

3

Oscilaciones

En este capítulo se hace una introducción a las oscilaciones lineales a través de desarrollos matemáticos detallados. Se consideran oscilaciones libres, amortiguadas, forzadas y acopladas.

3.1. Oscilaciones libres o armónicas

En esta sección se describen tres sistemas físicos que presentan la misma ecuación de movimiento y su respectiva solución.

3.1.1. Masa atada a un resorte

Consideremos una masa m atada a un resorte de constante elástica k , sometida a una fuerza recuperadora $\vec{F} = -k\vec{x}$, donde $\vec{x}$ es la deformación unidimensional del resorte (ver **Figura 2.5**). A este tipo de fuerza *central*, de carácter *lineal*, se le conoce como *ley de Hooke*. El signo menos indica que es una fuerza restauradora.

En lo que sigue se adopta como notación $\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$ y $\ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}$, es decir, un punto sobre la variable representa su derivada temporal y dos puntos sobre la variable simbolizan la segunda derivada respecto al tiempo.



La *ecuación de movimiento* para el sistema masa-resorte se obtiene a partir de la segunda ley de Newton, $\vec{F}_{\text{total}} = m\vec{a}$, donde $\vec{F}_{\text{total}}$ es la fuerza total que actúa sobre la partícula en la dirección del movimiento ($\vec{F}_{\text{total}} = -k\vec{x}$, en este caso), y $\vec{a}$ es su aceleración. Usando la notación mencionada anteriormente se obtiene:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx, \\ m\ddot{x} + kx &= 0, \\ \ddot{x} + \frac{k}{m}x &= 0. \end{aligned}$$

Así, la ecuación de movimiento se escribe como:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3.1)$$

donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, se llama *frecuencia propia* del sistema. La solución para la **Ecuación (3.1)** se presenta al final de esta sección.

Pregunta. ¿Cuál es la unidad de medida de la frecuencia propia ω_0 ?

Respuesta. En primer lugar se obtienen las unidades de la constante elástica k . Como $k = \frac{|F|}{x}$, se obtiene: $[k] = \frac{\text{N}}{\text{m}} = \left(\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}\right) \left(\frac{1}{\text{m}}\right) = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$, donde N, kg, m y s denotan Newtons, kilogramos, metros y segundos, respectivamente. Por lo tanto, las unidades de ω_0 son $[\omega_0] = \left(\frac{[k]}{[m]}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\text{s}}$. Es decir, las unidades de ω_0 son el inverso del tiempo.

Otro camino para obtener las unidades de ω_0 es a partir de la **Ecuación (3.1)**: $[\omega_0] = \left(\frac{[\ddot{x}]}{[x]}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{\text{m}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\text{s}}$.

3.1.2. Péndulo simple

Un péndulo plano está conformado por una masa m atada a una cuerda inextensible de longitud l , que oscila respecto a la vertical (ver **Figura 3.1**). Las fuerzas que actúan sobre la partícula son el peso (denotado por $\vec{w}$ y cuya magnitud es mg , donde g es la magnitud de la aceleración de la gravedad en



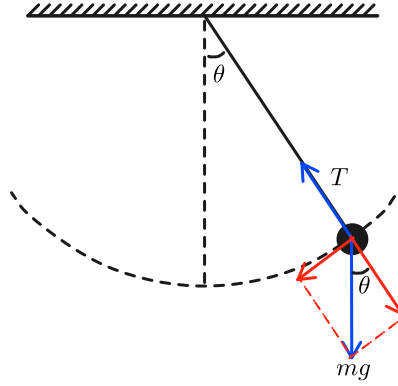


Figura 3.1: Péndulo simple.

la tierra) y la tensión ($\vec{T}$) de la cuerda.

Respecto a un sistema de coordenadas polares (caso particular de un sistema de coordenadas cilíndricas con $z = 0$ y $\phi = \theta$, ver **Sección 1.8.1**), se observa, en la **Figura 3.6**, que el vector peso se puede descomponer en dos componentes: una a lo largo de la dirección radial $\hat{\rho}$, cuya magnitud es igual a $mg \cos \theta$, y la otra en la dirección contraria al vector $\hat{\theta}$. Las ecuaciones de movimiento, en coordenadas polares, a partir de la segunda ley de Newton se escriben como:

$$T - mg \cos \theta = ma_{\rho} = \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2, \quad (3.2)$$

y

$$-mg \sin \theta = ma_{\theta} = \rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}, \quad (3.3)$$

donde hemos utilizado las aceleraciones obtenidas en (1.28). Ya que hemos considerado una cuerda inextensible ($\rho = l = \text{cte}$), las **Ecuaciones (3.2) y (3.3)** se transforman en

$$T - mg \cos \theta = -l\dot{\theta}^2, \quad (3.4)$$

y

$$-mg \sin \theta = l\ddot{\theta}. \quad (3.5)$$

Asumiendo que las oscilaciones son pequeñas, en la última ecuación se puede utilizar la aproximación $\sin \theta \approx \theta$ para obtener la ecuación de movimiento del denominado *péndulo simple*:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad (3.6)$$

donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, se conoce como la *frecuencia propia* del sistema. Es importante resaltar que esta frecuencia es independiente del valor de la masa suspendida.

Pregunta. ¿Cuál es la unidad de medida de la frecuencia propia del péndulo simple?

Respuesta. A partir de la expresión $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ se obtiene $[\omega_0] = \sqrt{\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \frac{1}{\text{m}}} = \frac{1}{\text{s}}$. Es decir, la frecuencia propia tiene unidades del inverso del tiempo (si el tiempo está en segundos, la unidad se denomina Hertz y se abrevia como Hz).

3.1.3. Péndulo físico

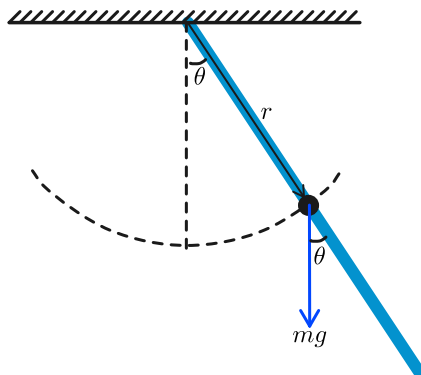


Figura 3.2: Péndulo físico.

Un péndulo físico (o péndulo compuesto) es un cuerpo rígido que oscila libremente alrededor de un eje fijo que está a una distancia r del centro de

masa (ver **Figura 3.2**). Este eje fijo corresponde al eje principal de inercia del péndulo físico, por lo que su momento angular esta dado por

$$\vec{L} = I\dot{\theta}\hat{k}.$$

Usando la **Ecuación (2.108)** y teniendo en cuenta que la única fuerza que produce torque (o momento de fuerza) es el peso del cuerpo tenemos

$$\frac{d}{dt} (I\dot{\theta}\hat{k}) = \vec{r} \times (-mg\hat{j}),$$

por lo que

$$I\ddot{\theta} = -mgr \sin \theta.$$

Considerando solo oscilaciones pequeñas (sen $\theta \approx \theta$.) la *ecuación de movimiento* es

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad (3.7)$$

donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgr}{I}}$ es la *frecuencia propia* del péndulo físico. Nuevamente se obtiene una ecuación diferencial de *segundo orden, lineal, homogénea con coeficientes constantes*.

Ejercicios

3.1 Considerando que las unidades del momento de inercia son $[I] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$, verificar que las unidades de la frecuencia propia del péndulo físico son s^{-1} .

3.2 Asumiendo $I = mr^2$, ¿cuál es la frecuencia propia del péndulo físico? Compare esta frecuencia con la del péndulo simple, ¿qué concluye?

3.1.4. Solución de la ecuación diferencial $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

De las Relaciones (3.1), (3.6) y (3.7) se concluye que las ecuaciones de movimiento para los sistemas masa-resorte, péndulo simple y péndulo físico



tienen la misma forma: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Esta última expresión es una *ecuación diferencial de segundo orden, lineal, homogénea y con coeficientes constantes*. Los objetos descritos por esta ecuación experimentan lo que se conoce como un *movimiento armónico simple*. Es importante estudiar esta ecuación diferencial porque una gran variedad de sistemas en diferentes áreas de la física se describen, con buena aproximación, por medio de ella.

Una ecuación diferencial de segundo orden, lineal y homogénea, tiene dos soluciones *linealmente independientes*. Por lo tanto, si x_1 y x_2 son soluciones, la combinación lineal de ellas, $ax_1 + bx_2$ también es solución.

Se propone $x = e^{\lambda t}$ como solución a la ecuación diferencial $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. La primera y segunda derivada de x respecto al tiempo están dadas por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda e^{\lambda t}, \\ \ddot{x} &= \lambda^2 e^{\lambda t}.\end{aligned}$$

Al sustituir estas dos expresiones en la ecuación diferencial se obtiene:

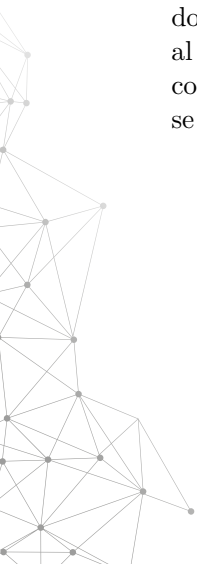
$$\begin{aligned}\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} &= 0, \\ (\lambda^2 + \omega_0^2) e^{\lambda t} &= 0, \\ (\lambda^2 + \omega_0^2) &= 0, \\ \lambda &= \pm i\omega_0.\end{aligned}$$

Así, se tienen dos soluciones: $x_1 = e^{+i\omega_0 t}$ y $x_2 = e^{-i\omega_0 t}$. La solución general será una combinación lineal de ellas:

$$x(t) = C_1 e^{+i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}, \quad (3.8)$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración. La ecuación anterior pertenece al campo de los números complejos. Utilizando la ecuación de Euler $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ y construyendo las siguientes combinaciones lineales de x_1 y x_2 se obtienen soluciones reales:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \frac{1}{2} (e^{+i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) = \cos \omega_0 t, \\ \bar{x}_2 &= \frac{1}{2i} (e^{+i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) = \sin \omega_0 t.\end{aligned}$$



Con la combinación lineal de estas expresiones se construye una solución general que pertenece al campo de los números reales:

$$\begin{aligned}x &= b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2, \\x &= b_1 \cos \omega_0 t + b_2 \sin \omega_0 t.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Si las constantes de integración $\{b_1, b_2\}$ se transforman en las constantes $\{A, \phi\}$ mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned}b_1 &= A \cos \phi, \\b_2 &= A \sin \phi,\end{aligned}$$

se puede representar la relación entre ellas mediante el triángulo rectángulo de la **Figura 3.3**.

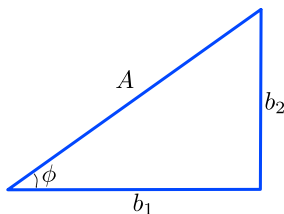


Figura 3.3: Relación entre las constantes de integración.

De esta manera, la solución a la ecuación diferencial será

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t - \phi).\tag{3.10}$$

Ya que la ecuación es de segundo orden, su solución tiene dos constantes: A y ϕ que son la *amplitud* y la *fase inicial*, respectivamente. La velocidad v y la aceleración a en función del tiempo, están dadas por

$$\begin{aligned}v(t) = \frac{dx}{dt} &= -\omega_0 A \sin(\omega_0 t - \phi), \\a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t - \phi).\end{aligned}\tag{3.11}$$



Pregunta. ¿Cuál es el *período* del movimiento?

Respuesta. Sea T el período del movimiento. Por lo tanto, se debe cumplir que $x(t) = x(t + T)$. Esto implica

$$\begin{aligned} A \cos(\omega_0 t - \phi) &= A \cos[\omega_0(t + T) - \phi], \\ \cos(\omega_0 t - \phi) &= \cos[(\omega_0 t - \phi) + \omega_0 T]. \end{aligned}$$

Así, se debe cumplir que $\omega_0 T = 2\pi$, por lo que el *período* estará dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (3.12)$$

Sustituyendo la expresión para ω_0 obtenida para cada uno de los sistemas físicos tratados en las subsecciones anteriores, se obtiene el período de estos sistemas (ver **Tabla 3.1**).

