



Capítulo

4

Formalismo lagrangiano

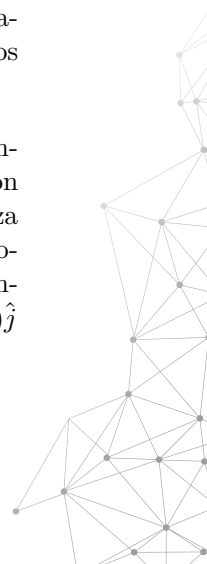
En este capítulo se presenta una introducción al formalismo lagrangiano. Se obtienen las ecuaciones de Lagrange a través del principio de D'Alembert (de carácter diferencial) y del principio de Hamilton (de carácter variacional). Este formalismo ofrece un escenario más potente que el newtoniano para estudiar mecánica clásica. Es de carácter escalar a diferencia del newtoniano que es vectorial.

4.1. Conceptos importantes

4.1.1. Ligaduras

Las ligaduras son *restricciones* que limitan el movimiento de la partícula o del sistema de partículas. En algunos casos es fácil escribir la ecuación matemática asociada a la ligadura. A continuación se presentan algunos ejemplos en los que aparecen ligaduras:

- **Movimiento parabólico.** Consideremos el movimiento en tres dimensiones de un cuerpo que se lanza desde el piso formando un ángulo θ con la horizontal y una velocidad inicial $\vec{v}_0$. Asumiendo que la única fuerza que actúa sobre el cuerpo es el peso (es decir, el aire no ejerce fricción sobre el cuerpo), el movimiento del mismo se da en un plano (en dos dimensiones). Esto es una restricción. En este caso, $\vec{v}_0 = (v_0 \cos \theta)\hat{i} + (v_0 \sin \theta)\hat{j}$ y el cuerpo describe una parábola.





- **Máquina de Atwood (Figura 4.1).** Es un sistema formado por dos masas restringidas a un movimiento vertical (una hacia arriba y la otra hacia abajo) atadas a los extremos de una cuerda inextensible y de masa despreciable, que pasa por una polea fija sin fricción. En este caso se tienen varias ligaduras: el movimiento de cada masa se da en una dimensión y las dos masas siempre estarán separadas por la longitud de la cuerda. La máquina de Atwood es un caso especial de un *sistema formado por dos masas atadas por una cuerda* como por ejemplo, cuando una de las masas se mueve sobre un plano inclinado o sobre una mesa horizontal y la otra se mueve verticalmente, o cuando cada masa está sobre un plano inclinado (ver **Ejemplo 2.1** en el **Capítulo 2**).

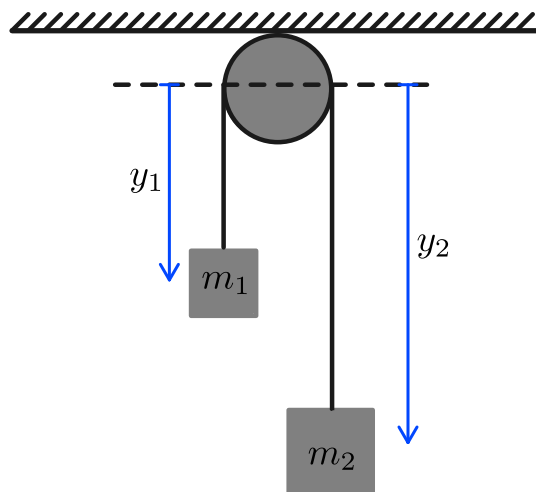


Figura 4.1: Máquina de Atwood.

- **Máquina de Atwood doble (Figura 4.2).** Es una extensión de la máquina de Atwood. En este caso el sistema está conformado por tres masas restringidas a moverse verticalmente. Dos de ellas forman una máquina de Atwood cuya polea está colgando de otra polea fija de la que está suspendida la otra masa. Las cuerdas del sistema se consideran inextensibles (es otra ligadura) y con masa despreciable. De igual manera, se asume que las masas de las poleas son despreciables.

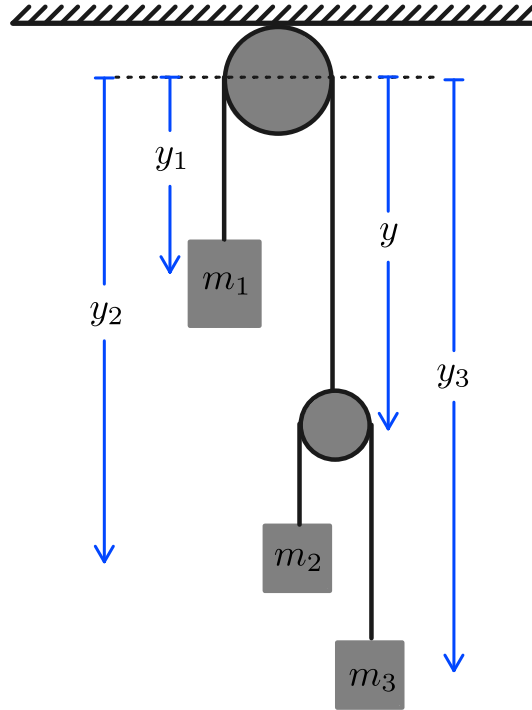
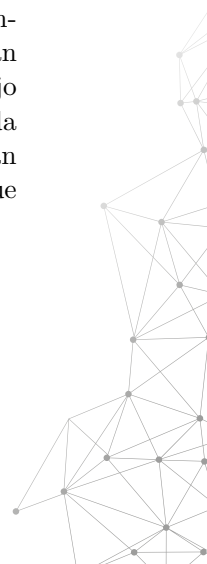


Figura 4.2: Máquina de Atwood doble.

- **Péndulo simple (Figura 3.1).** El movimiento de la partícula se da en un plano (es una ligadura) y la partícula siempre va a estar a la misma distancia del punto de suspensión de la cuerda a la cual está atada (es otra ligadura). El ángulo de oscilación cumple la aproximación $\sin \theta \simeq \theta$.
- **Péndulo doble (Figura 4.3).** Es una generalización del péndulo simple. El péndulo doble está conformado por dos masas m_1 y m_2 que están oscilando. La primera de las masas, m_1 , está suspendida de un punto fijo mediante una cuerda de longitud l_1 . La otra masa, m_2 , está suspendida de m_1 por medio de una cuerda de longitud l_2 . Las cuerdas se consideran inextensibles (es una restricción) y con masa despreciable. Se asume que ambas masas oscilan en un plano (es una ligadura).



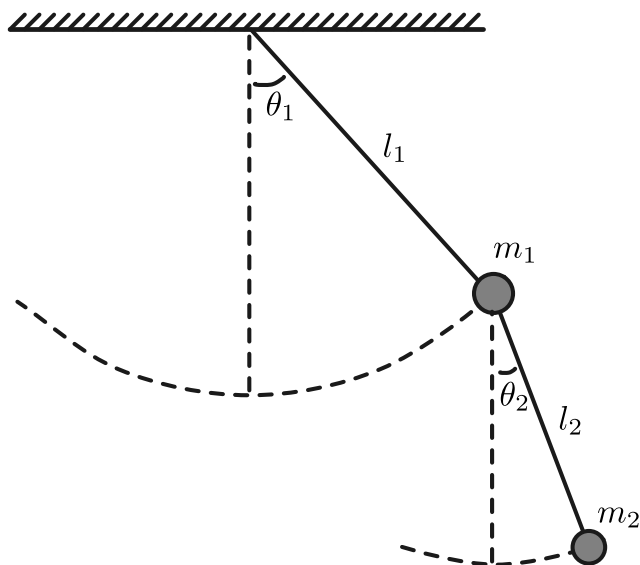
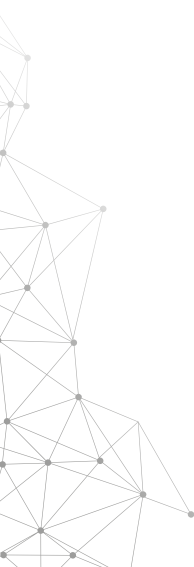


Figura 4.3: Péndulo doble.

- **Cuerpo rígido.** En un cuerpo rígido la distancia entre toda pareja de partículas que conforma el cuerpo es *constante*. Esto hace que el cuerpo no sea deformable. Si el cuerpo rígido está fijo en un punto, solo puede rotar y no se puede trasladar.
- Objeto que se desliza sobre un plano inclinado (ligadura) que está fijo sobre una superficie horizontal. El objeto puede ser un bloque, un aro, un disco, una esfera, etc. Una variante a este sistema es asumir que el plano inclinado se mueve horizontalmente.
- Partícula restringida a moverse sobre la superficie de una esfera, o de un cono, o de un cilindro.
- Un gas en un recipiente.
- Dos partículas unidas por una varilla.



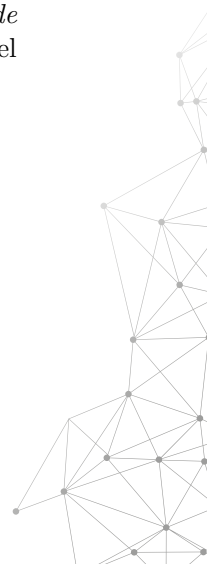


Hay distintas variaciones, extensiones o generalizaciones que se pueden hacer tanto al péndulo simple o doble como a la máquina de Atwood -sencilla o doble. Por ejemplo, en el caso del péndulo se puede considerar que la masa de la cuerda no es despreciable o que el punto de suspensión del péndulo se mueve horizontal o verticalmente y una generalización inmediata es considerar el péndulo triple. Por otra parte, en el caso de la máquina de Atwood se puede considerar que la polea tiene masa y que rota. También se puede considerar que el punto de suspensión de la polea no está fijo.

Entre los tipos de ligaduras se encuentran:

- Ligaduras *holónomas*. También llamadas *integrables*. Restringen solo la posición del sistema y no involucran velocidades. Se pueden escribir de la forma $f(x_i; t) = 0$, donde $i = 1, \dots, n$, siendo n el número de partículas que conforman el sistema. La variable que está después del signo «;» es la variable independiente. En este caso, el tiempo.
- Ligaduras *no holónomas*. También se les llama *diferenciales no integrables*. La expresión matemática que las representa no se puede integrar.
- Ligaduras *reónomas*. Son ligaduras holónomas o no holónomas que dependen del tiempo.
- Ligaduras *esclerónomas*. Son ligaduras que no cambian con el tiempo.

