas partículas es igual a la energía cinética del centro de masa más la suma de las energías cinéticas, relativas al centro de masa, de todas las partículas del sistema.



Definamos ahora el trabajo neto para llevar el sistema de partículas de un estado A , a un estado B así:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \sum_i^n \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i, \\ &= \sum_i^n \int_A^B m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot (\vec{v}_i dt) = \frac{1}{2} \sum_i^n m_i \int_A^B d(v_i^2). \end{aligned} \quad (2.112)$$

Con esta definición:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \frac{1}{2} \left(\sum_i^n m_i v_i^2 \right)_B - \frac{1}{2} \left(\sum_i^n m_i v_i^2 \right)_A, \\ W_{AB} &= T_B - T_A. \end{aligned} \quad (2.113)$$

La **Relación (2.113)** representa el *teorema del trabajo y la energía para un sistema de partículas*.

Energía potencial en un sistema de partículas

Recordemos que la fuerza total sobre la partícula i -ésima de un sistema es

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{j \neq i}^n \vec{f}_{ij}. \quad (2.114)$$

Si sumamos sobre todas las partículas y aplicamos la tercera ley de Newton,

$$\vec{F} = \sum_i^n \vec{F}_i = \sum_i^n \vec{F}_i^{(e)}. \quad (2.115)$$

Ahora, si $\vec{F}_i^{(e)}$ es conservativa, podemos definirla en términos de la energía potencial como $\vec{F}_i^{(e)} = -\nabla U_i^{(e)}$, entonces

$$\vec{F} = -\nabla \left(\sum_i^n U_i^{(e)} \right)$$

o

$$\vec{F} = -\nabla U_T, \quad (2.116)$$

donde hemos definido la energía potencial total del sistema como $U_T \equiv \sum_i^n U_i^{(e)}$.



**Ejercicio**

2.28 Demostrar que para el caso en que $\vec{F}_i^{(e)}$ sea conservativa, se puede definir el teorema de conservación de la energía mecánica, de manera análoga a como se definió para una partícula.

2.3.5. Caso especial: cuerpo rígido

Un *cuerpo rígido* es un objeto cuya forma no cambia bajo la acción de fuerzas externas. Por lo tanto, las distancias relativas entre las partículas que conforman el cuerpo están fijas, es decir, no varían. Si el cuerpo rígido está fijo en un punto, entonces, no se trasladará, sino que rotará con velocidad angular instantánea $\vec{\omega}$ alrededor del punto fijo. A continuación se obtendrán las expresiones para el momento angular y la energía cinética para un cuerpo rígido.

Momento angular ($\vec{L}$) de un cuerpo rígido. Tal como se definió previamente, el momento angular para un sistema conformado por n partículas es:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} \times \vec{v}_{\alpha}), \\ &= \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha})), \\ &= \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} (\vec{\omega} r_{\alpha}^2 - \vec{r}_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} \cdot \vec{\omega})).\end{aligned}\tag{2.117}$$

Para obtener la última expresión se utilizó la tercera de las ecuaciones mostradas en el **Ejercicio 1.22**, con $\vec{A} = \vec{C} \equiv \vec{r}_{\alpha}$ y $\vec{B} \equiv \vec{\omega}$.

La k -ésima componente de $\vec{L}$ está dada por:

$$\begin{aligned}
 L_k &= \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \left[\omega_k \sum_{i=1}^3 x_{\alpha,i}^2 - x_{\alpha,k} \sum_{j=1}^3 x_{\alpha,j} \omega_j \right], \\
 L_k &= \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \left[\sum_{j=1}^3 \omega_j \delta_{kj} \sum_{i=1}^3 x_{\alpha,i}^2 - x_{\alpha,k} \sum_{j=1}^3 x_{\alpha,j} \omega_j \right], \\
 L_k &= \sum_{j=1}^3 \underbrace{\left[\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \left(\delta_{kj} \sum_{i=1}^3 x_{\alpha,i}^2 - x_{\alpha,k} x_{\alpha,j} \right) \right]}_{\mathbb{I}_{kj}} \omega_j, \\
 L_k &= \sum_{j=1}^3 \mathbb{I}_{kj} \omega_j;
 \end{aligned} \tag{2.118}$$

donde $\mathbb{I}$ es el *tensor de inercia* y $x_{\alpha,i}$ es la i -ésima componente del vector posición de la α -ésima partícula. En notación compacta, la expresión anterior se puede ver como el producto escalar entre un tensor de segundo rango y un vector:

$$\vec{L} = \mathbb{I} \cdot \vec{\omega}.$$

Este tensor relaciona una suma sobre las componentes de la velocidad angular con la k -ésima componente del momento angular. Sus componentes están dadas por (ver **Ecuación (1.36)**)