Pregunta. ¿Qué información contiene la *fase inicial* ϕ ?

Respuesta. La fase inicial ϕ contiene información acerca de la posición de la partícula en $t = 0$. Supóngase que en $t = 0$, $x = x_0$. Así, de la **Ecuación (3.10)** se obtiene

$$x(t = 0) = x_0 = A \cos \phi.$$

En la **Tabla 3.2** se presentan valores de la fase inicial ϕ , para algunos valores de x_0 . Por otra parte, en la **Figura 3.4** se presentan la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo, tomando como condiciones iniciales $x(0) = 3$ cm y $\dot{x}(0) = 0$, y haciendo $\phi = 0$, $A = 3$ cm y $\omega_0 = 2$ s⁻¹. En este caso, el período es $T = \pi$.

Ejemplo 3.1

Demuestre que la *energía mecánica total* del sistema masa-resorte es constante y está dada por $E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2$. Adicionalmente, grafique las energías cinética, potencial y mecánica total en función del tiempo.





Tabla 3.1: Período para algunos sistemas físicos que presentan movimiento armónico simple.

Sistema físico	Período ($T = \frac{2\pi}{\omega_0}$)	Análisis
Masa atada a un resorte	$\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	El período del sistema masa-resorte varia inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la constante elástica del resorte y directamente proporcional a la raíz cuadrada de la masa.
Péndulo simple	$\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$	El período del péndulo simple es <i>independiente</i> de la masa m suspendida de la cuerda. Solo depende de la longitud de la cuerda de la forma $T \propto l^{\frac{1}{2}}$
Péndulo físico	$\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{mgr}{I}}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr}}$	A partir de esta expresión se puede obtener el momento de inercia del cuerpo que está oscilando, calculando inicialmente el período. De igual manera, se puede hallar la longitud del péndulo simple equivalente igualando los períodos para los péndulos simple y físico.

Solución.

La energía total es la suma de la energía cinética ($T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$) más la energía potencial ($U = \frac{1}{2}kx^2$), donde:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m[-\omega_0 A \text{sen}(\omega_0 t - \phi)]^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \text{sen}^2(\omega_0 t - \phi),$$
$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t - \phi) = \frac{1}{2}(m\omega_0^2)A^2 \cos^2(\omega_0 t - \phi).$$

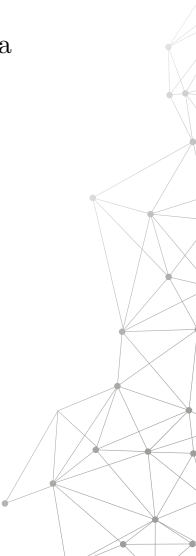




Tabla 3.2: Fase inicial ϕ para algunos valores de $x(t=0) = x_0$.

x_0	ϕ
$-A$	π
$-A/2$	$2\pi/3$
0	$\pi/2$
$A/2$	$\pi/3$
A	$0; 2\pi$

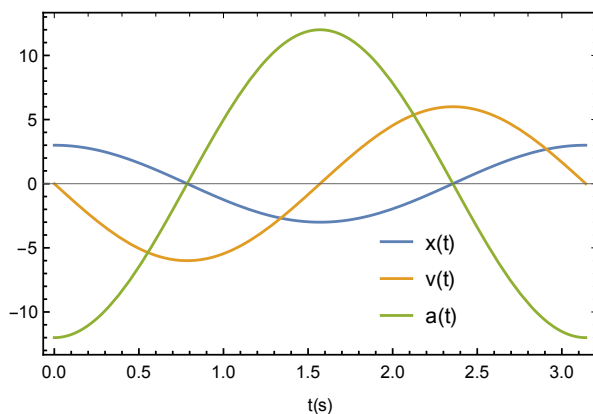
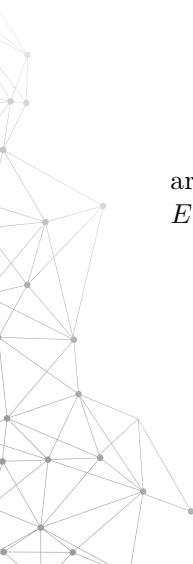


Figura 3.4: Posición (color azul), velocidad (color naranja) y aceleración (color verde) en función del tiempo para el oscilador armónico simple.

Por lo tanto,

$$E = T = U = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 [\sin^2(\omega_0 t - \phi) + \cos^2(\omega_0 t - \phi)] = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2. \quad (3.13)$$

Este resultado demuestra que la energía mecánica total para un oscilador armónico simple es *constante* y proporcional al cuadrado de la amplitud: $E \propto A^2$.



La **Figura 3.5** muestra la evolución de las energías cinética, potencial y total en función del tiempo. En esta gráfica se aprecia que la energía total es constante y que en el instante en el cual la energía cinética es máxima, la energía potencial es cero, y viceversa.

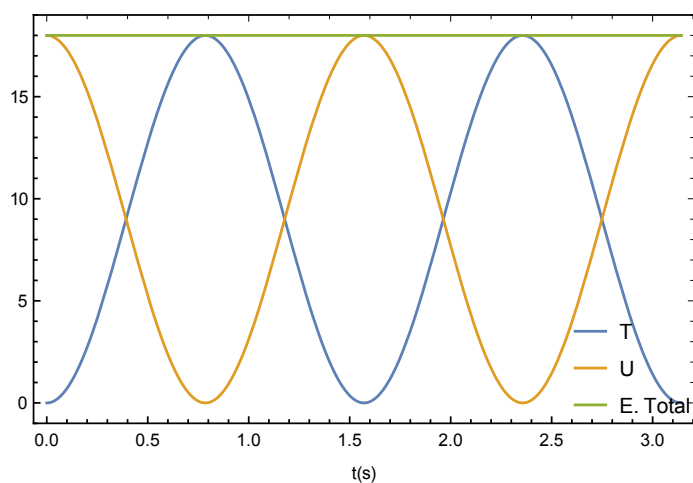


Figura 3.5: Energías cinética (color azul), potencial (color naranja) y total (color verde) para el oscilador libre en función del tiempo.

A continuación se presenta el código utilizado para obtener las gráficas del **Ejemplo 3.1.**

Código en *Mathematica* para el Ejemplo 3.1

Definiciones:

```
In[1]:= A = 3;
      k = 4;

In[2]:= W0= k/m; (*frecuencia propia al cuadrado*)
```

Solución de la ecuación diferencial:

```
In[3]:= x[t_]:= A Cos[√W0 t]
```

Código Figura 3.4:

```
In[4]:= Plot[{x[t], x'[t], x''[t]}, {t, 0, π}, Frame→True,
      FrameStyle→Black, FrameLabel → {"t(s)", ""},
      PlotLegends→ Placed[{"x(t)", "v(t)", "a(t)"}, Center]]
```

Definiciones:

```
In[5]:= T = (0.5)*m*(x'[t])^2;

In[6]:= U = (0.5)*k*(x[t])^2;

In[7]:= EM = T + U;
```

Código Figura 3.5:

```
In[8]:= Plot[{T, U, EM}, {t, 0, π}, Frame→True,
      FrameStyle→Black, FrameLabel → {"t(s)", ""},
      PlotLegends→ Placed [{"T", "U", "E. Total"}, Center]]
```

Ejercicio

3.3 El valor promedio de una función $f = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ está definido por

$$\langle f \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Considere el sistema masa-resorte (oscilador armónico simple) y demuestre que los promedios *temporales* de la energía cinética (T) y la energía potencial (U) en una oscilación son iguales:

$$\langle T \rangle = \langle U \rangle = \frac{1}{4} m \omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2} E.$$



En este caso el intervalo de integración está dado por $[0, T = \frac{2\pi}{\omega_0}]$ (esta T significa período).

Calcular también el promedio *espacial* de la energía cinética y la energía potencial en un ciclo. ¿Son iguales estos promedios?

3.1.5. Trayectoria del oscilador armónico simple en el espacio de fase

El *espacio de fase* de un sistema es una construcción matemática que permite representar el conjunto de las posiciones y las velocidades de una partícula. Para obtener la trayectoria de la partícula en este espacio se debe expresar la posición en función de la velocidad, eliminando el parámetro tiempo. Utilizando la **Ecuación (3.10)**:

$$\begin{aligned} x^2 &= A^2 \cos^2(\omega_0 t - \phi) \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{A^2} = \cos^2(\omega_0 t - \phi), \\ \dot{x}^2 &= \omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t - \phi) \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2 A^2} = \sin^2(\omega_0 t - \phi). \end{aligned}$$

Sumando las dos ecuaciones anteriores se obtiene

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2 A^2} = \cos^2(\omega_0 t - \phi) + \sin^2(\omega_0 t - \phi) = 1,$$

por lo tanto,

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2 A^2} = 1, \tag{3.14}$$

de donde se concluye que la trayectoria en el espacio de fase ($\dot{x}$ vs x) del oscilador libre es una *elipse*. En la **Figura 3.6** se muestra esta trayectoria, obtenida con el comando *ParametricPlot* del paquete Mathematica a través de las siguientes instrucciones:



Código en *Mathematica* para la Figura 3.6

Definiciones:

```
In[4]:=      A = 3;
              k = 4;

In[5]:=      W0= k/m; (*frecuencia propia al cuadrado*)

In[6]:=      x[t_]:= A Cos[ $\sqrt{W0}$  t]
```

Código Figura 3.6:

```
In[7]:= ParametricPlot[{x[t]/A2, x'[t]/(A2*W0)}, {t, 0,  $\pi$ },
          Frame→True, FrameStyle→Black, FrameLabel→{"x(t)", "v(t)"}]
```

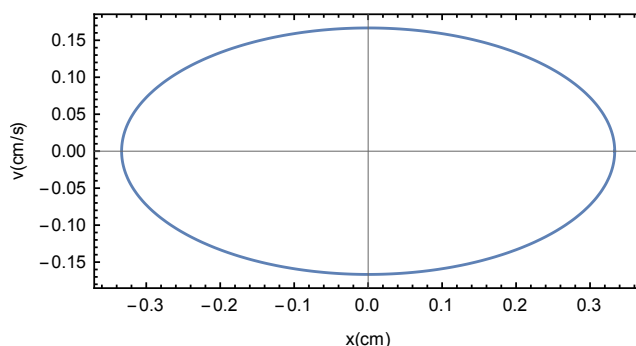


Figura 3.6: Trayectoria en el espacio de fase para el oscilador libre.

Ejercicios

3.4 Obtener la constante elástica de un resorte aplicando la ley de Hooke utilizando la aplicación *Masas y Resortes* o *Ley de Hooke* del simulador *PhET*; disponibles en <https://phet.colorado.edu/es/>. Suspenda de un resorte diferentes masas y mida el estiramiento del resorte para cada masa.

Luego grafique estos datos (puede ser en *Excel*, *GoeGebra* o *Mathematica*); esta función debe ser una línea recta cuya pendiente será igual al valor de la constante elástica del resorte.



3.5 Verificar que el período de un péndulo simple es independiente de la masa y que varía al modificar la longitud de la cuerda utilizando la aplicación *Lab de péndulo* en el *simulador PhET*.

3.6 Hacer un análisis del péndulo simple por medio del analizador de videos *Tracker* (disponible en <https://physlets.org/tracker/>).

3.7 Obtener el valor de la gravedad por medio de un péndulo simple. Hallar el período de un péndulo simple variando la longitud de la cuerda. Con estos datos hacer la gráfica T^2 Vs l y determinar la gravedad a partir de la pendiente de esta recta.