La existencia de ligaduras en un sistema hace que las coordenadas $\vec{r}_i$ de las partículas *no sean todas independientes*. Es decir, es posible expresar algunas coordenadas del sistema en función de otras. Además, aparecen las *fuerzas de ligadura* que corresponden a interacciones entre las ligaduras y los cuerpos del sistema.





4.1.2. Grados de libertad

Es el número de coordenadas *independientes* necesarias para especificar completamente el sistema. Está dado por $3n - m$ donde n es el número de partículas y m es el número de ligaduras.

Los grados de libertad se clasifican en:

- Traslacionales: describen el movimiento del centro de masa.
- Rotacionales: describen las rotaciones del sistema respecto al centro de masa.
- Vibracionales: describen los movimientos relativos de las partículas que no trasladan el centro de masa y no rotan el sistema.

4.1.3. Coordenadas generalizadas

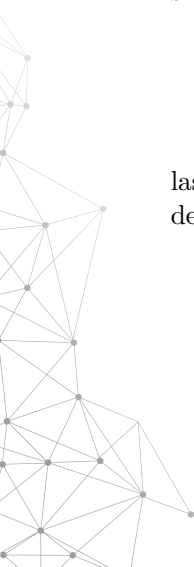
Es cualquier conjunto de coordenadas *independientes* necesarias para describir un sistema. Las coordenadas generalizadas se simbolizan por la letra q . El número de coordenadas generalizadas es $3n - m$. En forma general, el conjunto de coordenadas generalizadas es $\{q_1, q_2, \dots, q_{3n-m}\}$, donde n es el número de partículas y m es el número de ligaduras holónomas. Las coordenadas x_i de las partículas están en función de las q_j (y viceversa):

$$x_i = x_i(q_j, t), \quad i = 1, \dots, 3n; \quad j = 1, \dots, 3n - m. \quad (4.1)$$

La configuración instantánea del sistema está dada por un punto del espacio conformado por las $\{q_{3n-m}\}$ coordenadas. Este espacio de $3n - m$ dimensiones, donde cada q_i corresponde a un eje, se llama *espacio de configuración*.

Ejemplo 4.1

Considere una *partícula en movimiento parabólico* (Figura 4.4). Escribir las ecuaciones que representen las ligaduras, establecer el número de grados de libertad y dar ejemplos de conjuntos de coordenadas generalizadas.





Solución.

Se tiene una partícula, por lo tanto, $n = 1$. La ligadura hace que el movimiento se de en un plano, por ejemplo, el plano $X - Y$. De esta manera, el número de ligaduras es 1 y su ecuación es $z = 0$. Así, el número de grados de libertad es

$$3n - m = 3(1) - 1 = 2.$$

Lo anterior quiere decir que se requieren dos coordenadas para describir el sistema. Como conjuntos de coordenadas generalizadas se pueden considerar las coordenadas cartesianas o polares: $\{q_1, q_2\} = \{x, y\}, \{r, \theta\}$.

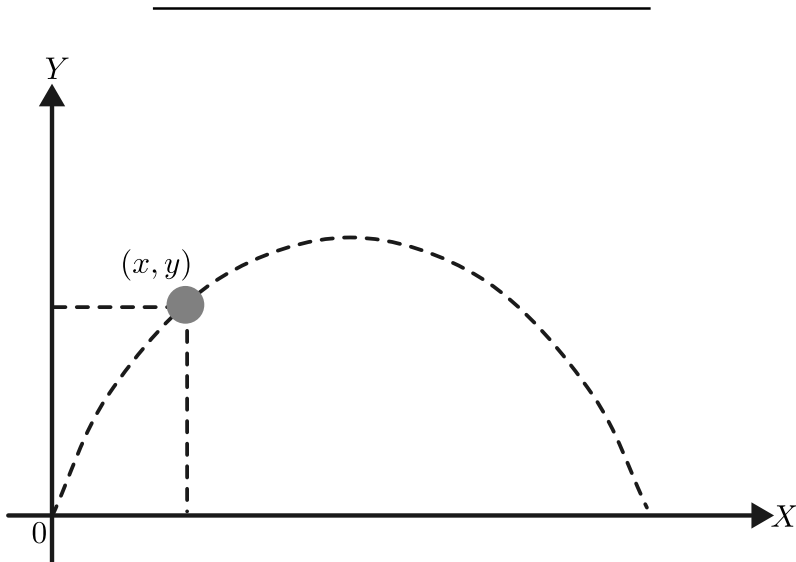


Figura 4.4: Movimiento parabólico.

Ejemplo 4.2

Considere el Péndulo simple (**Figura 3.1**). Escribir las ecuaciones de ligadura, obtener el número de grados de libertad y dar ejemplos de coordenadas generalizadas para este sistema.





Solución.

Se tiene una sola partícula, por lo tanto, $n = 1$. Hay dos ligaduras ($m = 2$):
(a) Una de ellas corresponde al movimiento de la partícula en un plano. Esto es $z = 0$; **(b)** La otra está relacionada con el hecho de que la cuerda es inextensible, entonces, para cualquier punto (x, y) que represente la posición de la masa, se tiene $x^2 + y^2 - l^2 = 0$, donde l es la longitud de la cuerda. De esta manera, el número de grados de libertad es

$$3n - m = 3(1) - 2 = 1.$$

Por lo tanto, solo se requiere una coordenada generalizada para describir el sistema. El conjunto de coordenadas generalizadas puede ser $\{q_1\} = \{x\}, \{y\}, \{\theta\}$.

Ejemplo 4.3

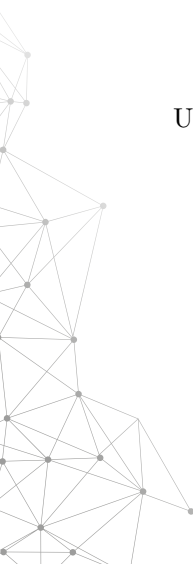
Obtener las ligaduras, los grados de libertad y dar ejemplos de coordenadas generalizadas para la *máquina de Atwood* (ver **Figura 4.1**).

Solución.

El sistema esta conformado por dos partículas de masas m_1 y m_2 . Así, $n = 2$. La posición de cada masa está dada por (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) . Considerando el origen del sistema cartesiano en el centro de la polea y que las partículas se mueven en la dirección vertical, se tienen las siguientes ligaduras: $x_1 = 0, z_1 = 0, x_2 = 0, z_2 = 0$ y $y_1 + y_2 = l$, donde l es la longitud de la cuerda inextensible. En total hay 5 ligaduras. La última, permite escribir la variable y_1 en función de y_2 y viceversa.

$$3n - m = 3(2) - 5 = 1.$$

En consecuencia, se requiere solo una coordenada para describir el sistema. Un conjunto de coordenadas generalizadas puede ser $\{q_1\} = \{y_1\} = \{y_2\}$.





Ejemplo 4.4

Considere un aro de radio r que rueda sobre un plano inclinado (**Figura 4.5**). Escriba las ecuaciones de ligadura, obtener el número de grados de libertad y dar ejemplos de coordenadas generalizadas.

Solución.

El sistema está conformado por un cuerpo: $n = 1$. Por otra parte, se tienen las siguientes ligaduras: **(a)** El movimiento del aro se da en un plano, esto es, $z = 0$; **(b)** El aro se mueve sobre el plano inclinado. Asumiendo que el aro ha recorrido la distancia y sobre el plano inclinado, esta distancia es igual al arco del aro, el cual está dado por $y = r\theta$, donde θ es el ángulo descrito por el radio r . Así, hay dos ligaduras ($m = 2$). El número de grados de libertad es

$$3n - m = 3(1) - 2 = 1.$$

Solo se requiere una coordenada generalizada que puede ser $\{q_1\} = \{\theta\}, \{y\}$.

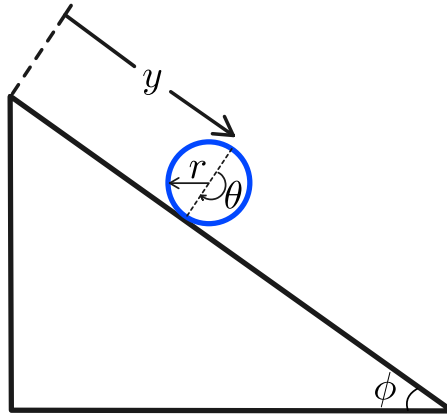
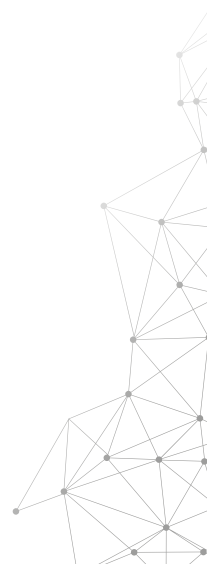


Figura 4.5: Aro rodando sobre un plano inclinado.





Ejercicios

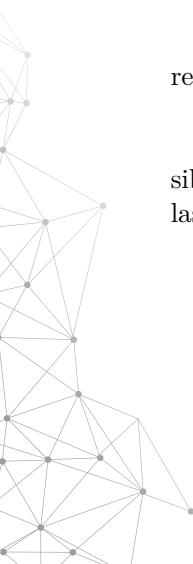
Obtener el número de grados de libertad, las ecuaciones de las ligaduras y mencionar conjuntos de coordenadas generalizadas para los siguientes sistemas:

- 4.1 Péndulo doble.
- 4.2 Máquina de Atwood doble.
- 4.3 Partícula sometida a la fuerza gravitacional dentro de un cono.
- 4.4 Bloque que desliza sobre un plano inclinado que se mueve horizontalmente.
- 4.5 Una partícula de masa m , sometida a una fuerza $\vec{F} = -k\vec{r}$ y restringida a moverse sobre la superficie de un cilindro definido por $x^2 + y^2 = R^2$.
- 4.6 Un disco que rueda sobre un plano inclinado. Asuma inicialmente que el plano inclinado está fijo y luego que desliza horizontalmente.

4.2. Principio de D'Alembert y ecuaciones de Lagrange

En un sistema se pueden distinguir tres tipos de desplazamientos: posibles, reales y *virtuales*.

Los *desplazamientos virtuales* o *infinitesimales* son los desplazamientos posibles al variar infinitesimalmente las coordenadas del sistema, compatibles con las fuerzas y las ligaduras del sistema. Se simbolizarán por $\delta\vec{r}$.





4.2.1. Ecuación general de la estática o principio de los trabajos virtuales

Considérese un sistema de n partículas. La fuerza resultante $\vec{F}_i$ que actúa sobre la i -ésima partícula es $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{f}_i$, donde $\vec{F}_i^{(e)}$ es la fuerza externa sobre la i -ésima partícula y $\vec{f}_i$ es la fuerza de ligadura.