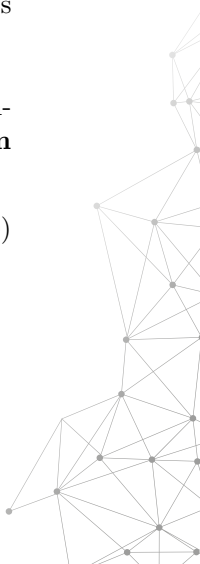
$$\mathbb{I}_{kj} \equiv \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \left(\delta_{kj} \sum_{i=1}^3 x_{\alpha,i}^2 - x_{\alpha,k} x_{\alpha,j} \right). \tag{2.119}$$

Las componentes $\mathbb{I}_{11}$, $\mathbb{I}_{22}$ e $\mathbb{I}_{33}$ se llaman *momentos de inercia*, mientras que las componentes $\mathbb{I}_{12}$, $\mathbb{I}_{13}$ e $\mathbb{I}_{23}$ se denominan *productos de inercia*. Todas estas componentes dependen de la dirección del eje de rotación.

Si el cuerpo corresponde a una distribución continua de materia con densidad de masa $\rho = \rho(\vec{r})$, el tensor de inercia está dado por (ver **Ecuación (1.37)**)

$$\mathbb{I}_{jk} \equiv \int_V \rho(\vec{r}) \left(\delta_{jk} \sum_i x_i^2 - x_j x_k \right) dV, \tag{2.120}$$

donde dV es el diferencial de volumen.





Pregunta. ¿Cuáles son las unidades de las componentes del tensor de inercia? (ver **Ecuaciones (2.119)** o **(2.120)**).

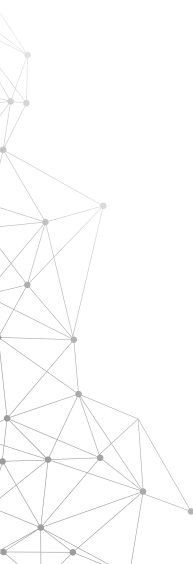
Nota. En la **Sección 1.9**, se explican detalladamente algunas propiedades del tensor de inercia y se obtiene el tensor de inercia para algunos cuerpos.

La **Ecuación (2.118)** indica que cada una de las componentes del momento angular está dada por una función lineal de todas las componentes del vector velocidad angular. Es decir, *el momento angular y la velocidad angular están relacionados mediante una transformación lineal*. A continuación se mostrará explícitamente esto, haciendo $k = 1, 2, 3$ en la **Ecuación (2.118)**:

$$\begin{aligned} L_1 &= \mathbb{I}_{11}\omega_1 + \mathbb{I}_{12}\omega_2 + \mathbb{I}_{13}\omega_3, \\ L_2 &= \mathbb{I}_{21}\omega_1 + \mathbb{I}_{22}\omega_2 + \mathbb{I}_{23}\omega_3, \\ L_3 &= \mathbb{I}_{31}\omega_1 + \mathbb{I}_{32}\omega_2 + \mathbb{I}_{33}\omega_3. \end{aligned}$$

A partir de la **Ecuación (2.119)**, los momentos de inercia, en forma explícita, son:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{11} &= \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \left(\sum_{i=1}^3 x_{\alpha,i}^2 - x_{\alpha,1}x_{\alpha,1} \right) = \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} (r_{\alpha}^2 - x_{\alpha}^2) \\ \mathbb{I}_{22} &= \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \left(\sum_{i=1}^3 x_{\alpha,i}^2 - x_{\alpha,2}x_{\alpha,2} \right) = \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} (r_{\alpha}^2 - y_{\alpha}^2) \\ \mathbb{I}_{33} &= \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \left(\sum_{i=1}^3 x_{\alpha,i}^2 - x_{\alpha,3}x_{\alpha,3} \right) = \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} (r_{\alpha}^2 - z_{\alpha}^2). \end{aligned}$$