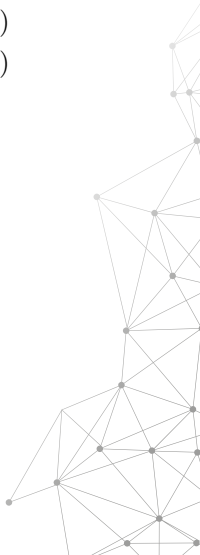


3.2. Osciladores libres en dos dimensiones

Consideremos una partícula atada a dos resortes que tienen la misma constante elástica y están ubicados perpendicularmente. La fuerza, de tipo *central*, que actúa sobre la partícula es $\vec{F} = -k\vec{r} = -k(x \hat{i} + y \hat{j})$. La evolución temporal de estos dos osciladores está dada por:

$$x = A \cos(\omega_0 t - \phi), \quad (3.15)$$

$$y = B \cos(\omega_0 t - \alpha). \quad (3.16)$$



A continuación se obtendrá la trayectoria de la partícula eliminando el tiempo de las expresiones anteriores:

$$\begin{aligned}
 y &= B \cos(\omega_0 t - \alpha + \phi - \phi), \\
 &= B \cos[(\omega_0 t - \phi) + (\phi - \alpha)], \\
 &= B \cos[(\omega_0 t - \phi) + \delta] \quad (\text{donde } \delta = \phi - \alpha \equiv \text{diferencia de fase}), \\
 &= B [\cos(\omega_0 t - \phi) \cos \delta - \sin(\omega_0 t - \phi) \sin \delta], \\
 &= B [\cos(\omega_0 t - \phi) \cos \delta - \sqrt{1 - \cos^2(\omega_0 t - \phi)} \sin \delta].
 \end{aligned}$$

Como $x = A \cos(\omega_0 t - \phi)$, entonces $\frac{x}{A} = \cos(\omega_0 t - \phi)$. Sustituyendo esta expresión en la anterior se obtiene:

$$\begin{aligned}
 y &= B \left[\frac{x}{A} \cos \delta - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin \delta \right], \\
 Ay &= Bx \cos \delta - B \sqrt{A^2 - x^2} \sin \delta, \\
 Ay - Bx \cos \delta &= -B \sqrt{A^2 - x^2} \sin \delta, \\
 A^2 y^2 + B^2 x^2 \cos^2 \delta - 2ABxy \cos \delta &= B^2 (A^2 - x^2) \sin^2 \delta, \\
 A^2 y^2 + B^2 x^2 (\cos^2 \delta + \sin^2 \delta) - 2ABxy \cos \delta &= B^2 A^2 \sin^2 \delta.
 \end{aligned}$$

Así, la trayectoria de la partícula está determinada por la ecuación

$$B^2 x^2 - 2ABxy \cos \delta + A^2 y^2 = B^2 A^2 \sin^2 \delta. \quad (3.17)$$

En general, la ecuación anterior corresponde a una ecuación cuadrática o, mas estrictamente, una *forma cuadrática*. A continuación se considerarán algunos casos especiales:

- $\delta = 0^\circ$ (o 360°): $B^2 x^2 - 2ABxy + A^2 y^2 = 0 \rightarrow (Bx - Ay)^2 = 0 \rightarrow y = \frac{B}{A}x$. Es decir, la partícula recorre una trayectoria lineal con pendiente positiva.
- $\delta = 180^\circ$: $B^2 x^2 + 2ABxy + A^2 y^2 = 0 \rightarrow (Bx + Ay)^2 = 0 \rightarrow y = -\frac{B}{A}x$. En este caso la partícula se mueve sobre una recta de pendiente negativa.
- $\delta = 90^\circ$: $B^2 x^2 + A^2 y^2 = B^2 A^2 \rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$. La partícula recorre una elipse en el sentido de las manecillas del reloj. Si $A = B$, la trayectoria es circular. Para $\delta = 270^\circ$ la partícula describe la misma figura recorriéndola en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

- $\delta = 150^\circ$: $B^2x^2 + 2ABxy\frac{\sqrt{3}}{2} + A^2y^2 = B^2A^2(\frac{1}{2})^2 \rightarrow 4B^2x^2 + 4\sqrt{3}ABxy + 4A^2y^2 = B^2A^2$. La trayectoria corresponde a la de una elipse que no tiene sus semiejes paralelos a los ejes $x - y$ recorrida en el sentido de las manecillas del reloj. Sus nuevos ejes normales $x' - y'$ están rotados un ángulo θ , con respecto a los ejes $x - y$.
- $\delta = 300^\circ$: $B^2x^2 - 2ABxy(\frac{1}{2}) + A^2y^2 = B^2A^2(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 \rightarrow 4B^2x^2 - 4ABxy + 4A^2y^2 = 3B^2A^2$. En este caso la partícula recorre, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, una elipse que está rotada un ángulo θ con respecto a los ejes $x - y$.

La **Ecuación (3.17)** se puede graficar con el programa *Mathematica* a través de la siguiente rutina: **(1)** Se despeja a y en función de x por medio del comando *Solve*; **(2)** Se obtienen dos expresiones para y en función de x ; **(3)** Por medio del comando *Plot* se grafican estas dos expresiones para $y = y(x)$ y, seguidamente, se utiliza el comando *Manipulate*. De esta manera, podemos ver la trayectoria para cualquier valor de δ . A continuación se muestra esta rutina y la trayectoria para dos osciladores libres perpendiculares con una diferencia de fase $\delta = 5,81823$ radianes ($\approx 333,36^\circ$) y amplitudes $A = 5$ cm, $B = 2$ cm (ver **Figura 3.7**).

Código en *Mathematica* para la Figura 3.7

```
In[1]:= Solve[B^2 x^2 - 2 A B x y Cos[δ]+A^2 y^2 ==
B^2 A^2 (Sin[δ])^2,y]

Out[1]= {{y -> (A B x Cos[δ]+√(A^4 B^2 Sin[δ]^2-A^2 B^2 x^2 Sin[δ]^2))/
A^2},
{y -> (A B x Cos[δ]-√(A^4 B^2 Sin[δ]^2-A^2 B^2 x^2 Sin[δ]^2))/
A^2}}

In[2]:= Manipulate[Plot[{(A B x Cos[δ]+√(A^4 B^2 Sin[δ]^2-A^2 B^2 x^2 Sin[δ]^2))/
A^2,
A B x Cos[δ]-√(A^4 B^2 Sin[δ]^2-A^2 B^2 x^2 Sin[δ]^2)/
A^2}, {x,-5,5},
Frame->True, FrameStyle->Black, FrameLabel -> {"x(cm)",
"y(cm)"}, {δ,0, 2Pi},{A,-5,5},{B,-4,4}]
```

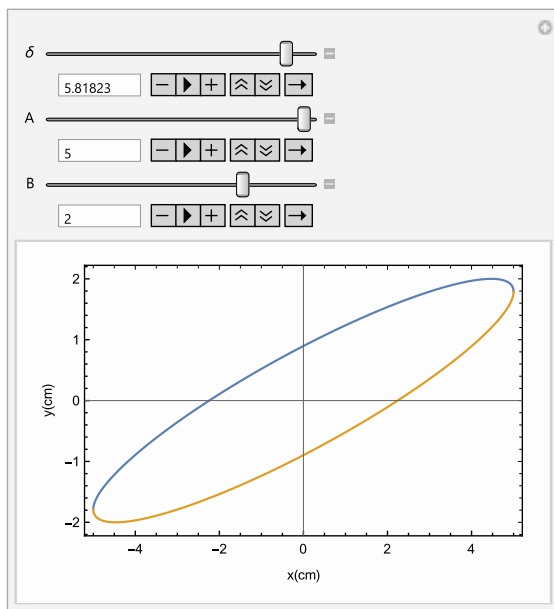


Figura 3.7: Trayectoria de dos osciladores armónicos perpendiculares con una diferencia de fase $\delta \approx 333,36^\circ$.

Nota. Cuando las frecuencias propias de los dos movimientos son diferentes, $(\omega_0)_x \neq (\omega_0)_y$, las trayectorias se denominan *Curvas de Lissajous*.

La **Ecuación (3.17)** se puede escribir en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^2 & -AB \cos \delta \\ -AB \cos \delta & A^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B^2 A^2 \sin^2 \delta.$$

Definiendo el vector columna $\vec{r}$ y la matriz $Q_{2 \times 2}$ por

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} B^2 & -AB \cos \delta \\ -AB \cos \delta & A^2 \end{pmatrix},$$

se obtiene

$$\vec{r}^T Q \vec{r} = B^2 A^2 \sin^2 \delta. \quad (3.18)$$

Considerando la matriz de rotación O , tal que $OO^T = O^TO = I$, el lado izquierdo de la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\vec{r}^T Q \vec{r} &= \vec{r}^T (O^T O) Q (O^T O) \vec{r}, \\ &= (\vec{r}^T O^T) (O Q O^T) (O \vec{r}), \\ &= (O \vec{r})^T (O Q O^T) (O \vec{r}), \\ &= (\vec{r}')^T O_{\text{dg}} \vec{r}'\end{aligned}$$

donde O_{dg} es una matriz diagonal dada por la transformación de similaridad ortogonal $O_{\text{dg}} = O Q O^T$ y $\vec{r}' = O \vec{r}$ es el vector rotado de componentes x' y y' ,

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

De esta manera

$$\vec{r}^T Q \vec{r} = (\vec{r}')^T O_{\text{dg}} \vec{r}' = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2.$$

Se aprecia que ya no aparece un término de acople $x'y'$. Por lo tanto, la **Ecuación (3.17)** en el sistema rotado un ángulo θ es

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 = B^2 A^2 \sin^2 \delta. \quad (3.19)$$

Ejercicio

3.8 Encontrar los autovalores y los autovectores de la matriz Q (Sugerencia: utilizar el paquete *Mathematica*). ¿Es posible encontrar una relación entre el ángulo de rotación θ y la diferencia de fase δ ?

3.3. Oscilaciones amortiguadas

Un caso más real de las oscilaciones se da cuando se incluye una fuerza de amortiguamiento adicional a la fuerza restauradora $-kx$. Una aproximación buena es asumir que esta fuerza es proporcional a la velocidad: $-b\dot{x}$. Las unidades de b son $\frac{\text{N}}{\text{s}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}}$, donde m , kg y s denotan metros, kilogramos y segundos, respectivamente. La *ecuación de movimiento* para el oscilador amortiguado está dada por

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

ó

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0,$$

donde m representa la masa de la partícula (el lector no debe confundirla con la m utilizada para simbolizar metros: en general, las variables se denotan con letras en cursiva « m » y las unidades en letras redondas « m »). De la última ecuación se obtiene:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2x = 0, \quad (3.20)$$

donde $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ es la frecuencia propia y $\beta = \frac{b}{2m}$ es el *parámetro de amortiguamiento* del sistema con unidades de s^{-1} . Esta ecuación diferencial es de segundo orden, lineal, homogénea con coeficientes constantes. El procedimiento para hallar la solución es similar al desarrollado anteriormente para obtener la solución de la ecuación $\ddot{x} + \omega_0^2x = 0$.

Se propone como solución $x = e^{\lambda t}$. Luego se deriva esta expresión una y dos veces respecto al tiempo: $\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$ y $\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$. Ahora se sustituyen estas expresiones en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \lambda^2 e^{\lambda t} + 2\beta\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} &= 0, \\ (\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2)e^{\lambda t} &= 0, \\ \lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 &= 0. \end{aligned}$$

Al resolver la ecuación cuadrática en λ se obtiene $\lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$. Así, se tienen dos soluciones:

$$x_{\pm} = e^{\lambda_{\pm} t} = e^{(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} = e^{-\beta t} e^{\pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t}.$$

La solución general a la ecuación diferencial está dada por la combinación lineal de $x_{\pm}$:

$$x = e^{-\beta t} (C_1 e^{+\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t}), \quad (3.21)$$

donde $C_{1,2}$ son constantes de integración. Para determinar el tipo de movimiento se requiere analizar la cantidad subradical, es decir, comparar la frecuencia propia del sistema correspondiente a la oscilación libre con el parámetro de amortiguamiento relacionado con la fuerza de amortiguamiento; se presentan tres casos:

- $\omega_0^2 > \beta^2$. A este movimiento se le llama *subamortiguado*.
- $\omega_0^2 = \beta^2$. En este caso el movimiento se llama *amortiguamiento crítico*.
- $\omega_0^2 < \beta^2$. Este movimiento se denomina *sobreamortiguado*.