Para un sistema en equilibrio, la fuerza resultante $\vec{F}_i$ sobre la i -ésima partícula es nula. Por lo tanto, el trabajo virtual de esta fuerza es cero:

$$\vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Si se suma sobre todas las partículas que conforman el sistema, se tiene:

$$\sum_i^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_i^n (\vec{F}_i^{(e)} + \vec{f}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Considerando que la fuerza de ligadura es perpendicular a la superficie por donde se mueve el cuerpo, entonces, esta fuerza no realiza trabajo virtual: $\sum_i^n \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$. De esta manera se obtiene

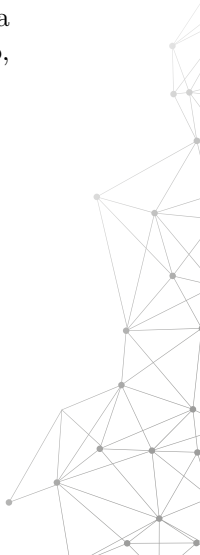
$$\sum_i^n \vec{F}_i^{(e)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (4.2)$$

La ecuación anterior recibe el nombre de *principio de los trabajos virtuales* (o *ecuación general de la estática*) y fue formulado por J. Bernoulli en 1717. Obsérvese que en la ecuación anterior los $\delta \vec{r}_i$ *no son independientes* porque están relacionados a través de las ecuaciones de las ligaduras.

4.2.2. Ecuación general de la dinámica o principio de D'Alembert

Para el caso dinámico, en el cual el sistema no está en equilibrio, la fuerza total sobre cada una de las partículas del sistema no es cero. En este caso, aplicando la segunda ley de Newton a la i -ésima partícula se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{F}_i &= \dot{\vec{p}}_i, \\ \vec{F}_i^{(e)} + \vec{f}_i &= \dot{\vec{p}}_i, \\ \vec{F}_i^{(e)} + \vec{f}_i - \dot{\vec{p}}_i &= 0. \end{aligned}$$





De esta última expresión se concluye que el trabajo virtual realizado por esta *fuerza* es cero: $(\vec{F}_i^{(e)} + \vec{f}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$. Si se suma sobre todas las partículas y nuevamente se considera que las ligaduras no realizan trabajo virtual ($\vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$), se obtiene:

$$\sum_i^n (\vec{F}_i^{(e)} - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (4.3)$$

La ecuación anterior recibe el nombre de *Principio de D'Alembert* (propuesto en 1760) o *Ecuación General de la Dinámica*. La fuerza $-\dot{\vec{p}}_i = -m_i \ddot{\vec{r}}_i$ se llama ficticia o inercial.

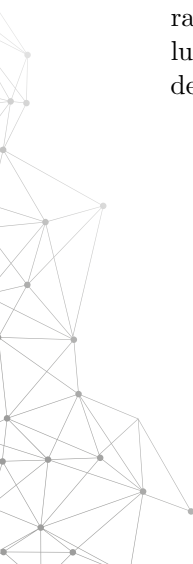
Es importante tener en cuenta que en la **Ecuación (4.3)** la cantidad $(\vec{F}_i^{(e)} - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i$ no es cero, pero la suma sobre todas las partículas sí lo es. El principio de D'Alembert establece que la suma de las fuerzas externas con las fuerzas *inerciales* no realiza trabajo virtual en un sistema dinámico. Aunque no es muy práctico, esta ecuación ofrece un camino alternativo para resolver problemas físicos dinámicos.

4.2.3. El principio de D'Alembert en coordenadas generalizadas

En la **Ecuación (4.3)** los desplazamientos virtuales $\delta \vec{r}_i$ no son independientes ya que están relacionados por las ligaduras. Para sobrepasar esto, se trabajará en coordenadas generalizadas, las cuales sí son independientes.

Considerando el vector posición de la i -ésima partícula en función de las coordenadas generalizadas, $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_j)$, donde $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, 3n - m$, se escribirá el Principio de D'Alembert en coordenadas generalizadas a través del procedimiento que se describe a continuación. En primer lugar, los desplazamientos virtuales $\delta \vec{r}_i$ se pueden escribir en función de los desplazamientos virtuales δq_j mediante la regla de la cadena:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (4.4)$$





donde no se consideraron variaciones δt porque los desplazamientos virtuales solo consideran desplazamientos de las coordenadas.

Por otra parte, la derivada total respecto al tiempo de $\vec{r}_i$ (ver **Ecuación (1.44)** en el **Capítulo 1**) está dada por:

$$\vec{v}_i \equiv \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}. \quad (4.5)$$

La derivada parcial de esta expresión respecto a $\dot{q}_k$ produce:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} &= \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} + 0, \\ \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} &= \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta_{jk}, \\ \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Utilizando la **Ecuación (4.4)**, el primer término de la **Ecuación (4.3)** se transforma de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_i^{(e)} \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_i \vec{F}_i^{(e)} \cdot \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \\ &= \sum_j \left(\sum_i \vec{F}_i^{(e)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j, \\ \sum_i \vec{F}_i^{(e)} \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_j Q_j \delta q_j, \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde Q_j se llama *fuerza generalizada* definida por

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \quad (4.8)$$

Como $j = 1, \dots, 3n - m$, la expresión anterior indica que *el número de coordenadas generalizadas es igual al número de grados de libertad* ($= 3n - m$). Por otra parte, es pertinente mencionar que las unidades de las fuerzas generalizadas no siempre son newtons. Solo en el caso en el que las coordenadas cartesianas sean las coordenadas generalizadas, las unidades serán newtons.





El segundo término de la **Ecuación (4.3)** se transforma en:

$$\begin{aligned}
 \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i, \\
 &= \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j; \quad \text{se usó la **Ecuación (4.4)**,} \\
 &= \sum_j \left[\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j, \\
 &= \sum_j \left[\sum_i m_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \right\} \right] \delta q_j. \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

En el último paso se utilizó la derivada temporal del producto escalar $\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ (ver **Capítulo 1**):

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) &= \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right), \\
 \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right).
 \end{aligned}$$

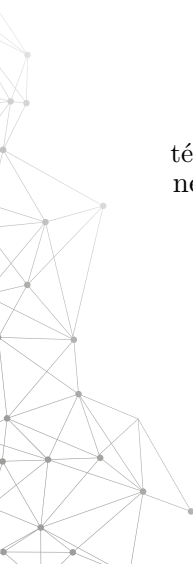
Por otra parte,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_k \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j},$$

es decir,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}. \quad (4.10)$$

Sustituyendo las **Ecuaciones (4.6)** y **(4.10)** en el primer y segundo término del lado derecho de la **Ecuación (4.9)**, respectivamente, se obtiene:





$$\begin{aligned}
 \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_j \left[\sum_i m_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \right\} \right] \delta q_j, \\
 &= \sum_j \left[\sum_i m_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial q_j} \right\} \right] \delta q_j. \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

En el último paso se tuvo en cuenta la forma en que se deriva el producto escalar entre dos vectores iguales (ver **Capítulo 1**):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v^2}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i), \\
 &= \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \cdot \vec{v}_i + \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}, \\
 &= 2 \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j},
 \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \cdot \vec{v}_i.$$

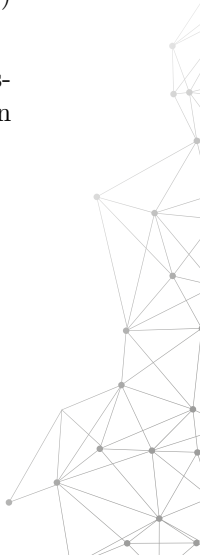
Finalmente, teniendo en cuenta que la energía cinética T está dada por $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$, la **Ecuación (4.11)**, correspondiente al segundo término de la **Ecuación (4.3)**, se transforma en

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j. \quad (4.12)$$

Sustituyendo las **Ecuaciones (4.7)** y **(4.12)** en la **Ecuación (4.3)**, se obtiene *el principio de D'Alembert en coordenadas generalizadas*:

$$\sum_j \left[Q_j - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0. \quad (4.13)$$

Para sistemas *holónomos* se cumple que las q_j (y, por lo tanto, los desplazamientos virtuales) son *independientes*, de tal manera que en la ecuación anterior los coeficientes de δq_j se anulan por separado:





$$Q_j - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} = 0. \quad (4.14)$$

Las ecuaciones anteriores reciben el nombre de *Ecuaciones de Lagrange*. Estas ecuaciones dan *otra alternativa* para hallar las fuerzas generalizadas Q_j :

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}. \quad (4.15)$$

Por otra parte, si el sistema es *conservativo*, las fuerzas externas derivan de un potencial escalar $U = U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t)$ de la forma $\vec{F}_i^{(e)} = -\nabla_i U$ y la fuerza generalizada, dada por la **Ecuación (4.8)**, es:

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \nabla_i U \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial U}{\partial q_j}.$$

Así, se muestra que para un sistema *conservativo*, las fuerzas generalizadas están dadas por

$$Q_j = - \frac{\partial U}{\partial q_j}. \quad (4.16)$$

Con este resultado las ecuaciones de Lagrange quedan como:

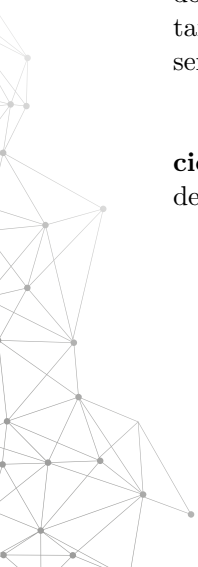
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_j} = 0. \quad (4.17)$$

Ya que U no depende de las velocidades generalizadas, $\partial U / \partial \dot{q}_j = 0$, y se llega que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0. \quad (4.18)$$

donde $L = T - U$ es el *lagrangiano* del sistema. Las ecuaciones anteriores también se conocen como *Ecuaciones de Lagrange* y se aplican a sistemas conservativos.

Nota. Las fuerzas generalizadas se pueden obtener a partir de las **Ecuaciones (4.8)**, **(4.15)** y **(4.16)**. La conveniencia de la aplicación de cada una de ellas en un problema específico depende de las características del problema.