Y los productos de inercia son:

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{12} &= -\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} x_{\alpha,1} x_{\alpha,2} = -\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} x_{\alpha} y_{\alpha}, \\ \mathbb{I}_{13} &= -\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} x_{\alpha,1} x_{\alpha,3} = -\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} x_{\alpha} z_{\alpha}, \\ \mathbb{I}_{23} &= -\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} x_{\alpha,2} x_{\alpha,3} = -\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} y_{\alpha} z_{\alpha};\end{aligned}$$

donde $x_{\alpha,1} = x_{\alpha}$, $x_{\alpha,2} = y_{\alpha}$, $x_{\alpha,3} = z_{\alpha}$ y $\sum_{i=1}^3 x_{\alpha,i}^2 = x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2 = r_{\alpha}^2$. Como el tensor de inercia es simétrico (ver **Sección 1.9**), entonces $\mathbb{I}_{12} = \mathbb{I}_{21}$, $\mathbb{I}_{13} = \mathbb{I}_{31}$ e $\mathbb{I}_{23} = \mathbb{I}_{32}$.

El tensor de inercia se puede representar por una matriz cuadrada 3×3 . Cuando todos los productos de inercia son cero, entonces, el tensor de inercia se representa por una matriz diagonal: $\mathbb{I}_{kj} = I_k \delta_{kj}$, donde los I_k son los elementos de la diagonal de esta matriz. En este caso,

$$L_k = \sum_j \mathbb{I}_{kj} \omega_j = \sum_j I_k \delta_{kj} \omega_j = I_k \omega_k. \quad (2.121)$$

Los ejes del sistema coordinado en el cual el tensor de inercia es diagonal, se llaman *ejes principales de inercia*.

Energía cinética de un cuerpo rígido. La energía cinética rotacional de un cuerpo rígido, formado por n partículas y fijo en un punto, está dada por:





-

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} v_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot \vec{v}_{\alpha},$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}),$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_{\alpha} \times \vec{v}_{\alpha}) \text{ (se aplicó la segunda ecuación del **Ejercicio 1.22**)},$$

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_{\alpha=1}^n \vec{r}_{\alpha} \times m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha},$$

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_{\alpha=1}^n \vec{r}_{\alpha} \times \vec{p}_{\alpha},$$

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L},$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \omega_i L_i;$$

De acuerdo con la **Ecuación (2.118)**, $L_i = \sum_{j=1}^3 \mathbb{I}_{ij} \omega_j$. Al sustituirlo en la ecuación anterior se obtiene:

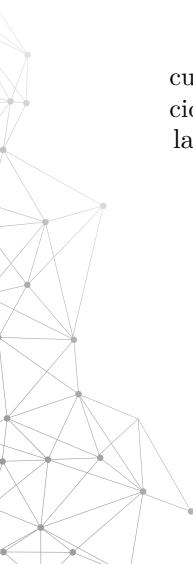
$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \mathbb{I}_{ij} \omega_i \omega_j. \quad (2.122)$$

En notación compacta, la expresión anterior se puede escribir como:

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbb{I} \cdot \vec{\omega}.$$

Pregunta. A partir de la **Ecuación (2.122)**, ¿cuáles son las unidades del tensor de inercia?

De acuerdo con la **Ecuación (2.122)**, la energía cinética (rotacional) del cuerpo rígido que está fijo en un punto es una función cuadrática de las velocidades angulares y el tensor de inercia es el factor de proporcionalidad entre la energía cinética y la velocidad angular.



Cuando todos los productos de inercia son nulos, es decir, cuando el tensor de inercia se representa por medio de una matriz cuadrada, la **Ecuación (2.122)** se transforma en:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mathbb{I}_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} \sum_i \mathbb{I}_i \omega_i^2 = \frac{1}{2} (\mathbb{I}_1 \omega_1^2 + \mathbb{I}_2 \omega_2^2 + \mathbb{I}_3 \omega_3^2).$$

Esta expresión indica que al considerar los ejes principales de inercia, la energía cinética se representa por un elipsoide. Si $\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_2 = \mathbb{I}_3$, la energía cinética corresponde a la superficie de una esfera; y si $\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_2 \neq \mathbb{I}_3$, está dada por un esferoide.