3.3.1. Movimiento subamortiguado

En este caso $\omega_0^2 > \beta^2$, por lo que la cantidad subradical en la **Ecuación (3.21)** es negativa. Por lo tanto, se obtiene una cantidad *imaginaria*:

$$\begin{aligned} \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} &= \sqrt{-(\omega_0^2 - \beta^2)}, \\ &= i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \\ &= i\omega_1, \end{aligned}$$

donde $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$. De esta manera, la **Ecuación (3.21)** se puede reescribir de la siguiente forma:

$$x = e^{-\beta t} (C_1 e^{+i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t}).$$



La cantidad dentro del paréntesis en esta ecuación es idéntica a la del lado derecho de la **Ecuación (3.8)**. Por lo tanto, al hacer el mismo desarrollo matemático que condujo a la ecuación (3.10) se obtiene $C_1 e^{+i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t} = A \cos(\omega_1 t - \beta)$. Así, la ecuación anterior se transforma en

$$x = Ae^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \phi). \quad (3.22)$$

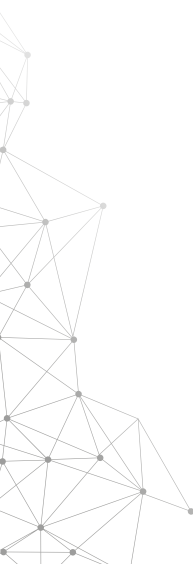
Esta ecuación describe el movimiento subamortiguado. Puede observarse que, aunque permanece el término oscilatorio, la amplitud del movimiento de la partícula disminuye en el tiempo, debido al término envolvente $Ae^{-\beta t}$.

La velocidad de la partícula está dada por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A[-\beta e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \phi) - \omega_1 e^{-\beta t} \sin(\omega_1 t - \phi)], \\ &= -Ae^{-\beta t}[\beta \cos(\omega_1 t - \phi) + \omega_1 \sin(\omega_1 t - \phi)]; \end{aligned} \quad (3.23)$$

y la aceleración se obtiene derivando respecto al tiempo a la velocidad.

En la **Figura 3.8** se muestran la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo para el oscilador subamortiguado, con las condiciones iniciales $x(0) = 0,1 \text{ m}$ y $\dot{x}(0) = -0,1 \text{ m/s}$, y los valores numéricos $\phi = 0$, $k = 4 \text{ kg/s}^2$, $m = 1 \text{ kg}$, $A = 0,1 \text{ m}$, $\beta = 1 \text{ s}^{-1}$ y $\omega_0^2 = 4 \text{ s}^{-2}$. Es importante tener en cuenta que se debe cumplir la condición $\omega_0^2 > \beta^2$. En la gráfica se observa que en este caso, la partícula alcanza a oscilar.



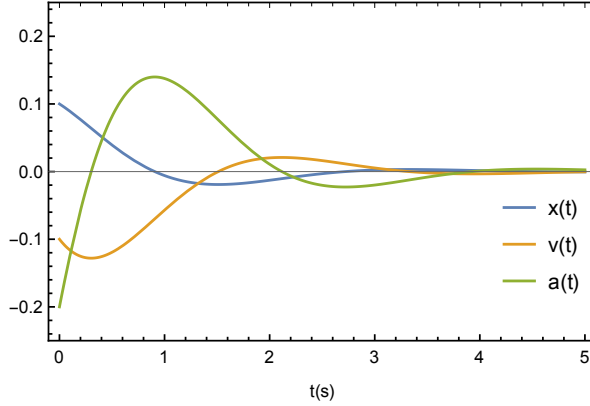


Figura 3.8: Posición (color azul), velocidad (color naranja) y aceleración (color verde) en función del tiempo para el oscilador subamortiguado.

Pregunta. ¿Es la energía total (E) del oscilador *subamortiguado* constante?

Respuesta. Recordemos que para el oscilador masa-resorte, la energía total es constante. En el caso de la oscilación subamortiguada se tiene $E = T + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$. Reemplazando a $x(t)$ y $\dot{x}(t)$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
 E(t) &= \frac{1}{2}mA^2e^{-2\beta t}[\beta \cos(\omega_1 t - \phi) + \omega_1 \sin(\omega_1 t - \phi)]^2 + \frac{1}{2}kA^2e^{-2\beta t} \cos^2(\omega_1 t - \phi), \\
 &= \frac{A^2}{2}e^{-2\beta t}[m\beta^2 \cos^2(\omega_1 t - \phi) + m\omega_1^2 \sin^2(\omega_1 t - \phi) + 2m\beta\omega_1 \cos(\omega_1 t - \phi) \times \\
 &\quad \sin(\omega_1 t - \phi) + k \cos^2(\omega_1 t - \phi)], \\
 &= \frac{A^2}{2}e^{-2\beta t}[(m\beta^2 + k) \cos^2(\omega_1 t - \phi) + m\omega_1^2 \sin^2(\omega_1 t - \phi) + \\
 &\quad 2m\beta\omega_1 \cos(\omega_1 t - \phi) \sin(\omega_1 t - \phi)].
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

De acuerdo a la expresión anterior se concluye que la energía total para el oscilador subamortiguado no es constante.

La **Figura 3.9** muestra las energías cinética, potencial y total en función del tiempo para el oscilador subamortiguado. Se observa que las energías

cinética y potencial presentan un mínimo y que a partir de cierto tiempo tienden a cero. Por otra parte, la **Figura 3.10** muestra la variación temporal de la energía total en función del tiempo, la cual presenta un mínimo y tiende a cero después de cierto tiempo. Los valores numéricos que se consideraron para obtener estas gráficas son los mismos utilizados en la **Figura 3.8**.

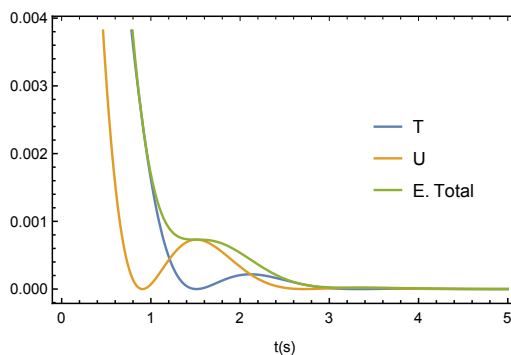


Figura 3.9: Energías cinética (color azul), potencial (color naranja) y total (color verde) en función del tiempo para el oscilador subamortiguado.

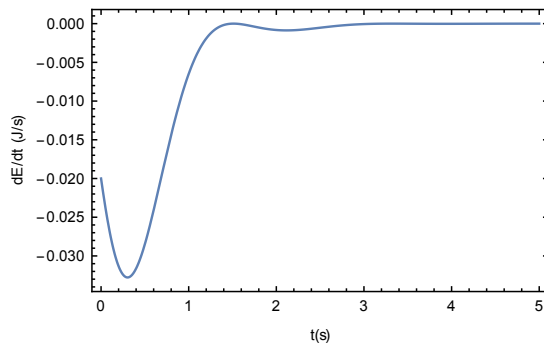


Figura 3.10: Variación temporal de la energía total en función del tiempo para el oscilador subamortiguado.

Finalmente, la **Figura 3.11** muestra la trayectoria en el espacio de fase de la partícula en movimiento subamortiguado, la cual corresponde a una espiral.

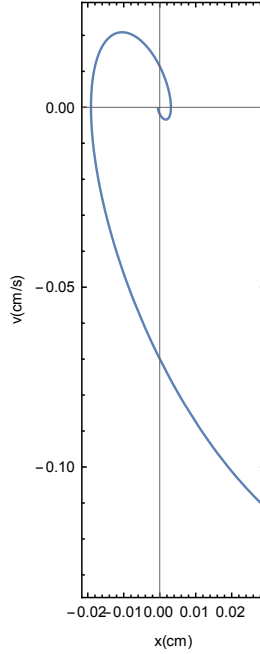


Figura 3.11: Trayectoria en el espacio de fase para el oscilador subamortiguado.

Nota. Las **Figuras 3.8, 3.9, 3.10 y 3.11** se crearon con *Mathematica* siguiendo la rutina presentada en la **Página 134** con $x[t_+] := Ae^{-\beta t} \cos \omega_1 t$, donde $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

3.3.2. Movimiento con amortiguamiento crítico

El movimiento con amortiguamiento crítico se da cuando $\omega_0^2 = \beta^2$. En este caso las dos raíces de la cuadrática en λ son iguales: $\lambda_1 = \lambda_2 = -\beta$.

La **Ecuación (3.21)** se transforma en $x = Ae^{-\beta t}(C_1 + C_2) = Ce^{-\beta t}$, donde $C = A(C_1 + C_2)$ es otra constante. Se puede verificar por sustitución directa que $x = Ce^{-\beta t}$ es solución a la **Ecuación diferencial (3.20)**.

Otra solución a la ecuación diferencial $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ es $x = te^{-\beta t}$, la cual es linealmente independiente de $e^{-\beta t}$. A continuación se verificará, por sustitución directa, que esta expresión también es solución:

$$\begin{aligned} x &= te^{-\beta t}, \\ \dot{x} &= e^{-\beta t} - \beta te^{-\beta t}, \\ \ddot{x} &= -\beta e^{-\beta t} - \beta[e^{-\beta t} - \beta te^{-\beta t}] = -2\beta e^{-\beta t} + \beta^2 te^{-\beta t}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación diferencial se obtiene

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x &= [-2\beta + \beta^2 t + 2\beta(1 - \beta t) + \omega_0^2 t] e^{-\beta t}, \\ &= (\beta^2 t - 2\beta^2 t + \omega_0^2 t) e^{-\beta t}, \\ &= (-\beta^2 t + \omega_0^2 t) e^{-\beta t}, \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde hemos usado en la última línea el hecho de que $\omega_0^2 = \beta^2$. De esta manera, la solución general a la **Ecuación de movimiento (3.20)** es la combinación lineal de $e^{-\beta t}$ y $te^{-\beta t}$,

$$x = D_1 e^{-\beta t} + D_2 te^{-\beta t} = (D_1 + D_2 t) e^{-\beta t}. \quad (3.26)$$

Cuando el sistema se encuentra en el estado de amortiguamiento crítico, la amplitud se acerca a cero más rápidamente que los estados sub y sobre-amortiguado. La **Figura 3.12** presenta la evolución temporal de la posición, la velocidad y la aceleración para el caso en el cual el cuerpo experimenta amortiguamiento crítico, tomando como condiciones iniciales $x(0) = -0,5$ m y $\dot{x}(0) = 2$ m/s, y asignando los siguientes valores numéricos: $k = 4$ kg/s², $m = 1$ kg, $\omega_0^2 = 4$ s⁻², $\beta = 2$ s⁻¹, $D_1 = -0,5$ m y $D_2 = 1$ m. Es importante tener en cuenta que en este caso $\omega_0^2 = \beta^2$. Se observa que la partícula no alcanza a completar una oscilación, para este caso.

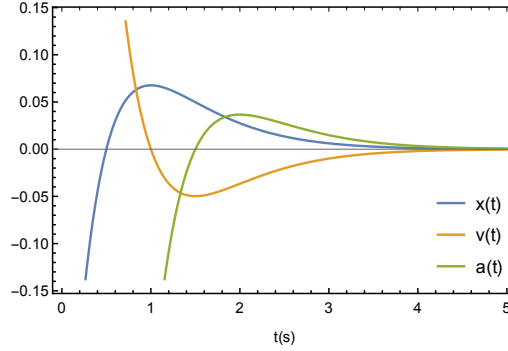


Figura 3.12: Posición (color azul), velocidad (color naranja) y aceleración (color verde) en función del tiempo para el oscilador con amortiguamiento crítico.