4.2.4. Energía potencial dependiente de la velocidad

Supongamos que la energía potencial depende de las coordenadas y las velocidades generalizadas ($U = U(q_j, \dot{q}_j)$) y que la fuerza generalizada está dada por:

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right). \quad (4.19)$$

En este caso la **Ecuación (4.14)** se transforma en

$$-\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} = 0, \quad (4.20)$$

de donde se obtiene, nuevamente

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (4.21)$$

con $L = T - U$. Por lo tanto, las ecuaciones de Lagrange dadas por la **Ecuación (4.18)** se aplican no solo a sistemas conservativos sino también a sistemas cuyas fuerzas generalizadas estén dadas por la **Expresión (4.19)**.

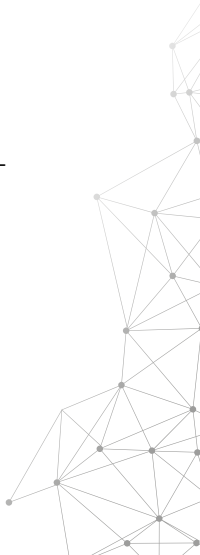
Ejercicio

4.7 Dé un ejemplo de un sistema físico en el que se cumplan las **Ecuaciones (4.19)**. Escriba explícitamente la expresión para la fuerza generalizada Q_j .

4.3. Principio de Hamilton y ecuaciones de Lagrange

4.3.1. Algunos resultados del cálculo de variaciones

Sea $f = f(y, y'; x)$ una *funcional* (es una función cuyas variables son funciones), donde x sea la variable independiente, $y = y(x)$ y $y' = \frac{dy}{dx}$.





En cálculo de variaciones se plantea el siguiente problema: Dada la funcional $f = f(y(x), y'(x); x)$, encontrar el camino $y = y(x)$ tal que la integral curvilínea

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x); x) dx, \quad (4.22)$$

con x_1 y x_2 fijos, tenga un valor *estacionario* (extremal). Esto es equivalente a exigir que $\delta J = 0$:

$$\delta J = \delta \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x); x) dx = 0. \quad (4.23)$$

La solución al problema mencionado conduce a las **Ecuaciones de Euler-Lagrange**:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (4.24)$$

A continuación se presenta la respectiva demostración. Consideremos una familia de curvas $Y(\alpha, x)$ vecinas a $y(x)$ construida por la siguiente representación paramétrica:

$$Y(\alpha, x) = y(x) + \alpha \eta(x), \quad (4.25)$$

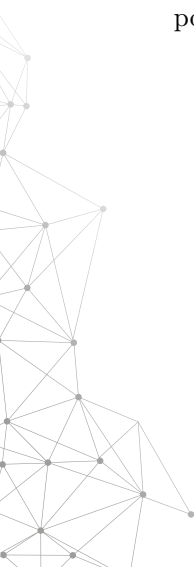
donde $\eta(x)$ es una función que tiene primera derivada continua, α es un parámetro, $Y(0, x) = y(x)$. Se exige que todas las curvas tengan la misma imagen en los extremos x_1 y x_2 . Esto es: $Y(\alpha, x_1) = y(x_1)$ y $Y(\alpha, x_2) = y(x_2)$, lo cual implica $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$.

Sustituyendo a $y(x)$ por $Y(\alpha, x)$ en la funcional, la integral J queda así:

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(Y(\alpha, x), Y'(\alpha, x); x) dx,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_1}^{x_2} f(Y(\alpha, x), Y'(\alpha, x); x) dx, \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{\partial Y'}{\partial \alpha} \right) dx, \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \eta + \frac{\partial f}{\partial Y'} \eta' \right) dx, \end{aligned} \quad (4.26)$$





donde $\frac{\partial Y}{\partial \alpha} = \eta$. Además, $Y' = y' + \alpha \eta'$. De aquí se encuentra que $\frac{\partial Y'}{\partial \alpha} = \eta'$.

El segundo término de la integral en la **Ecuación (4.26)** se puede integrar por partes de la siguiente forma:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial Y'} \eta' dx = \frac{\partial f}{\partial Y'} \eta \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial Y'} \right) \eta dx.$$

El primer término del lado derecho de la ecuación anterior se anula al evaluarlo en los dos extremos ya que $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Por lo tanto,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial Y'} \eta' dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial Y'} \right) \eta dx.$$

Así, la **Ecuación (4.26)** se transforma en:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \eta - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial Y'} \right) \eta \right) dx, \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial Y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial Y'} \right) \right] \eta dx. \end{aligned}$$

Como $\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = 0$ para un extremal y η es función arbitraria, se concluye que el integrando de la ecuación anterior se anula en $\alpha = 0$. Es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (4.27)$$

De esta manera, se obtiene la *ecuación de Euler-Lagrange*. Se debe tener en cuenta que en esta ecuación aparece $y(x)$ y no $Y(\alpha, x)$.

Una explicación más rigurosa para llegar a la ecuación de Euler-Lagrange se obtiene a partir del Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones (ver la **Actividad Complementaria 1** al final de este capítulo)

Si $f = f(y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n; x) = f(y_i, y'_i; x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, se obtienen n ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.28)$$





Segunda forma de la ecuación de Euler-Lagrange.

A continuación se obtendrá otra forma de la ecuación de Euler-Lagrange. A partir de la funcional $f = f(y(x), y'(x); x)$ se halla $\frac{df}{dx}$:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x}, \\ &= y' \frac{\partial f}{\partial y} + y'' \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial x}.\end{aligned}\quad (4.29)$$

El segundo término del lado derecho de la ecuación anterior se obtiene de la derivada del siguiente producto:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) &= y'' \frac{\partial f}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right), \\ y'' \frac{\partial f}{\partial y'} &= \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right).\end{aligned}$$

A continuación se sustituirá este término en la **Ecuación 4.29**:

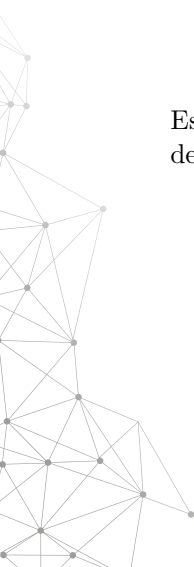
$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= y' \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{\partial f}{\partial x}, \\ \frac{df}{dx} - \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) &= y' \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right\} + \frac{\partial f}{\partial x}, \\ \frac{d}{dx} \left(f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) &= y' \{0\} + \frac{\partial f}{\partial x},\end{aligned}\quad (4.30)$$

donde se utilizó la ecuación de Euler-Lagrange en el primer término del lado derecho de la ecuación. Así, se llega a

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left(f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (4.31)$$

Esta expresión se conoce como *segunda forma de la ecuación de Euler-Lagrange*. Es muy útil cuando la funcional no depende explícitamente de la variable independiente; en este caso, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, y se llega a

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = \text{constante}. \quad (4.32)$$





Ejercicios

4.8 Demostrar que la distancia más corta entre dos puntos de un plano es una línea recta. Sugerencia: en este caso, la funcional se obtiene de

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \\ s &= \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx, \\ s &= \int \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx, \\ s &= \int f(y, z, y', z'; x) dx, \end{aligned}$$

donde $f(y, z, y', z'; x) = (1 + y'^2 + z'^2)^{1/2}$.

4.9 Demostrar que la geodésica sobre la superficie de un cilindro circular recto es un segmento de hélice. Sugerencia: escribir el elemento ds en coordenadas cilíndricas.

4.10 Demostrar que la geodésica sobre una esfera es un círculo. Sugerencia: escribir el elemento ds en coordenadas esféricas.

Nota. Una geodésica es la línea que representa la distancia más corta entre dos puntos de una superficie.

Ejemplo 4.5

Asuma que $f = f(y, y', y''; x)$, donde $y' = \frac{dy}{dx}$ y $y'' = \frac{dy'}{dx}$. Demostrar que en este caso, la ecuación correspondiente de Euler-Lagrange es:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) = 0. \quad (4.33)$$





Solución.

Consideremos una familia de curvas $Y(\alpha, x)$ vecinas a $y(x)$ construida por la siguiente representación paramétrica:

$$\begin{aligned} Y(\alpha, x) &= y(x) + \alpha \eta(x), \\ Y'(\alpha, x) &= y'(x) + \alpha \eta'(x), \\ Y''(\alpha, x) &= y''(x) + \alpha \eta''(x), \end{aligned}$$

donde $\eta(x)$ y su primera derivada son funciones arbitrarias continuas, α es un parámetro y $Y(0, x) = y(x)$. Además, se exige que todas las curvas tengan la misma imagen en los extremos x_1 y x_2 . Es decir, $Y(\alpha, x_1) = y(x_1)$ y $Y(\alpha, x_2) = y(x_2)$. Esto implica que $\eta(x_1) = 0$ y $\eta(x_2) = 0$.

Sustituyendo a $y(x)$ por $Y(\alpha, x)$ en la integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), y''(x); x) dx,$$

se obtiene:

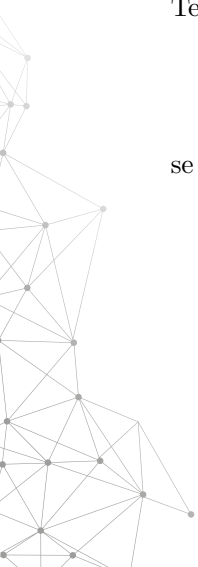
$$\begin{aligned} J(\alpha) &= \int_{x_1}^{x_2} f(Y(\alpha, x), Y'(\alpha, x), Y''(\alpha, x); x) dx, \\ \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_1}^{x_2} f(Y(\alpha, x), Y'(\alpha, x), Y''(\alpha, x); x) dx, \\ \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{\partial Y'}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial Y''} \frac{\partial Y''}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) dx. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0; \quad \frac{\partial Y}{\partial \alpha} = \eta; \quad \frac{\partial Y'}{\partial \alpha} = \eta'; \quad \frac{\partial Y''}{\partial \alpha} = \eta'',$$

se obtiene

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \eta + \frac{\partial f}{\partial Y'} \eta' + \frac{\partial f}{\partial Y''} \eta'' \right) dx. \quad (4.34)$$





La segunda integral se hace por partes definiendo $u = \frac{\partial f}{\partial Y'}$ y $dv = d\eta$, de tal forma que se pueda aplicar la relación $\int u dv = uv - \int v du$ para obtener:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{d\eta}{dx} dx &= \frac{\partial f}{\partial Y'} \eta \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial Y'} \right) \eta dx, \\ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{d\eta}{dx} dx &= - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial Y'} \right) \eta dx, \end{aligned} \quad (4.35)$$

porque $\eta(x_1) = 0$ y $\eta(x_2) = 0$.