Finalmente, reemplazando a la velocidad angular por $\dot{\theta}$, la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \mathbb{I}_{ij} \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j.$$

Si $\dot{\theta}_i$ y $\dot{\theta}_j$ son independientes, se obtiene:

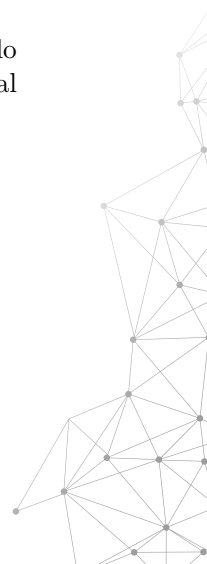
$$\sum_l \dot{\theta}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_l} = 2T,$$

donde se usó la **Ecuación (1.50)**.

Ejercicios

2.29 Obtener el momento angular y la energía cinética para la molécula de agua (ver **Ejemplo 1.7**) en el caso que gire en torno al eje Z con velocidad angular constante.

2.30 Obtener el momento angular y la energía cinética para el triángulo mostrado en la **Figura 1.6** (ver **Ejemplo 1.8**) en el caso que gire en torno al eje Z con velocidad angular constante.



2.31 Obtener el tensor de inercia, el momento angular y la energía cinética para el cuerpo rígido mostrado en la **Figura 2.21**, con respecto al centro de masa. Hallar un sistema de ejes principales.

2.32 Considere un cuerpo rígido formado por tres masas $m_1 = m$, $m_2 = 2m$ y $m_3 = 3m$ ubicadas en los puntos $(b, 0, b)$, $(0, b, 2b)$ y $(0, 2b, b)$, respectivamente (ver **Ejercicio 2.21**). Hallar el tensor de inercia, el momento angular y la energía cinética asumiendo que el cuerpo está fijo en su centro de masa. Hallar un sistema de ejes principales.

2.4. Actividades complementarias

A continuación se listan algunos artículos con el objetivo de complementar, profundizar o extender los temas tratados en el presente capítulo.

1. Los sistemas con *masa variable* son poco tratados en la mayoría de libros de texto de mecánica clásica. Sin embargo, es un tema que tiene aplicaciones prácticas y sobre el cual se puede investigar. Algunos autores plantean que la **Ecuación (2.10)** viola el principio de relatividad bajo transformaciones galileanas. Los siguientes artículos son una motivación para profundizar en este tema:

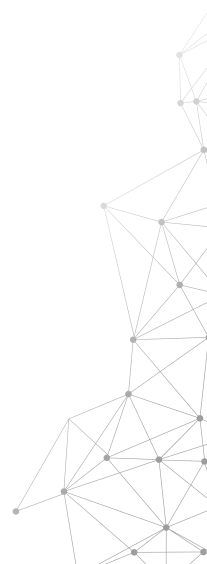
- Thomaz MT, Correa EV. Center of mass of a system of variable mass particles. *Rev Bras Ens Fis.* 2019; 41(3).
- Thomaz MT. Newton's Second Law of a particle with variable mass. *Rev Bras Ens Fis.* 2021; 43.
- Plastino AR, Muzzio JC. On the use and abuse of Newton's second law for variable mass problems. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy.* 1992; 53.
- Koczan GM. Defining of three-dimensional acceleration and inertial mass leading to the simple form $F=MA$ of relativistic motion equation. [Physics.hist-ph]. [Fecha desconocida].



- Pesce CP, Casseta L. Variable mass systems dynamics in engineering mechanics education *Proceedings of COBEM, 19th Int. Int Con Mech Eng.* 2007.
- Wolny J, Strzalka R. Momentum in the dynamics of variable-mass systems: classical and relativistic case. *Acta Physica Polonica A.* 2019; 135(3): 475–9.
- Awrejcewicz J. Dynamics of Systems of Variable Mass. *Classical Mechanics*, chapter. 2012; 341–57.
- Eke FO, Mao TC. On the dynamics of variable mass systems. *International Journal of Mechanical Engineering Education.* 2002; 30(2).