Por otra parte, las **Figuras 3.13 y 3.14** muestran la evolución temporal de las energías cinética, potencial y total, y la variación de la energía total como función del tiempo, respectivamente. Los valores numéricos utilizados son los mismos que se consideraron en la **Figura 3.12**. Se observa que estos observables se hacen cero a partir de $t \approx 2,4$ s.

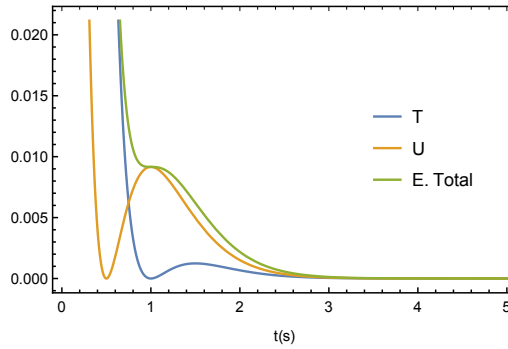


Figura 3.13: Energías cinética (color azul), potencial (color naranja) y total (color verde) en función del tiempo para el oscilador con amortiguamiento crítico.

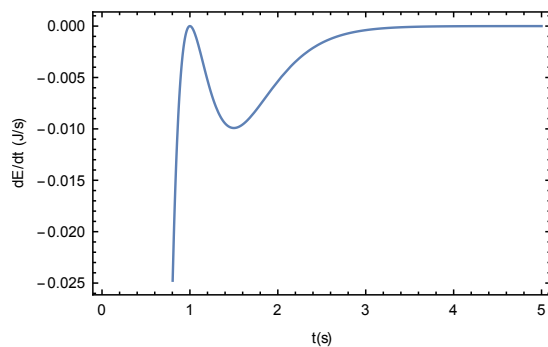


Figura 3.14: Variación de la energía total en función del tiempo para el oscilador con amortiguamiento crítico.

Finalmente, la **Figura 3.15** muestra la trayectoria en el espacio de fase de la partícula en situación de amortiguamiento crítico.

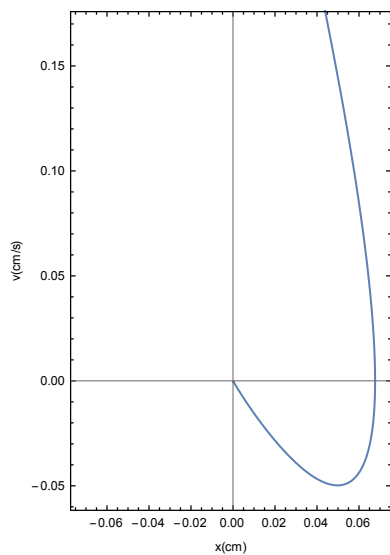


Figura 3.15: Trayectoria en el espacio de fase para el oscilador con amortiguamiento crítico.



3.3.3. Movimiento sobrearmortiguado

El movimiento sobrearmortiguado se da cuando $\omega_0^2 < \beta^2$. En este caso, la evolución temporal de la posición, dada por la **Ecuación (3.21)**, se transforma en:

$$x = e^{-\beta t}(C_1 e^{+\omega_2 t} + C_2 e^{-\omega_2 t}), \quad (3.27)$$

donde $\omega_2 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ (no tiene el carácter de frecuencia angular porque el movimiento no es periódico).

La **Figura 3.16** muestra la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo para el caso sobrearmortiguado, considerando como condiciones iniciales $x(0) = 0$ m, $\dot{x}(0) \approx 10,4$ m/s y tomando los siguientes valores numéricos $C_1 = 3$ m, $C_2 = -3$ m, $k = 4$ kg/s², $m = 1$ kg, $\omega_0^2 = 1$ s⁻² y $\beta = 2$ s⁻¹. Así, se cumple la condición $\beta^2 > \omega_0^2$. En la gráfica se observa que tampoco se alcanza una oscilación en este caso.

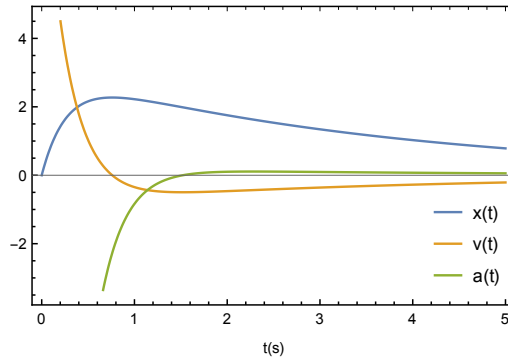


Figura 3.16: Posición (color azul), velocidad (color naranja) y aceleración (color verde) en función del tiempo para el oscilador sobrearmortiguado.

Las **Figuras 3.17** y **3.18** presentan la evolución temporal de las energías cinética, potencial y total, y de la variación de energía total, respectivamente. Se observa que la energía cinética de la partícula rápidamente se hace cero y que dE/dt presenta un máximo.



Por otra parte, la **Figura 3.19** muestra la trayectoria de la partícula en el espacio de fase para el caso sobreamortiguado. Los valores numéricos utilizados en estas figuras son los mismos que se asignaron en la **Figura 3.16**.

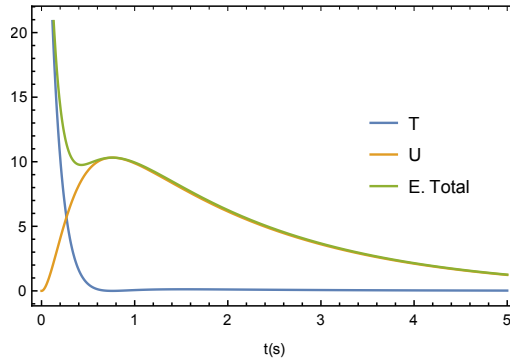


Figura 3.17: Energías cinética (color azul), potencial (color naranja) y total (color verde) en función del tiempo para el oscilador sobreamortiguado.

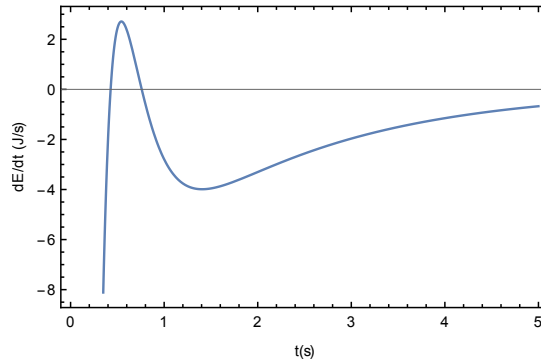


Figura 3.18: Variación de la energía total en función del tiempo para el oscilador sobreamortiguado.

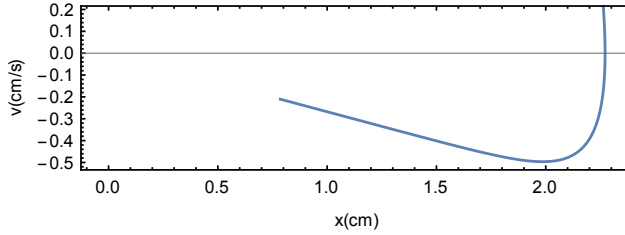


Figura 3.19: Trayectoria en el espacio de fase para el oscilador sobreamortiguado.

3.4. Oscilaciones forzadas

Considere un oscilador amortiguado al que se le aplica una fuerza *externa* periódica $F = F_0 \cos \omega t$, con ω la frecuencia angular. La fuerza total que actúa sobre la partícula en la dirección de movimiento será

$$F_{total} = -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t.$$

Por lo tanto, la ecuación de movimiento se escribe como

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t.$$

Al dividir ambos lados de la ecuación por m , se obtiene

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = A \cos \omega t, \quad (3.28)$$

donde $A = \frac{F_0}{m}$, $\beta = \frac{b}{2m}$ y $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

Esta ecuación diferencial *no es homogénea*; su solución está conformada por la solución general de la ecuación diferencial homogénea respectiva (x_{hom}), más una solución *particular* (x_{par}). Así, la solución general a la ecuación del oscilador forzado se puede expresar como

$$x = x_{hom} + x_{par},$$

donde x_{hom} corresponde a la solución a la ecuación diferencial $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, dada por la **Ecuación (3.21)**.



Se propone como solución particular la expresión

$$x_{\text{par}} = D \cos(\omega t - \delta), \quad (3.29)$$

donde δ representa la diferencia de fase entre la fuerza externa periódica y el movimiento resultante. A partir de esta expresión se obtiene $\dot{x} = -D\omega \sin(\omega t - \delta)$ y $\ddot{x} = -D\omega^2 \cos(\omega t - \delta)$. Si se sustituye x , $\dot{x}$ y $\ddot{x}$ en la **Ecuación (3.28)**, obtenemos

$$\begin{aligned} -D\omega^2 \cos(\omega t - \delta) - 2\beta D\omega \sin(\omega t - \delta) + \omega_0^2 D \cos(\omega t - \delta) &= A \cos \omega t, \\ D(\omega_0^2 - \omega^2)(\cos \omega t \cos \delta + \sin \omega t \sin \delta) - 2D\beta\omega(\sin \omega t \cos \delta - \cos \omega t \sin \delta) &= A \cos \omega t, \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} \{D(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + 2D\beta\omega \sin \delta - A\} \cos \omega t \\ + \{D(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \delta - 2D\beta\omega \cos \delta\} \sin \omega t = 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

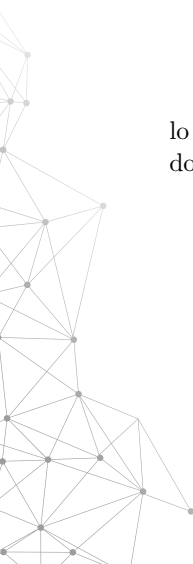
Ya que las funciones $\cos \omega t$ y $\sin \omega t$ son linealmente independientes, los coeficientes de estas funciones en la ecuación anterior deben ser idénticamente iguales a cero. Así, del coeficiente de $\sin \omega t$ en la **Expresión (3.30)** se obtiene

$$\begin{aligned} D(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \delta - 2D\beta\omega \cos \delta &= 0, \\ (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \delta &= 2\beta\omega \cos \delta. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \tan \delta &= \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \\ \delta &= \arctan \left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

A partir de esta relación se pueden asociar estas cantidades con un triángulo rectángulo donde los catetos opuesto y adyacente al ángulo δ están dados por $2\beta\omega$ y $\omega_0^2 - \omega^2$, respectivamente. La hipotenusa de este triángulo es



$\sqrt{4\beta^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}$. Así, se tiene:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \delta &= \frac{2\beta\omega}{\sqrt{4\beta^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}, \\ \cos \delta &= \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{4\beta^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}.\end{aligned}\tag{3.32}$$

La **Figura 3.20** muestra la gráfica del ángulo δ en función de la frecuencia ω , con $\beta = 1 \text{ s}^{-1}$ y $\omega_0^2 = 6 \text{ s}^{-2}$.

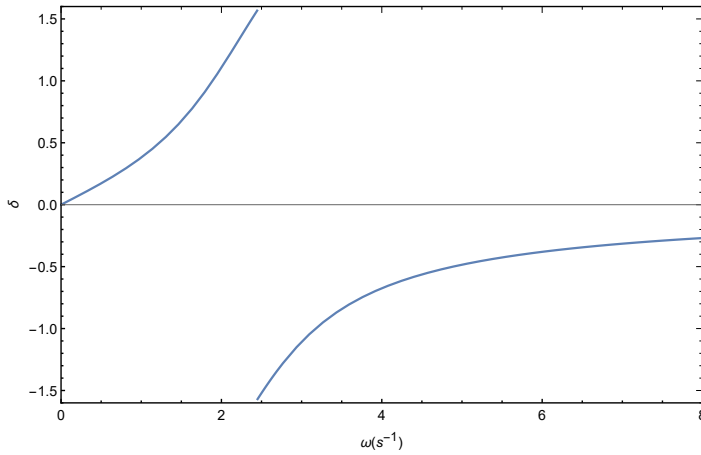


Figura 3.20: Gráfica de la diferencia de fase δ en función de la frecuencia ω .