Para la tercera integral que está en el lado derecho del signo igual en la **Ecuación (4.34)** se hace $u = \frac{\partial f}{\partial Y''}$ y $dv = d\eta'$. Así, esta integral da:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial Y''} \eta'' dx &= \frac{\partial f}{\partial Y''} \eta' \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial Y''} \right) \eta' dx, \\ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial Y''} \eta'' dx &= - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial Y''} \right) \eta' dx, \end{aligned} \quad (4.36)$$

porque $\eta'(x_1) = 0$ y $\eta'(x_2) = 0$. La integral que está en el lado derecho de la ecuación anterior también se hace por partes haciendo $u = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial Y''} \right)$ y $dv = d\eta$, obteniendose:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial Y''} \eta'' dx &= - \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial Y''} \right) \eta \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y''} \right) \eta dx \right], \\ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial Y''} \eta'' dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y''} \right) \eta dx. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Sustituyendo las **Ecuaciones (4.35)** y **(4.37)** en la **Ecuación (4.34)** se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial Y} \eta - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial Y'} \right) \eta + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y''} \right) \eta \right] dx, \\ \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial Y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial Y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y''} \right) \right] \eta dx. \end{aligned} \quad (4.38)$$





Como $\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = 0$ para un extremal y η es función arbitraria, se concluye que el integrando de la ecuación anterior se anula en $\alpha = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) = 0.$$

Nota. A partir del análisis de la estructura de las ecuaciones de Euler-Lagrange para las funcionales $f(y, y'; x)$ y $f(y, y', y''; x)$, dadas por las **Ecuaciones (4.27) y (4.33)**, respectivamente, se podría demostrar que dichas ecuaciones presentan un patrón de recurrencia en la alternancia de los signos dada por $(-1)^p$, con $p = 0, 1, 2, \dots$, y en el orden de las derivadas $\frac{d^n}{dx^n}$ con $n = 0, 1, 2, \dots$ y $\frac{\partial f}{\partial y^{(m)}}$ con $m = 1, 2, \dots$

Ejemplo 4.6

Suponga que la funcional f es el lagrangiano L dado por:

$$L(y, \dot{y}, \ddot{y}; t) = -\frac{1}{2}m\dot{y}\ddot{y} - \frac{1}{2}ky^2.$$

(a) ¿Qué tipo de movimiento describe este lagrangiano? **(b)** ¿Se afecta la ecuación de movimiento si al lagrangiano dado se le agrega el término $ky\dot{y}$?

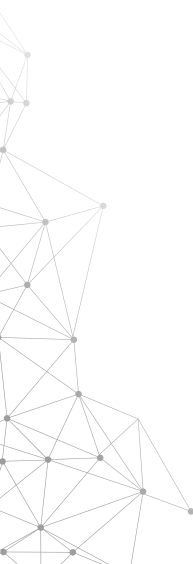
Solución.

(a) Para el caso en que $f = L$, entonces $x \leftrightarrow t$, $y \leftrightarrow q$, $y' \leftrightarrow \dot{q}$ y $y'' \leftrightarrow \ddot{q}$, y la correspondiente ecuación de Euler-Lagrange es:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) = 0. \quad (4.39)$$

Las derivadas requeridas son:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{1}{2}m\ddot{y} - ky; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \ddot{y}} = -\frac{1}{2}my \rightarrow \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{y}} \right) = -\frac{1}{2}m\ddot{y}$$





Al sustituir estas derivadas en la ecuación de Euler-Lagrange se obtiene:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}m\ddot{y} - ky - \frac{1}{2}m\ddot{y} &= 0, \\ m\ddot{y} + ky &= 0, \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y &= 0, \end{aligned}$$

con $\omega_0^2 = k/m$. Por lo tanto, el lagrangiano dado describe un oscilador libre.

(b) Si al lagrangiano anterior se le agrega el término $ky\dot{y}$ se obtiene la misma ecuación de movimiento.

Nota. Algunos autores han estudiado la variación de la aceleración en función del tiempo ($d\vec{a}/dt = d^3\vec{r}/dt^3$) y las posibles aplicaciones en problemas más complejos. La cantidad asociada a la variación de la aceleración en el tiempo se llama *jerk*. Al trabajar en el formalismo lagrangiano se obtendrían lagrangianos con derivadas temporales de las coordenadas generalizadas superiores a uno.

4.3.2. El principio de Hamilton

Para un sistema en el cual todas las fuerzas, excepto las de ligadura, se obtienen de un potencial escalar generalizado que puede depender de las posiciones, las velocidades y el tiempo (se le llama sistema **monógeno**), la trayectoria que sigue el sistema es aquella que minimiza la **integral de acción**:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i; t) dt = 0, \quad (4.40)$$

donde $L = T - U$ es el lagrangiano del sistema. Este principio fue propuesto por W. Hamilton en 1835.

4.3.3. Deducción de las ecuaciones de Lagrange a partir del principio de Hamilton

Al comparar las **Ecuaciones (4.23)** y **(4.40)** se observa que el principio de Hamilton es equivalente al problema formulado en cálculo de variaciones.





Por lo tanto, si se aplica el resultado del cálculo de variaciones (ver **Ecuación (4.24)**), haciendo los siguientes cambios de variables: $x \leftrightarrow t$, $y_i \leftrightarrow q_i$, $y'_i \leftrightarrow \dot{q}_i$ y $f \leftrightarrow L$, el principio de Hamilton conduce a las *ecuaciones de Lagrange*:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.41)$$

Finalmente, se resalta que en este capítulo se han utilizado dos caminos para llegar a las ecuaciones de Lagrange: **(a)** A partir del *principio de D'Alembert* (camino *diferencial*) y **(b)** A partir del *principio de Hamilton* (camino *integral*):

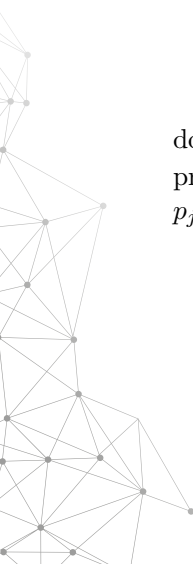
$$\text{Principio de D'Alembert} \rightarrow \boxed{\text{Ecuaciones de Lagrange}} \leftarrow \text{Principio de Hamilton}$$

Sin embargo, estos dos caminos no son los únicos enfoques para obtener las ecuaciones de Lagrange. En la **Actividad Complementaria 4** de este capítulo, se relacionan algunas referencias en las cuales se obtienen las ecuaciones de Lagrange por medio de otros métodos.

Coordenada cíclica. Una coordenada es *cíclica* o *ignorable* si no aparece explícitamente en el Lagrangiano. De esta manera, si q_j es cíclica, entonces, $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ y existe una cantidad que se conserva:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) &= 0, \\ 0 - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \equiv p_j &= \text{constante}, \end{aligned}$$

donde $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ se denomina *momento canónico conjugado*. Resumiendo: siempre que exista una coordenada cíclica q_j , hay un momento canónico conjugado p_j que se conserva.





Fuerza generalizada y momento canónico conjugado. Si $T = T(\dot{q}_j)$ y $U = U(q_j)$, se tiene que $\frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j}$ y $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$. Por lo tanto, una fuerza generalizada que dependa de un potencial escalar generalizado (ver **Ecuación (4.19)**) transforma de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Q_j &= -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right), \\ &= -\frac{\partial U}{\partial q_j} + 0, \\ &= \frac{\partial L}{\partial q_j}, \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right), \\ Q_j &= \dot{p}_j. \end{aligned}$$

A partir de este resultado se concluye que si q_j es una coordenada cíclica, p_j es constante y $Q_j = 0$. Por lo tanto, *la fuerza generalizada asociada a una coordenada cíclica es cero.*

Por otra parte, a partir de la **Ecuación (4.15)** se obtiene:

$$\begin{aligned} Q_j &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}, \\ Q_j &= \frac{dp_j}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_j}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\dot{p}_j = Q_j + \frac{\partial T}{\partial q_j}. \quad (4.42)$$

Equivalencia entre las ecuaciones de Lagrange y las ecuaciones de Newton. Consideremos un sistema conservativo conformado por una sola partícula. Seleccionando como coordenadas generalizadas a las coordenadas





cartesianas, la ecuación de Lagrange es:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) &= 0, \quad i = 1, 2, 3. \\ \frac{\partial(T - U)}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{x}_i} \right) &= 0, \quad i = 1, 2, 3,\end{aligned}$$

Como $T = T(\dot{x}_i)$ y $U = U(x_i)$, entonces, $\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0$ y $\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} = 0$. Con estos resultados, la ecuación de Lagrange se transforma en:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) &= 0, \\ -\frac{\partial U}{\partial x_i} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right), \\ F_i &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right).\end{aligned}$$

Desarrollando la última derivada se obtiene:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} m \dot{x}_j^2 \right) = m \dot{x}_i = p_i;$$

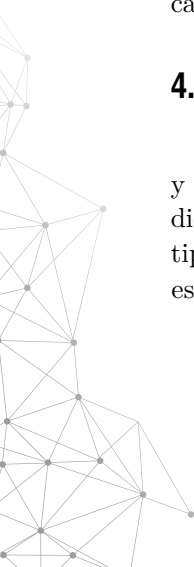
por lo tanto:

$$F_i = \dot{p}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.43)$$

De esta manera, se obtienen las ecuaciones de Newton partiendo de las ecuaciones de Lagrange. Es importante resaltar que esta equivalencia se ha obtenido asumiendo que las coordenadas generalizadas son las coordenadas cartesianas.

4.4. Ecuaciones de Lagrange y multiplicadores de Lagrange

Para obtener las ecuaciones de Lagrange por los principios de D'Alembert y Hamilton, se asumió, en ambos casos, que las coordenadas eran independientes entre sí. Sin embargo, cuando se tienen ligaduras holónomas o cierto tipo de ligaduras no holónomas, las coordenadas no son independientes. En este caso, se introducen los multiplicadores de Lagrange.