2. El movimiento parabólico de un proyectil sin considerar la fricción que ejerce el medio en el cual la partícula se mueve, es un caso ideal. Una manera de incluir la fricción es considerar fuerzas que dependan de la velocidad ($\sim v^n$). Este tema da la oportunidad de explorar este movimiento tomando diferentes valores para n , usando herramientas computacionales. En los siguientes artículos se trabaja movimiento parabólico asumiendo fuerzas de fricción que varían lineal o cuadráticamente con la velocidad:

- Stewart SM. An analytic approach to projectile motion in a linear resisting medium. *Int J Math Educ Sci Technol.* 2006; 37(4).
- Hernandez-Saldana H. On the locus formed by the maximum heights of projectile motion with air resistance *Eur. J Phys.* 2010; 31.
- Morales DA. A generalization on projectile motion with linear resistance *Can. J Phys.* 2011; 89.
- Ivchenko V. On projectile motion with the quadratic drag force. *Eur J Phys.* 2018; 39.
- Belgacem CH. Range and flight time of quadratic resisted projectile motion using the Lambert W function. *Eur J Phys.* 2014; 35.
- Benacka J. Solution to projectile motion with quadratic drag and graphing the trajectory in spreadsheets. *Int J Math Educ Sci Tech.* 2010; 41(3).
- Karkantzakos PA. Time of flight and range of the motion of a projectile in a constant gravitational field under the influence of a retarding force proportional to the velocity. *J Eng Sci Tech Rev.* 2009; 2(1).
- De Alwis T. Projectile motion with Mathematica *Int. J Math Educ Sci Technol.* 2000; 31.
- Morales CA, Muñoz JH, Vera CE. Some remarks on projectile motion with a linear resistance force, working paper. 2019.
- Ribeiro WJM, Souza JR. Projectile Motion: The “Coming and Going” Phenomenon. *Phys Teach.* 2021; 59.





- Sarafian H. What projective angle makes the arc-length of the trajectory in a resistive media maximum? A reverse engineering approach. *American Journal of Computational Mathematics*. 2021; 11: 71–82.
3. Un caso especial del **Ejemplo 2.7**, asumiendo que la fuerza de fricción y la fuerza externa $\vec{F}$ son cero, se presenta en el artículo:

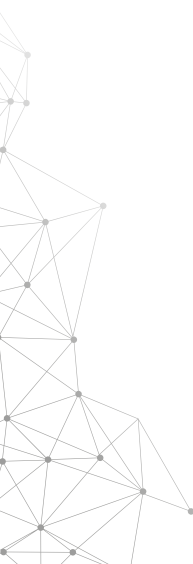
- Bollina O, Parreira JR. A problem of relative, constrained motion. *Phys Teach*. 1998; 36.

En este trabajo se desarrolló un nuevo método para determinar la aceleración relativa de un bloque que desliza sobre un plano inclinado que se mueve horizontalmente.

4. Con el propósito de estudiar la conexión entre teoría de grupos (ver la **Actividad complementaria 4** en el **Capítulo 1**) y las transformaciones entre sistemas de referencia, se recomienda estudiar el artículo:

- Rocha AN, Rizzuti BF, Mota DS. Galileo and Lorentz Transformations: A study via group theory. *Rev Bras Ens Fis*. 2013; 35(4).

5. En el **Ejemplo 2.1**, la tensión en la cuerda a la que están unidos los dos cuerpos es constante. Sin embargo, en algunos casos, como el presentado en el **Ejercicio 2.15**, la tensión es variable. Este montaje sencillo (ver **Figura 2.15**) ofrece la posibilidad de explorar el uso de herramientas computacionales con el experimento en mecánica clásica. Recientemente, en los siguientes artículos se ha profundizado en este sistema físico:





- Benítez D, Herrera HJ, Muñoz JH. Symmetry in the system of two blocks connected by a string with variable tension. *Rev Cubana Fis.* 2019; 36(2): 139–43.
- Herrera-Suárez H, Muñoz J. Two blocks connected by a string with variable tension: a dynamic case. *Physics Education.* 2020; (5).
- Mungan CE. Comment on “Two blocks connected by a string with variable tension: a dynamic case”. *Phys Educ.* 2021; 56(2).
- Franco A, El mejor ángulo para arrastrar un bloque. *Curso Interactivo de Física en Internet* [internet]; [citado el 29 de septiembre de 2022]. Disponible en: <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/dinamica/arrastra/arrastra.html>