Por otra parte, igualando a cero el coeficiente de $\cos \omega t$ en la **Expresión 3.30**, se obtiene:

$$\begin{aligned}D(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + 2D\beta\omega \operatorname{sen} \delta - A &= 0, \\ D\{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + 2\beta\omega \operatorname{sen} \delta\} &= A.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + 2\beta\omega \sin \delta}, \\
 &= \frac{A}{\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} + \frac{4\omega^2\beta^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}}}, \\
 &= \frac{A}{\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}}}, \\
 D &= \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}}, \tag{3.33}
 \end{aligned}$$

donde en el segundo paso se utilizaron los valores de $\sin \delta$ y $\cos \delta$ dados por las **Expresiones (3.32)**.

Sustituyendo la expresión para D dada por la expresión anterior en la **Ecuación (3.29)**, se obtiene la solución particular para el oscilador forzado.

$$x_{\text{par}} = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \cos(\omega t - \delta), \tag{3.34}$$

donde δ está dada por la **Ecuación (3.31)**.

Si bien la solución del oscilador forzado es $x = x_{\text{hom}} + x_{\text{par}}$, la parte correspondiente a x_{hom} representa efectos transitorios que desaparecen a medida que transcurre el tiempo por el efecto del amortiguamiento $e^{-\beta t}$. Por lo tanto, a partir de $t \gg \frac{1}{\beta}$ la solución que representa el estado del movimiento es x_{par} , de tal forma que

$$x(t \gg \frac{1}{\beta}) = x_{\text{par}}.$$

Fenómeno de resonancia.

Cuando la amplitud D alcanza su valor *máximo*, se dice que el sistema ha entrado en resonancia. Este fenómeno tiene muchas aplicaciones en varios campos de la física como la acústica, la música, el electromagnetismo, la



electrónica, entre otros. Para obtener el valor de ω en el cual se hace máxima la amplitud, se deriva la expresión para $D(\omega)$ y se iguala a cero; posteriormente, se verifica que sea un máximo usando el criterio de la segunda derivada:

$$\frac{dD}{d\omega} = -A \left(\frac{1}{2} \right) \{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2\}^{-\frac{3}{2}} \{2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\omega\beta^2\} = 0, \quad (3.35)$$

de donde

$$\begin{aligned} \{-4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\omega\beta^2\} &= 0, \\ 4\omega\{-(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\beta^2\} &= 0, \\ -\omega_0^2 + \omega^2 + 2\beta^2 &= 0. \end{aligned}$$

Así, se encuentra que la amplitud se hace máxima en

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \equiv \omega_R. \quad (3.36)$$

En la **Figura 3.21** se muestra la gráfica de la amplitud de la solución particular del oscilador forzado, dada por la **Ecuación (3.33)**, con $A = 0,2$ m s⁻², $\omega_0^2 = 6$ s⁻² y $\beta = 1$ s⁻¹. En este caso, la amplitud D es máxima en la frecuencia de resonancia $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{6 - 2(1)} = 2$.

Es importante tener en cuenta las frecuencias que se han obtenido en este capítulo, asociadas a fenómenos importantes, para establecer una comparación entre ellas. Se hallaron las frecuencias para el sistema libre masa-resorte (ω_0), para oscilaciones subamortiguadas (ω_1) y para el fenómeno de la resonancia (ω_R):

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{k}{m}, \\ \omega_1^2 &= \omega_0^2 - \beta^2, \\ \omega_R^2 &= \omega_0^2 - 2\beta^2. \end{aligned}$$

Observe que $\omega_0 > \omega_1 > \omega_R$.

Nota. Por medio de un programa computacional como, por ejemplo, *Mathematica*, es posible analizar con pocos comandos las oscilaciones consideradas



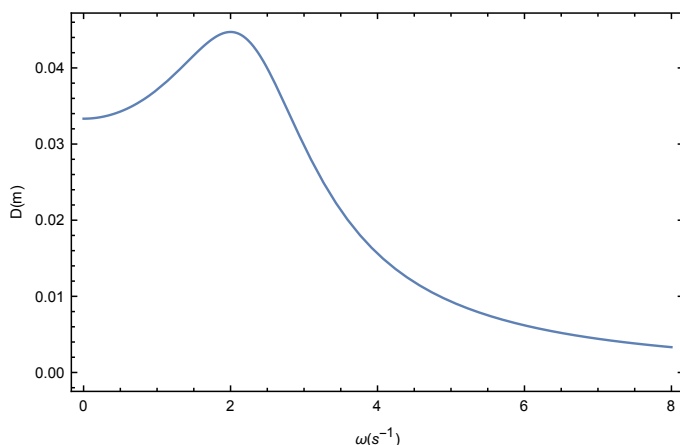
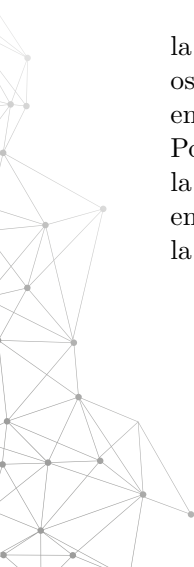


Figura 3.21: Gráfica de la amplitud D en función de la frecuencia ω . La amplitud es máxima en $\omega = \omega_R = 2$.

en este capítulo sin necesidad de un conocimiento sólido sobre ecuaciones diferenciales y sin procedimientos matemáticos engorrosos o difíciles. Con solo tres comandos: `DSolve` (para resolver una ecuación diferencial), `Plot` y `Manipulate` se grafican, rápidamente, observables como posición, velocidad, aceleración, energías cinética, potencial y total, la variación temporal de la energía total y la trayectoria en el espacio de fase. La instrucción `Manipulate` permite analizar el efecto sobre estos observables de algunos parámetros como las condiciones iniciales, la constante elástica del resorte, la masa del cuerpo, la frecuencia propia y el factor de amortiguamiento.

Como ilustración de lo anteriormente descrito, se presenta a continuación, la rutina utilizada en *Mathematica* para obtener diversos observables en el oscilador forzado, sin desarrollos matemáticos tediosos y de gran complejidad en algunos casos, con un conocimiento mínimo de ecuaciones diferenciales. Por medio de esta rutina se obtienen, para el oscilador forzado, la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo (ver **Figura 3.22**); las energías cinética, potencial y total en función del tiempo (ver **Figura 3.23**), la disipación de energía total con respecto al tiempo (ver **Figura 3.24**) y la



trayectoria en el espacio de fase (ver **Figura 3.25**). Esta última gráfica, por ejemplo, es muy difícil de obtener manualmente. Se deja como actividad al lector, analizar detalladamente estas gráficas.

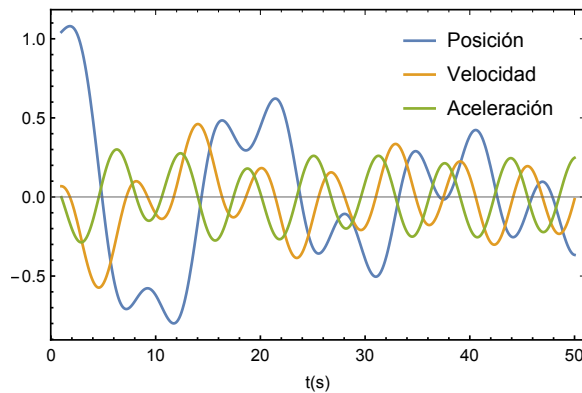


Figura 3.22: Posición (color azul), velocidad (color naranja) y aceleración (color verde) en función del tiempo para el oscilador forzado.

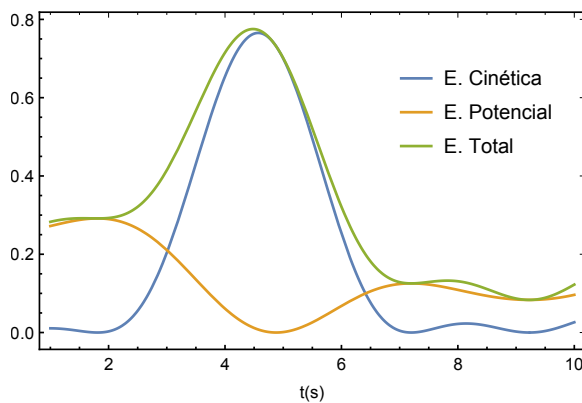


Figura 3.23: Energías cinética (color azul), potencial (color naranja) y total (color verde) en función del tiempo para el oscilador forzado.

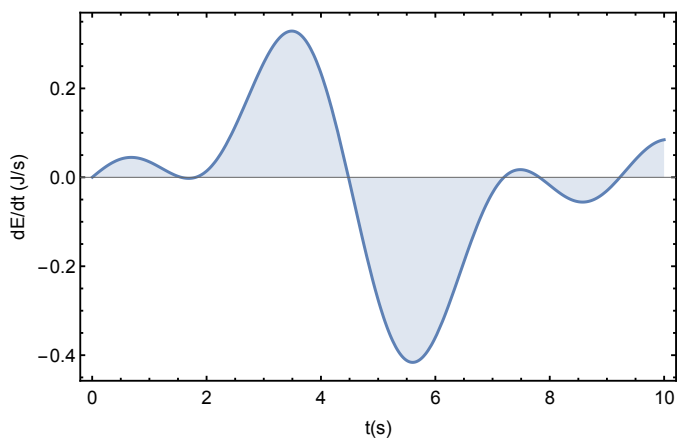


Figura 3.24: Variación de la energía total en función del tiempo para el oscilador forzado.

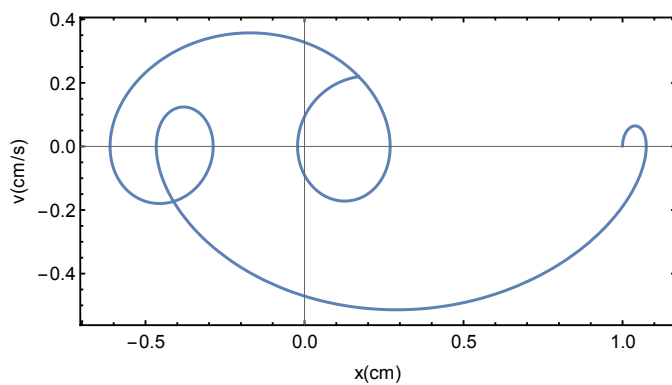


Figura 3.25: Trayectoria en el espacio de fase para el oscilador forzado.