Supongamos que el sistema se describe por medio de dos coordenadas y_1, y_2 y que estas coordenadas están relacionadas por la ligadura $f(y_i; t) = 0, i = 1, 2$. Considerando las siguientes familias paramétricas:

$$Y_i(\alpha, t) = y_i(t) + \alpha \eta_i(t), \quad i = 1, 2.$$

El principio de Hamilton está dado por:

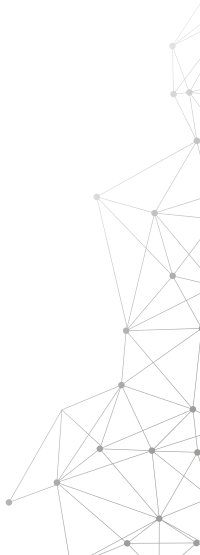
$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{\partial L}{\partial Y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_i} \right) \frac{\partial Y_i}{\partial \alpha} \right] dt = 0, \\ \delta J &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial Y_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_1} \right) \frac{\partial Y_1}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial L}{\partial Y_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_2} \right) \frac{\partial Y_2}{\partial \alpha} \right] dt = 0, \\ \delta J &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial Y_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_1} \right) \eta_1 + \left(\frac{\partial L}{\partial Y_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_2} \right) \eta_2 \right] dt = 0. \end{aligned}$$

Las variaciones $\frac{\partial Y_1}{\partial \alpha} = \eta_1$ y $\frac{\partial Y_2}{\partial \alpha} = \eta_2$ ya no son independientes por la ligadura. Veamos:

$$\begin{aligned} df(Y_1, Y_2; t) &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial Y_1} \frac{\partial Y_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial Y_2} \frac{\partial Y_2}{\partial \alpha} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial Y_1} \eta_1 + \frac{\partial f}{\partial Y_2} \eta_2 &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial Y_1} \eta_1 &= -\frac{\partial f}{\partial Y_2} \eta_2, \\ \frac{\eta_1}{\eta_2} &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial Y_2}}{\frac{\partial f}{\partial Y_1}}. \end{aligned}$$

Ahora, se sustituye este resultado en la expresión que se traía para δJ :

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial Y_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_1} \right) \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial Y_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_2} \right) \right] \eta_2 dt = 0, \\ \delta J &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial Y_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_1} \right) \left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial Y_2}}{\frac{\partial f}{\partial Y_1}} \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial Y_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_2} \right) \right] \eta_2 dt = 0. \end{aligned}$$





Esta expresión contiene como factor únicamente a η_2 , sobre la cual no hay restricción. Por lo tanto, la cantidad que está dentro del parentésis rectangular en la última expresión, con $(\delta J)_{\alpha=0}$, es cero:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial y_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) \left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial y_2}}{\frac{\partial f}{\partial y_1}} \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial y_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) = 0,$$

o equivalentemente,

$$\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial y_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial y_1} \right)^{-1}}_{=-\lambda(t)} = \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial y_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial y_2} \right)^{-1}}_{=-\lambda(t)}. \quad (4.44)$$

Obsérvese que el lado izquierdo de la ecuación anterior incluye únicamente derivadas de L y f con respecto a y_1 y $\dot{y}_1$, mientras que el lado derecho incluye solo derivadas respecto a y_2 y $\dot{y}_2$. Como $y_{1,2}$ son funciones que dependen de t , entonces, los dos lados de la **Ecuación (4.44)** son iguales a una función que depende de t , la cual se ha representado por $-\lambda(t)$. En la literatura, a $\lambda(t)$ se le conoce como *multiplicador de Lagrange*.

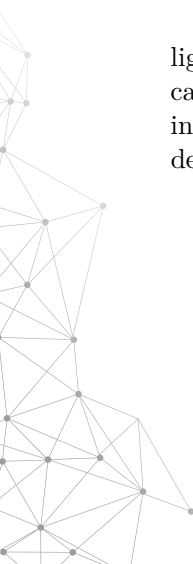
De esta manera se llega a las ecuaciones de Lagrange con multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial y_1} &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial y_2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Ahora se tienen tres incógnitas: y_1 , y_2 y λ , pero también se tienen tres ecuaciones: las dos **Ecuaciones (4.45)** y la ligadura $f(y_1, y_2; t) = 0$.

En general, si el sistema se describe por $y_1, \dots, y_n$ coordenadas y hay m ligaduras $f_k(y_i) = 0$, con $i = 1, \dots, n$ y $k = 1, \dots, m$, entonces hay m multiplicadores de Lagrange λ_k (uno por cada ligadura). En total se tendrán $n + m$ incógnitas ($y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$) con igual número de ecuaciones: n ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) + \sum_{k=1}^m \lambda_k(t) \frac{\partial f_k}{\partial y_i} = 0; \quad i = 1, \dots, n; \quad (4.46)$$





y m ligaduras $f_k = 0$.

Los multiplicadores de Lagrange corresponden a la *fuerza de ligadura* y la *fuerza generalizada de ligadura* (Q_i) está dada por:

$$Q_i = \sum_{k=1}^m \lambda_k(t) \frac{\partial f_k}{\partial y_i}; \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.47)$$

Considerando la ligadura $f_k(y_i; t) = 0$, obtenemos $\frac{df_k}{dt}$,

$$\frac{df_k}{dt} = \sum_i \frac{\partial f_k}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

De acuerdo con la ecuación anterior, las ecuaciones de Lagrange con multiplicadores de Lagrange también se pueden aplicar a sistemas con ligaduras que tengan la forma:

$$\sum_i \beta_{ki} \dot{y}_i + \epsilon = 0, \quad (4.48)$$

con $\beta_{ki} = \frac{\partial f_k}{\partial y_i}$ y $\epsilon = \frac{\partial f}{\partial t}$.

4.5. Aplicaciones del formalismo lagrangiano

Ejemplo 4.7

Hallar las ecuaciones de movimiento para una partícula de masa m sometida únicamente a la acción de la fuerza gravitacional de la tierra, mediante el formalismo lagrangiano (ver **Figura 4.4**) y obtener las fuerzas generalizadas.

Solución.

Asumamos que la partícula se mueve en el plano $x - y$. Previamente se mencionó que este sistema tiene dos grados de libertad. Por lo tanto, se requieren dos coordenadas generalizadas. Sean $\{x, y\}$ estas coordenadas. La posición y la velocidad de la partícula en cualquier instante están dadas por el punto (x, y) y por $(\dot{x}, \dot{y})$, respectivamente.





La energía cinética de la partícula es $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ y la energía potencial está dada por $mg y$. Así, el lagrangiano para este sistema es:

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}; t) = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy. \quad (4.49)$$

Como hay dos coordenadas generalizadas, entonces, hay dos ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0, \quad (4.50)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = 0. \quad (4.51)$$

Haciendo las respectivas derivadas, se obtiene:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}; \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -mg; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}.$$

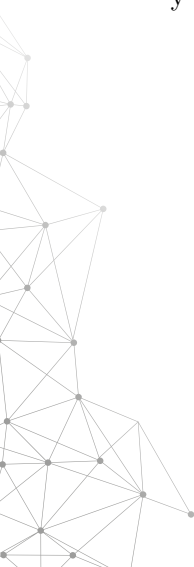
La coordenada x , en este caso, es cíclica porque no aparece explícitamente en el lagrangiano.

Reemplazando las derivadas respectivas en las ecuaciones de Lagrange, se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) &= 0, \\ m\ddot{x} &= 0, \\ \ddot{x} &= 0; \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -mg - \frac{d}{dt}(m\dot{y}) &= 0, \\ g + \ddot{y} &= 0, \\ \ddot{y} &= -g. \end{aligned}$$





De esta manera, la aceleración en x es cero (movimiento uniforme) y la aceleración en y es constante (movimiento uniformemente acelerado).

Como hay dos grados de libertad, hay dos fuerzas generalizadas: Q_x y Q_y . A continuación se obtendrán las fuerzas generalizadas por medio de dos caminos diferentes:

(a) Utilizando la **Ecuación (4.8)**:

$$Q_x = \vec{F}^{(e)} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \quad y \quad Q_y = \vec{F}^{(e)} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}.$$

Teniendo en cuenta que $\vec{F}^{(e)} = (0, -mg)$ y $\vec{r} = (x, y)$, se obtiene:

$$Q_x = (0, -mg) \cdot (1, 0) \quad y \quad Q_y = (0, -mg) \cdot (0, 1);$$

así, $Q_x = 0$ y $Q_y = -mg$. La fuerza generalizada asociada a la coordenada cíclica x es cero.

(b) Utilizando la **Ecuación (4.16)** ya que el sistema es conservativo: en este caso

$$Q_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad y \quad Q_y = -\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Como $U = mgy$, entonces, $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial U}{\partial y} = mg$. Por lo tanto, $Q_x = 0$ y $Q_y = -mg$.

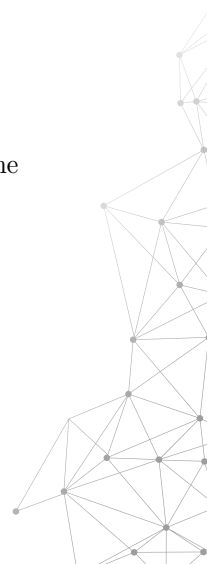
Como coordenadas generalizadas también se pueden seleccionar a las coordenadas polares $\{r, \theta\}$, donde $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$, o equivalentemente, $r^2 = x^2 + y^2$ y $\tan \theta = y/x$.

Derivando respecto al tiempo a x y a y se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta. \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado las expresiones anteriores y, luego, sumándolas se obtiene la velocidad en coordenadas polares:

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}) \cdot (\dot{x}, \dot{y}) = (\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2.$$





De esta manera, el lagrangiano en coordenadas polares es

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr \sin \theta. \quad (4.52)$$

La ecuación de Lagrange para la coordenada r es

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = 0;$$

y la ecuación de Lagrange para la coordenada θ es

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0.$$

Al efectuar las derivadas correspondientes, las ecuaciones de Lagrange para r y θ son, respectivamente,

$$r\dot{\theta}^2 - \ddot{r} - g \sin \theta = 0, \quad (4.53)$$

$$-gr \cos \theta - 2r\dot{r}\dot{\theta} - r^2\ddot{\theta} = 0. \quad (4.54)$$

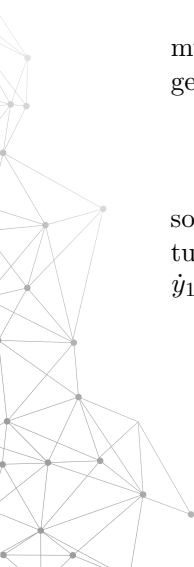
Este último par de ecuaciones diferenciales están acopladas y, por tanto, son más difíciles de resolver que las ecuaciones obtenidas trabajando con coordenadas cartesianas. Esta dificultad se da porque la energía potencial depende de ambas coordenadas polares, mientras que en coordenadas cartesianas depende solo de y .