Código en *Mathematica* para el oscilador forzado

Ecuación diferencial:

```
In[1]:= ecamforz=x'[t]+(b/M) x'[t]+(k/M) x[t]-(F0/M) Cos[ω t];
```

Solución de la ecuación diferencial:

```
In[2]:= forz=DSolve[{ecamforz==0,x[0]==1,x'[0]==0},x,t];
```

Definiciones:

```
In[3]:= ECpos[t_,b_,k_,ω_,M_,F0_]=x[t]/.forz;
        ECvel[t_,b_,k_,ω_,M_,F0_]=x'[t]/.forz;

In[4]:= ECCinetica[t_,F0_,k_,M_,ω_,b_]=(1/2)*M*
        (ECvel[t,b,k,ω,M,F0])^2;
        ECPotencial[t_,F0_,k_,M_,ω_,b_]=(1/2)*k*
        (ECpos[t,b,k,ω,M,F0])^2;
        ECTotal[t_,F0_,k_,M_,ω_,b_]=ECCinetica[t,F0,k,M,ω,b]+
        ECPotencial[t,F0,k,M,ω,b];
```

Código Figura 3.22:

```
In[5]:= Manipulate[Plot[{ECpos[t,b,k,ω,M,F0],ECvel[t,b,k,ω,M,F0],
        ECacel[t,b,k,ω,M,F0]}, {t,1,50},Frame→True,FrameStyle→
        Black, FrameLabel → {"t(s)", ""},PlotLegends→Placed[{
        "Posicion","Velocidad", "Aceleracion"}, {0.8, 0.8}]],
        {{b,0.4,"Amortiguamiento (b)"},0,12},{k,0.5,"Constante(k)"},
        0,12},{ω,1,"Constante(ω)"},1,12},{M,4.66,"Masa(m)"},1,12},
        {{F0,1,Constante F0},1,12}]
```

Código Figura 3.23:

```
In[6]:= Manipulate[Plot[{ECCinetica[t,F0,k,M,ω,b],ECPotencial[t,
        F0,k,M,ω,b],ECTotal[t,F0,k,M,ω,b]}, {t,1,10},Frame→True,
        FrameStyle→Black, FrameLabel → {"t(s)", ""},
        PlotLegends→Placed[{"E. Cinetica","E. Potencial","E.Total"},
        {0.8, 0.7}]],{{b,0.4,"Amortiguamiento (b)"},0,12},{k,0.5,
        "Constante (k)"},0,12},{ω,1,"Constante (ω)"},1,12},{M,4.66,
        "Masa (m)"},1,12},{F0,1,Constante F0},1,12}]
```

Código Figura 3.24:

```
In[7]:= Manipulate[Plot[ECdtotal[t,F0,k,M,ω,b],{t,0,10}, Frame→True,
        FrameStyle→Black, FrameLabel → {"t(s)",  $\frac{dE}{dt}$ }, Filling→Axis],
        {{b,0.4,"Amortiguamiento (b)"},0,12},{k,0.5,"Constante (k)"},
        0,12},{ω,1,"Constante (ω)"},1,12},{M,4.66,"Masa (m)"},
        1,12},{F0,1,Constante F0},1,12}]
```

Código Figura 3.25:

```
In[8]:= Manipulate[ParametricPlot[Evaluate[{x[t],x'[t]}/.forz[t,b,ω,
        M,k,F0]], {t,0,20},Frame→True,FrameStyle→Black, FrameLabel
        → {"x(t)","v(t)"},{{b,0.4,"Amortiguamiento (b)"},0,12},
        {{k,0.5,"Constante (k)"},0,12},{ω,1,"Constante (ω)"},1,12},
        {{M,4.66,"Masa (m)"},1,12},{F0,1,"Constante F0"},1,12}]
```

3.5. Osciladores armónicos acoplados

En la naturaleza hay sistemas físicos mecánicos que se pueden modelar por un conjunto de osciladores libres que están interconectados entre sí, de forma que el movimiento de cada oscilador se ve afectado por estos acoplos. Esto se refleja en el hecho de que las ecuaciones de movimiento se encuentran acopladas. Un ejemplo es la molécula de dióxido de carbono (CO_2) la cual se puede modelar a través de dos resortes entre los tres átomos.

El sistema como un todo tendrá varias frecuencias de oscilación o modos normales. Una manera de encontrar estas frecuencias es asumiendo que las coordenadas que describen el sistema presentan un comportamiento oscilatorio en el tiempo: $x_k = A_k e^{i\omega t}$. Otra forma es proponiendo una transformación de coordenadas que permita desacoplar las ecuaciones de movimiento.

Ejemplo 3.2

Dos osciladores armónicos acoplados.

Consideremos el movimiento unidimensional de dos partículas de masas m_1 y m_2 , conectadas (o acopladas) entre ellas por un resorte de constante elástica k_{12} y conectadas, cada una de ellas, a resortes de constantes elásticas k_1 y k_2 , respectivamente (ver **Figura 3.26**). Plantear las ecuaciones de movimiento a partir de la segunda ley de Newton y encontrar las frecuencias de oscilación del sistema.

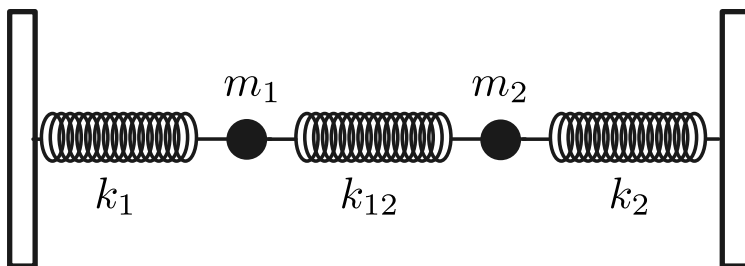


Figura 3.26: Dos osciladores armónicos acoplados.

Solución.

En primer lugar se encontrarán las frecuencias del sistema asumiendo que cada coordenada presenta un movimiento oscilatorio y, en segundo lugar, definiendo una transformación a coordenadas normales.

Procedimiento 1. Aplicando la segunda ley de Newton a cada partícula se obtiene:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 - k_{12}(x_1 - x_2), \\ m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_{12})x_1 - k_{12}x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

y

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2 x_2 - k_{12}(x_2 - x_1), \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k_{12})x_2 - k_{12}x_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

A continuación se asume un comportamiento oscilatorio para las coordenadas $x_{1,2}$:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 e^{i\omega t}, \\ x_2 &= A_2 e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Al sustituir estas expresiones en las **Ecuaciones (3.37) y (3.38)** se llega a:

$$\begin{aligned} -m_1 \omega^2 A_1 + (k_1 + k_{12})A_1 - k_{12}A_2 &= 0, \\ -m_2 \omega^2 A_2 + (k_2 + k_{12})A_2 - k_{12}A_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Las dos ecuaciones anteriores se pueden escribir en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} -m_1 \omega^2 + (k_1 + k_{12}) & -k_{12} \\ -k_{12} & -m_2 \omega^2 + (k_2 + k_{12}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para obtener una solución no trivial ($A_1 = 0 = A_2$) se exige que el determinante de la primera matriz sea igual a cero. A continuación se presentan los comandos requeridos en *Mathematica* para encontrar los valores de las frecuencias.

Código en *Mathematica* para el Ejemplo 3.3

```
In[1]:= A = {{-m1 w^2 + (k1 + k12), -k12}, {-k12, -m2 w^2 + (k2 + k12)}}
In[2]:= Det[{ {k1+k12-m1 w^2, -k12}, {-k12, k12+k2-m2 w^2} }] // Simplify;
In[3]:= Solve[Det[A] == 0, w] // Simplify
In[4]:= Solve[Det[A] == 0, w] /. {k1 -> k, k2 -> k, m1 -> m, m2 -> m}
//FullSimplify

Out[4]= {{w -> -\sqrt{\frac{(k+k12) m - \sqrt{k12^2 m^2}}{m^2}}, {w -> \sqrt{\frac{(k+k12) m - \sqrt{k12^2 m^2}}{m^2}},
{w -> -\sqrt{\frac{(k+k12) m + \sqrt{k12^2 m^2}}{m^2}}, {w -> \sqrt{\frac{(k+k12) m + \sqrt{k12^2 m^2}}{m^2}}}}
```

Se observa que el sistema tiene cuatro soluciones, pero dos de ellas se descartan por ser negativas. Así que solo hay dos frecuencias de oscilación.

A continuación se estudiarán dos casos especiales:

Caso 1. Cuando $k_1 = k_2 = k$ y $m_1 = m_2 = m$. Este resultado se muestra en la última línea de las instrucciones presentadas arriba con el programa *Mathematica*:

Solve[Det[A] == 0, w] /. {k1 -> k, k2 -> k, m1 -> m, m2 -> m} // FullSimplify

En este caso las frecuencias de oscilación están dadas por:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}} \quad \text{y} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3.41)$$

Caso 2. Cuando $k_1 = k_2 = k$, $k_{12} = 3k$ y $m_1 = m_2 = m$. En este caso, las frecuencias de oscilación son:

$$\omega_1 = \sqrt{7} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{y} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3.42)$$

Procedimiento 2. Por medio de una transformación *ortogonal* de coordenadas que desacople las **Ecuaciones de movimiento (3.5)**, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2), \\ x_2 &= \frac{1}{2}(\eta_2 - \eta_1); \end{aligned} \quad (3.43)$$

o, en notación matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \vec{X} = \mathbf{O}\vec{\eta}. \quad (3.44)$$

Obsérvese que esta transformación es equivalente a:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= x_1 - x_2, \\ \eta_2 &= x_1 + x_2; \end{aligned}$$

y que la matriz de transformación $\mathbf{O}$ es ortogonal ($\mathbf{O}\mathbf{O}^T = \mathbf{I}_{2 \times 2}$) y su determinante es 1 ($\det(\mathbf{O}) = 1$).

Sustituyendo a x_1 y x_2 de las **Ecuaciones (3.53)**, en las ecuaciones diferenciales dadas por **(3.50)**, se obtiene:

$$\begin{aligned} m_1(\ddot{\eta}_1 + \ddot{\eta}_2) + (k_1 + k_{12})(\eta_1 + \eta_2) - k_{12}(\eta_2 - \eta_1) &= 0, \\ m_2(\ddot{\eta}_2 - \ddot{\eta}_1) + (k_2 + k_{12})(\eta_2 - \eta_1) - k_{12}(\eta_1 + \eta_2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

A continuación se considerarán los dos casos especiales estudiados previamente:

Caso 1. Cuando $k_1 = k_2 = k$ y $m_1 = m_2 = m$. En este caso las **Ecuaciones (3.45)** se transforman en:

$$\begin{aligned} m(\ddot{\eta}_1 + \ddot{\eta}_2) + (k + k_{12})(\eta_1 + \eta_2) - k_{12}(\eta_2 - \eta_1) &= 0, \\ m(\ddot{\eta}_2 - \ddot{\eta}_1) + (k + k_{12})(\eta_2 - \eta_1) - k_{12}(\eta_1 + \eta_2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$



Sumando y restando estas ecuaciones se obtiene, respectivamente:

$$\begin{aligned}\ddot{\eta}_2 + \left(\frac{k}{m}\right)\eta_2 &= 0, \\ \ddot{\eta}_1 + \left(\frac{k + k_{12}}{m}\right)\eta_1 &= 0;\end{aligned}\tag{3.47}$$

lo que corresponde a dos movimientos armónicos simples con frecuencias

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k + k_{12}}{m}} \quad \text{y} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Observe que es el mismo resultado dado por el procedimiento anterior.

Bajo ciertas condiciones iniciales especiales el sistema oscilará con la frecuencia ω_1 o con ω_2 . Por ejemplo, cuando $x_1(0) = -x_2(0)$ y $\dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0)$. En este caso se tiene $\eta_1(0) = x_1(0) - x_2(0) = 2x_1(0)$ y $\eta_2(0) = x_1(0) + x_2(0) = 0$, por lo que el sistema solo oscilará con la frecuencia ω_1 asociada a η_1 . A esta oscilación se le llama *modo antisimétrico*.

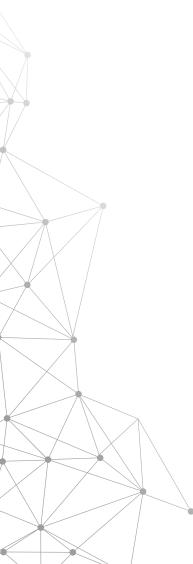
Por otra parte, si $x_1(0) = x_2(0)$ y $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0)$ se tiene que $\eta_1(0) = 0$. El sistema solo oscilará con la frecuencia ω_2 asociada a la coordenada η_2 . A este caso se le llama *modo simétrico*. En general, el modo antisimétrico se presenta con la frecuencia mayor.

Caso 2. Cuando $k_1 = k_2 = k$, $k_{12} = 3k$ y $m_1 = m_2 = m$. En esta situación las **Ecuaciones (3.45)** se transforman en:

$$\begin{aligned}m(\ddot{\eta}_1 + \ddot{\eta}_2) + 4k(\eta_1 + \eta_2) - 3k(\eta_2 - \eta_1) &= 0, \\ m(\ddot{\eta}_2 - \ddot{\eta}_1) + 4k(\eta_2 - \eta_1) - 3k(\eta_1 + \eta_2) &= 0.\end{aligned}\tag{3.48}$$

Sumando y restando estas dos ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned}\ddot{\eta}_2 + \left(\frac{k}{m}\right)\eta_2 &= 0, \\ \ddot{\eta}_1 + \left(\frac{7k}{m}\right)\eta_1 &= 0;\end{aligned}\tag{3.49}$$



estas ecuaciones corresponden a dos movimientos armónicos simples con frecuencias

$$\omega_1 = \sqrt{7} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{y} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

con lo que se obtiene el mismo resultado del procedimiento anterior.

Ejemplo 3.3

Dos osciladores armónicos idénticos, con masa M y frecuencia natural ω_0 , se acoplan agregando al sistema una masa común m a ambos osciladores. Las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + (m/M)\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_1 &= 0, \\ \ddot{x}_2 + (m/M)\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Resolver este par de ecuaciones diferenciales acopladas y obtener las frecuencias de los modos normales del sistema.

Solución.

El problema se resolverá por medio de dos procedimientos diferentes.

Procedimiento 1. Se asumirá que x_1 y x_2 tienen comportamiento oscilatorio:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 e^{i\omega t}, \\ x_2 &= A_2 e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones diferenciales se obtiene:

$$\begin{aligned} -A_1 \omega^2 e^{i\omega t} - (m/M)A_2 \omega^2 e^{i\omega t} + \omega_0^2 A_1 e^{i\omega t} &= 0, \\ -A_2 \omega^2 e^{i\omega t} - (m/M)A_1 \omega^2 e^{i\omega t} + \omega_0^2 A_2 e^{i\omega t} &= 0; \end{aligned}$$

y factorizando a $e^{i\omega t}$ se llega a:

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2)A_1 - (m/M)\omega^2 A_2 &= 0, \\ (\omega_0^2 - \omega^2)A_2 - (m/M)\omega^2 A_1 &= 0. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones las podemos escribir en forma matricial de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -(m/M)\omega^2 \\ -(m/M)\omega^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una solución no trivial se obtiene exigiendo que el determinante de la primera matriz sea cero:

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (m/M)^2 \omega^4 &= 0, \\ \omega_0^2 - \omega^2 &= \pm (m/M) \omega^2, \\ \omega_0^2 &= [1 \pm (m/M)] \omega^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, hay dos frecuencias dadas por:

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 \pm \frac{m}{M}}}. \quad (3.52)$$

Procedimiento 2. Considerando una transformación *ortogonal* de coordenadas que desacople las ecuaciones diferenciales dadas, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2), \\ x_2 &= \frac{1}{2}(\eta_2 - \eta_1). \end{aligned} \quad (3.53)$$

En forma matricial se tiene:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \vec{X} = \mathbf{O} \vec{\eta}. \quad (3.54)$$

Obsérvese que esta transformación es equivalente a:

$$\eta_1 = x_1 - x_2 \quad \text{y} \quad \eta_2 = x_1 + x_2;$$

y que la matriz de transformación $\mathbf{O}$ es ortogonal ($\mathbf{O}\mathbf{O}^T = \mathbf{I}_{2 \times 2}$) y su determinante es 1 ($\det(\mathbf{O}) = 1$).

Sustituyendo a x_1 y a x_2 de las **Ecuaciones (3.53)** en las ecuaciones diferenciales dadas por **(3.50)**, se obtiene:

$$\begin{aligned} (\ddot{\eta}_1 + \ddot{\eta}_2) + (m/M)(\ddot{\eta}_2 - \ddot{\eta}_1) + \omega_0^2(\eta_1 + \eta_2) &= 0, \\ (\ddot{\eta}_2 - \ddot{\eta}_1) + (m/M)(\ddot{\eta}_1 + \ddot{\eta}_2) + \omega_0^2(\eta_2 - \eta_1) &= 0. \end{aligned}$$



Sumando estas ecuaciones se llega a:

$$\begin{aligned}\ddot{\eta}_2 + (m/M)\ddot{\eta}_2 + \omega_0^2\eta_2 &= 0, \\ [1 + (m/M)]\ddot{\eta}_2 + \omega_0^2\eta_2 &= 0, \\ \ddot{\eta}_2 + \frac{\omega_0^2}{[1 + (m/M)]}\eta_2 &= 0;\end{aligned}\tag{3.55}$$

y restándolas se obtiene:

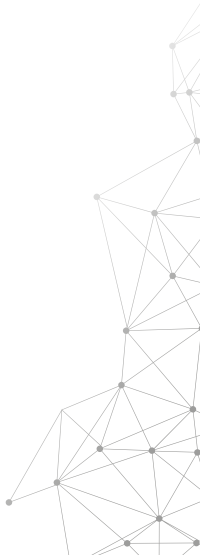
$$\begin{aligned}\ddot{\eta}_1 - (m/M)\ddot{\eta}_1 + \omega_0^2\eta_1 &= 0, \\ [1 - (m/M)]\ddot{\eta}_1 + \omega_0^2\eta_1 &= 0, \\ \ddot{\eta}_1 + \frac{\omega_0^2}{[1 - (m/M)]}\eta_1 &= 0.\end{aligned}\tag{3.56}$$

Las **Ecuaciones (3.55) y (3.56)** corresponden al movimiento de dos osciladores armónicos con frecuencias propias

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \frac{m}{M}}} \quad \text{y} \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{m}{M}}}.\tag{3.57}$$

De esta manera, se llega al mismo resultado que se obtuvo a través del procedimiento 1.

De acuerdo con la cantidad subradical en ω_2 se concluye que la masa m que hace el acople tiene que ser menor que la masa M de cada oscilador. De lo contrario, se obtendría una frecuencia imaginaria. También se concluye que cuando $m \ll M$, solo hay una frecuencia $\omega = \omega_1 = \omega_2$, es decir, el acople es tan débil que los dos osciladores ejecutan un movimiento armónico.



Ejercicio

3.9 Molécula triatómica lineal simétrica. Considere dos átomos de masa m cada uno, ubicados simétricamente a los lados de un átomo de masa M . Los tres átomos están en línea recta, conectados por dos resortes de constante elástica k (ver **Figura 3.27**). Este modelo sirve para describir la molécula de dióxido de carbono (CO_2).

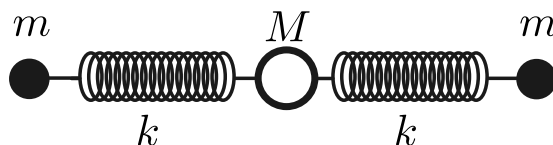


Figura 3.27: Molécula triatómica lineal y simétrica.

Encontrar las frecuencias de oscilación longitudinal en los siguientes casos:

(a) Cuando se defina la siguiente transformación de coordenadas:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2), \\ x_1 &= \frac{1}{2}(\eta_1 - \eta_2), \\ x_2 &= -\frac{m}{M}\eta_1. \end{aligned}$$

(b) Utilizando la transformación de coordenadas

$$\begin{aligned} \eta_1 &= x_2 - x_1, \\ \eta_2 &= x_3 - x_2. \end{aligned}$$

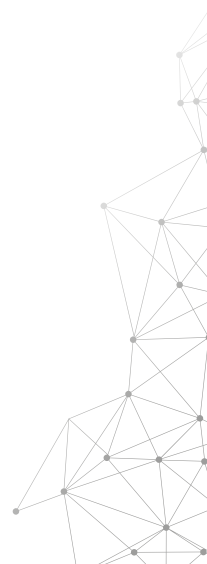
Asuma que el centro de masa se mantiene en reposo. En este caso, $m(x_1 + x_3) + M(x_2) = 0$, es decir, $x_2 = -(m/M)(x_1 + x_3)$.



3.6. Actividades complementarias

1. Con el objetivo de profundizar en el aprendizaje sobre las oscilaciones estudiadas en este capítulo, a partir de la articulación entre teoría y simulación mediante el uso de paquetes computacionales como Mathematica, PPlane, Maple y GeoGebra, el analizador de videos Tracker y la calculadora científica, se recomienda estudiar los siguientes artículos:

- López-Mariño MA, Hernández-Olvera JA, Barroso LA, Trujillo Caballero JC. Cómputo simbólico y gráfico: estudio del sistema masa-resorte. *Rev Bras Ens Fis.* 2017; 39(2).
- Escalante-Martínez JE. Análisis del coeficiente de amortiguamiento viscoso en un sistema masa-resorte-amortiguador utilizando PPLANE y GEOGEBRA. *Rev Mex Fis E.* 2016; 62: 66–72.
- Ortigoza-Capetillo GM. Resolviendo ecuaciones diferenciales ordinarias con Maple y Mathematica. *Rev Mex Fís.* 2007; 53(2).
- Ríos V, Montero G, Román A, García A. Simulación experimental para la enseñanza del movimiento oscilatorio, *Lat. Am J Phys Educ.* 2017; 11(1).
- Cornejo-Serrano MC, Villalobos-Oliver EB, Molina-Reséndiz S, Arreola-Galván WG. Sistema masa resorte con movimiento libre amortiguado, casos: sobreamortiguado, críticamente amortiguado y subamortiguado, su modelación y solución, con el apoyo de GeoGebra. *Pistas Educativas.* 2016; 38(121).
- Cardozo J, Castro LJP, Muñoz JH. Estudio del sistema masa-resorte utilizando Mathematica. *Revista Noria Investigación Educativa.* 2021; 2(8): 114–28.





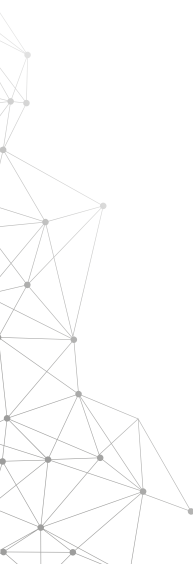
2. Las oscilaciones estudiadas en este capítulo corresponden a oscilaciones *lineales*. Sin embargo, otro tema de bastante interés en física es el de las oscilaciones *no lineales*. En este caso, se consideran fuerzas que no son lineales, por ejemplo, $f(x) = kx^3$, conduciendo a ecuaciones diferenciales no lineales para la ecuación de movimiento de la partícula.

Un caso importante de oscilaciones no lineales es el *péndulo plano*. En este sistema se consideran ángulos grandes, de tal manera que no es válida la aproximación $\sin \theta \approx \theta$. Este hecho hace que la ecuación de movimiento para el péndulo ya no sea lineal.

Otro tema relacionado con ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales es el *caos*. Este tópico es de bastante interés en un curso avanzado de mecánica clásica.

Con el propósito de motivar al lector a tener un primer acercamiento a las oscilaciones no lineales y al caos, se sugiere leer los siguientes artículos:

- Salinas-Hernández E, Ares De Parga G, Domínguez-Hernández S, Muñoz-Vega R. Approximate frequencies of the pendulum for large angles. *Rev Mex Fis E*. 2017; 63: 6–11.
- Lima FMS. An accurate formula for the period of a simple pendulum oscillating beyond the small angle regime. *Am J Phys*. 2006; 74(10).
- Cattani M, Caldas I, Souza SL, Iarosz KC. Deterministic Chaos Theory: Basic concepts. *Rev Bras Ens Fis*. 2017; 39(1).
- Espíndola-Heredia R, Valle G, Hernández G. Numerical study of pendulums: From the simple pendulum approximation to the damped physical pendulum with variable mass, *Lat. Am J Phys Educ*. 2012; 6(2).
- Lemos NA. Quartic oscillator and Jacobi elliptic functions. *Rev Bras Ens Fis*. 2017; 39(1).



3. Un estudio general al péndulo amortiguado asumiendo que la fuerza de fricción es proporcional a la velocidad ($F_f \sim v^n$, con $n > 2$), se presenta en el artículo:
 - Quiroga GD, Ospina-Henao PA. Dynamics of damped oscillations: physical pendulum. *Eur J Phys.* 2017; 38.
4. El tema de las oscilaciones también se puede combinar con masas que varían con el tiempo. En la siguiente referencia, se estudió el movimiento oscilatorio de un cuerpo cuya masa no es constante:
 - Rodrigues H, Panza N, Portes D. A model of oscillator with variable mass. *Rev Mex Fis.* 2014; 60.