Ejemplo 4.8

Hallar mediante el formalismo lagrangiano la aceleración con la cual se mueven las masas en una máquina de Atwood (**Figura 4.1**) y las fuerzas generalizadas.

Solución.

El sistema tiene un grado de libertad. La posición de las masas m_1 y m_2 son y_1 y y_2 , respectivamente. La ligadura es $y_1 + y_2 = l$, donde l es la longitud de la cuerda. Al derivar respecto al tiempo a esta expresión, se obtiene $\dot{y}_1 = -\dot{y}_2 \rightarrow \dot{y}_1^2 = \dot{y}_2^2$.





La energía cinética del sistema es

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}_1^2.$$

En este paso, también se puede seleccionar como coordenada generalizada a y_2 . Por otra parte, la energía potencial del sistema es

$$U = -m_1gy_1 - m_2gy_2 = -m_1gy_1 - m_2g(l - y_1) = (m_2 - m_1)gy_1 - m_2gl.$$

Así, el lagrangiano está dado por

$$L(y_1, \dot{y}_1; t) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}_1^2 - (m_2 - m_1)gy_1 + m_2gl. \quad (4.55)$$

La ecuación de Lagrange es

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) = 0. \quad (4.56)$$

Las derivadas requeridas son:

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = -(m_2 - m_1)g; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = (m_1 + m_2)\dot{y}_1.$$

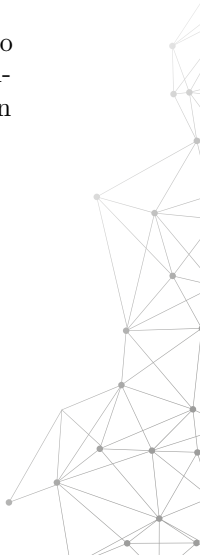
Continuando con la ecuación de Lagrange se obtiene

$$-(m_2 - m_1)g - (m_1 + m_2)\ddot{y}_1 = 0.$$

Por lo tanto, la aceleración del sistema es

$$\ddot{y}_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) g. \quad (4.57)$$

Se observa que la aceleración es constante. Es importante notar que el término m_2gl (constante) presente en el lagrangiano no contribuye. Es decir, el lagrangiano se puede ver como $L = L_0 + cte$ de tal forma que se puede trabajar con L_0 sin afectar las ecuaciones de movimiento.





En cuanto a las fuerzas generalizadas, solo hay una porque el número de coordenadas generalizadas es igual al número de grados de libertad. Como el sistema es conservativo, la fuerza generalizada asociada a la coordenada y_1 , Q_{y_1} , se puede hallar por medio de la **Ecuación (4.16)**:

$$Q_{y_1} = -\frac{\partial U}{\partial y_1} = (m_1 - m_2)g.$$

Actividad complementaria. Resolver el problema de la máquina de Atwood utilizando las ecuaciones de Lagrange con multiplicadores de Lagrange aplicando las **Ecuaciones (4.46)**. Obtener los multiplicadores de Lagrange y las fuerzas generalizadas de ligadura dadas por las **Ecuaciones (4.47)**.

Ejemplo 4.9

Hallar mediante el formalismo lagrangiano la ecuación de movimiento para una partícula oscilando libremente atada a un resorte de constante elástica k (ver **Figura 2.5**).

Solución.

El sistema tiene un grado de libertad, por lo tanto, se puede describir por medio de una coordenada generalizada. Sea x esta coordenada. La energía cinética de la masa es $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ y la energía potencial es $U = \frac{1}{2}kx^2$. El lagrangiano es:

$$L(x, \dot{x}; t) = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2. \quad (4.58)$$

Solo hay una ecuación de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0. \quad (4.59)$$

Reemplazando las derivadas se obtiene:

$$\begin{aligned} -kx - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) &= 0, \\ m\ddot{x} + kx &= 0, \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \end{aligned}$$

donde $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. De esta manera, se ha llegado a la misma ecuación de movimiento que se obtuvo en el **Capítulo 3**.





Ejemplo 4.10

Hallar a través del formalismo lagrangiano la ecuación de movimiento para el péndulo simple de longitud l (ver **Figura 3.1**).

Solución.

El sistema tiene un sólo grado de libertad. Por lo tanto, se requiere una coordenada generalizada para describirlo. Sea θ , el ángulo de oscilación, esta coordenada. Ubicando el origen del sistema coordenado $X - Y$ en el punto de suspensión de la cuerda, la posición de la partícula está dada por el punto (x, y) . Estas coordenadas no son independientes por la ecuación de la ligadura. En función de la coordenada generalizada están dadas por

$$\begin{aligned} x &= l \sin \theta, & y &= -l \cos \theta, \\ \dot{x} &= l \dot{\theta} \cos \theta, & \dot{y} &= l \dot{\theta} \sin \theta, \\ \dot{x}^2 &= l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta, & \dot{y}^2 &= l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Así,

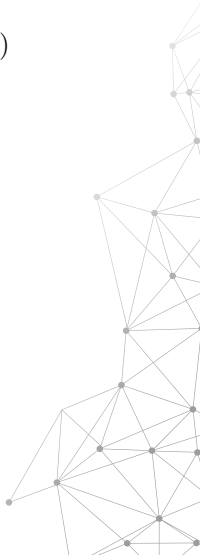
$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2, \\ &= l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta, \\ &= l^2 \dot{\theta}^2, \end{aligned}$$

por lo que el lagrangiano estará dado por

$$L = T - U = \frac{1}{2}mv^2 - mgy, \quad (4.60)$$

$$= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mg(-l \cos \theta), \quad (4.61)$$

$$= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta. \quad (4.62)$$





La ecuación de Lagrange es $\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right)$. Al hacer las derivadas se obtiene

$$-mgl \sin \theta - \frac{d}{dt}(ml^2 \dot{\theta}) = 0, \quad (4.63)$$

$$g \sin \theta + l \ddot{\theta} = 0, \quad (4.64)$$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0, \quad (4.65)$$

con $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$. Si se consideran oscilaciones pequeñas, tal que $\sin \theta \approx \theta$, se obtiene $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$, ecuación que también se obtuvo en el **Capítulo 3**.

Ejemplo 4.11

Disco que rueda sin deslizar sobre un plano inclinado. Considere un disco de masa M que rueda sin deslizarse sobre un plano inclinado como se muestra en la **Figura 4.5**. Usando el formalismo lagrangiano encuentre las ecuaciones de movimiento para la coordenada y del centro de masa del disco y para la coordenada angular θ .

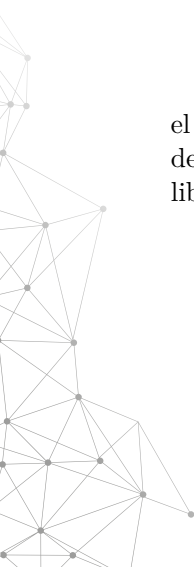
Solución.

Escribamos primero el lagrangiano asociado a este sistema. La energía cinética del disco consta de dos partes, una rotacional y otra de traslación del centro de masa, con lo que tenemos $T = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}^2$, y la energía potencial asociada al centro de masa del disco es $U = Mg(l - y) \sin \phi$, donde l es la longitud del plano inclinado. Así, el lagrangiano será:

$$L = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}^2 - Mg(l - y) \sin \phi. \quad (4.66)$$

Podemos hacer uso del hecho de que la distancia que recorre el disco sobre el plano inclinado está relacionada con la coordenada angular θ de rotación del disco mediante la siguiente expresión $y = r\theta$, para eliminar un grado de libertad y dejar el lagrangiano en términos de una sola variable así:

$$L = Mr^2\dot{\theta}^2 + Mgr\theta \sin \phi - Mgl \sin \phi. \quad (4.67)$$





El último término del lagrangiano es constante y no contribuye a las ecuaciones de Lagrange.

La ecuación de movimiento para la coordenada θ será:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 2Mr^2\ddot{\theta} - Mgr \sin \phi = 0, \quad (4.68)$$

de donde tenemos la ecuación de movimiento para la coordenada θ :

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{2r} \sin \phi. \quad (4.69)$$

Finalmente, para la coordenada del centro de masa, si usamos el hecho de que $\ddot{y} = r\ddot{\theta}$, tenemos:

$$\ddot{y} = \frac{g}{2} \sin \phi. \quad (4.70)$$

Ejemplo 4.12

Suponga que un bloque de masa m desliza sin fricción sobre un plano inclinado de masa M que, a su vez, resbala sin fricción sobre una superficie horizontal con aceleración constante (ver **Figura 4.6**). Obtener las ecuaciones de movimiento de este sistema por medio del formalismo lagrangiano y las fuerzas generalizadas.

Solución.

Observe que este problema es un caso especial del **Ejemplo 2.7**, resuelto a través del formalismo newtoniano. En primer lugar se determinará el número de grados de libertad para el sistema. Por una parte, el movimiento del plano inclinado se da en una dimensión. Si $\vec{R}$ es su vector posición, entonces, $\vec{R} = (X, Y, Z) = (X, 0, 0)$. Es decir, hay dos ligaduras: $Y = 0$ y $Z = 0$. Por otra parte, el movimiento del bloque m se da en dos dimensiones. Su vector posición



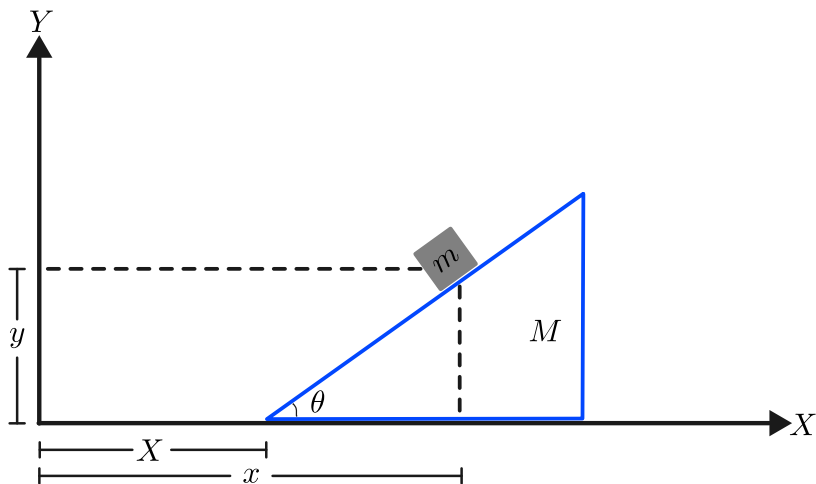


Figura 4.6: Bloque deslizando sobre plano inclinado con movimiento horizontal.

es $\vec{r} = (x, y, z) = (x, y, 0)$. Así, tenemos otra ligadura. Además las coordenadas x y y están relacionadas por la ligadura

$$\tan \theta = \frac{y}{x - X}.$$

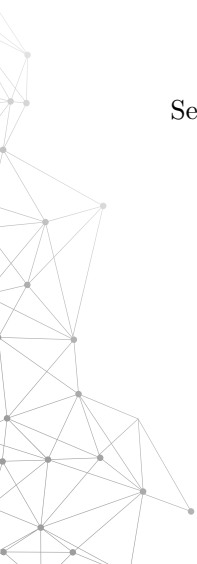
Por lo tanto, hay cuatro ligaduras:

$$\begin{aligned} Y &= 0, \\ Z &= 0, \\ z &= 0, \\ y &= (\tan \theta)(x - X). \end{aligned} \tag{4.71}$$

De esta manera, el número de grados de libertad es $3n - m = 3(2) - 4 = 2$. Seleccionaremos como coordenadas generalizadas a $\{q_1, q_2\} = \{x, X\}$.

El lagrangiano del sistema está dado por $L = T - U$:

$$L = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy.$$





Reemplazando a y y a $\dot{y} = (\tan \theta)(\dot{x} - \dot{X})$ en la expresión anterior se llega a:

$$L(x, X, \dot{x}, \dot{X}) = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m \left[(\sec^2 \theta)\dot{x}^2 + (\tan^2 \theta)\dot{X}^2 - 2(\tan^2 \theta)\dot{x}\dot{X} \right] - mg(\tan \theta)(x - X). \quad (4.72)$$

Las dos ecuaciones de Lagrange son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial X} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \right) &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Al realizar las derivadas que aparecen en las ecuaciones de Lagrange se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial X} &= mg \tan \theta, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} &= M\dot{X} + m(\tan^2 \theta)\dot{X} - m(\tan^2 \theta)\dot{x}, \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= -mg \tan \theta, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m(\sec^2 \theta)\dot{x} - m(\tan^2 \theta)\dot{X}. \end{aligned}$$

La sustitución de estas derivadas en las ecuaciones de Lagrange produce:

$$mg \tan \theta - M\ddot{X} - m(\tan^2 \theta)\ddot{X} + m(\tan^2 \theta)\ddot{x} = 0; \quad (4.73)$$

$$-mg \tan \theta - m(\sec^2 \theta)\ddot{x} + m(\tan^2 \theta)\ddot{X} = 0. \quad (4.74)$$

De la segunda ecuación se puede despejar a $\ddot{x}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (\sec^2 \theta)\ddot{x} &= (\tan^2 \theta)\ddot{X} - g \tan \theta, \\ \ddot{x} &= \frac{(\tan^2 \theta)\ddot{X} - g \tan \theta}{\sec^2 \theta}, \\ \ddot{x} &= (\sec^2 \theta)\ddot{X} - (\sec \theta)(\cos \theta)g. \end{aligned} \quad (4.75)$$





Sustituyendo a $\ddot{x}$ en la ecuación de Lagrange para X se llega a:

$$\begin{aligned} mg \tan \theta - M \ddot{X} - m(\tan^2 \theta) \ddot{X} + m(\tan^2 \theta) [(\sin^2 \theta) \ddot{X} - (\sin \theta)(\cos \theta)g] &= 0, \\ -\ddot{X} [M + m(\tan^2 \theta) - m(\tan^2 \theta)(\sin^2 \theta)] + mg \tan \theta - m(\tan^2 \theta)(\sin \theta)(\cos \theta)g &= 0, \\ -\ddot{X} [M + m(\tan^2 \theta)(1 - \sin^2 \theta)] + mg \tan \theta [1 - (\tan \theta)(\sin \theta)(\cos \theta)] &= 0, \\ -\ddot{X} [M + m \sin^2 \theta] + mg \tan \theta [1 - \sin^2 \theta] &= 0. \end{aligned}$$

Finalmente, la expresión para la aceleración del plano inclinado de masa M está dada por:

$$\ddot{X} = \left(\frac{m \sin \theta \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta} \right) g. \quad (4.76)$$

A continuación se reemplaza esta expresión en la **Ecuación (4.75)** para obtener la componente horizontal de la aceleración del bloque de masa m :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \sin^2 \theta \left[\frac{m \sin \theta \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta} \right] g - (\cos \theta)(\sin \theta)g, \\ \ddot{x} &= \frac{m(\sin^3 \theta)(\cos \theta) - (M + m \sin^2 \theta)(\cos \theta)(\sin \theta)}{M + m \sin^2 \theta} g. \end{aligned} \quad (4.77)$$

De esta manera se llega a:

$$\ddot{x} = - \left(\frac{M \cos \theta \sin \theta}{M + m \sin^2 \theta} \right) g. \quad (4.78)$$

Las fuerzas horizontales que actúan sobre el plano inclinado y el bloque son $M\ddot{X}$ y $m\ddot{x}$, respectivamente. Reemplazando a $\ddot{X}$ y $\ddot{x}$ por las **Ecuaciones (4.76)** y **(4.78)**, respectivamente, se verifica que

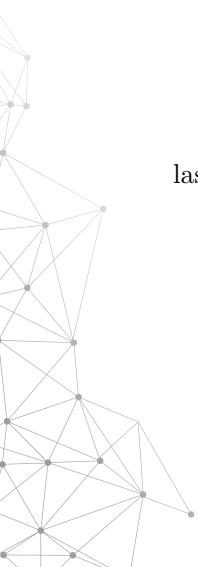
$$F_{\text{horizontal sobre el plano inclinado}} = -F_{\text{horizontal sobre el bloque}}.$$

Reemplazando a $\ddot{X}$ y $\ddot{x}$ en $\ddot{y} = (\tan \theta)(\ddot{x} - \ddot{X})$ obtenemos:

$$\ddot{y} = - \frac{(M + m) \sin^2 \theta}{M + m \sin^2 \theta} g. \quad (4.79)$$

La aceleración del bloque m está dada por $a_m = \sqrt{(\ddot{x} - \ddot{X})^2 + (\ddot{y})^2}$. Haciendo las sustituciones respectivas se obtiene:

$$a_m = \frac{(M + m) \sin \theta}{M + m \sin^2 \theta} g. \quad (4.80)$$





Las expresiones obtenidas para las aceleraciones $\ddot{X}$, $\ddot{x}$ y $\ddot{y}$ coinciden con los resultados presentados en el **Ejemplo 2.7**, considerando que la fuerza externa $\vec{F}$ es cero y que no hay fricción entre el bloque y el plano inclinado y entre la superficie horizontal y el plano inclinado.

La **Figura 4.7** muestra las aceleraciones obtenidas en función del ángulo del plano inclinado (θ). Se observa que $\ddot{X}$ y $\ddot{x}$ presentan un valor máximo y mínimo, respectivamente, que depende de los valores de las masas M y m .

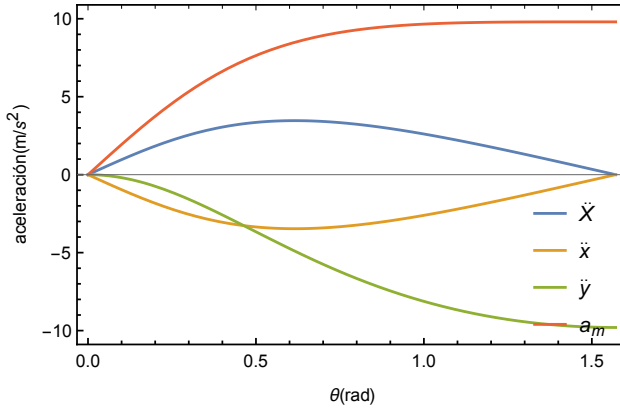
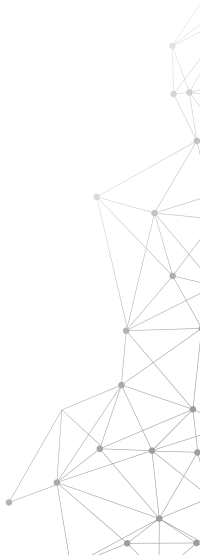


Figura 4.7: Aceleraciones $\ddot{X}$ (color azul), $\ddot{x}$ (color naranja), $\ddot{y}$ (color verde) y a_m (color ocre) en función del ángulo θ considerando $m = 1$ kg y $M = 1$ kg.

Teniendo en cuenta que el sistema es conservativo y que tiene dos grados de libertad, se concluye que hay dos fuerzas generalizadas:

$$Q_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -mg \tan \theta,$$

$$Q_X = -\frac{\partial U}{\partial X} = mg \tan \theta.$$





Ejercicio

4.11 Otro sistema de coordenadas que se puede utilizar para el bloque de masa m es uno donde el eje y sea perpendicular al plano inclinado y x este a lo largo del plano inclinado. Solucionar este problema utilizando este sistema de coordenadas para m .

Ejemplo 4.13

Una partícula de masa m sometida a la fuerza central $\vec{F} = -k\vec{r}$, donde r es la distancia entre la partícula y el origen, se mueve sobre la superficie de un cilindro de radio R (ver **Figura 4.8**). Describa el movimiento de esta partícula mediante el formalismo lagrangiano y obtenga las fuerzas generalizadas.

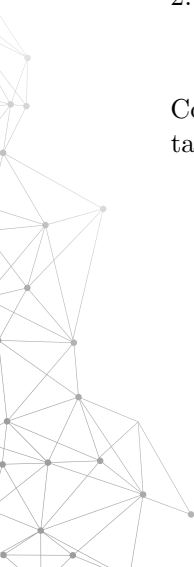
Solución.

Consideremos que la posición de la partícula esta dada por el vector $\vec{r} = (x, y, z)$. Como la partícula está obligada a moverse sobre la superficie del cilindro, se tiene la ligadura $x^2 + y^2 = R^2$.

Por lo tanto, el número de grados de libertad del sistema es $3n - m = 3(1) - 1 = 2$. Como coordenadas generalizadas se selecciona a $\{q_1, q_2\} = \{\theta, z\}$.

La energía cinética de la partícula es $T = (1/2)mv^2 = (1/2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$. Como $x = R \cos \theta$ y $y = R \sin \theta$, se tiene que $\dot{x} = -R\dot{\theta} \sin \theta$ y $\dot{y} = R\dot{\theta} \cos \theta$ de tal forma que $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = R^2\dot{\theta}^2$. Así la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2).$$



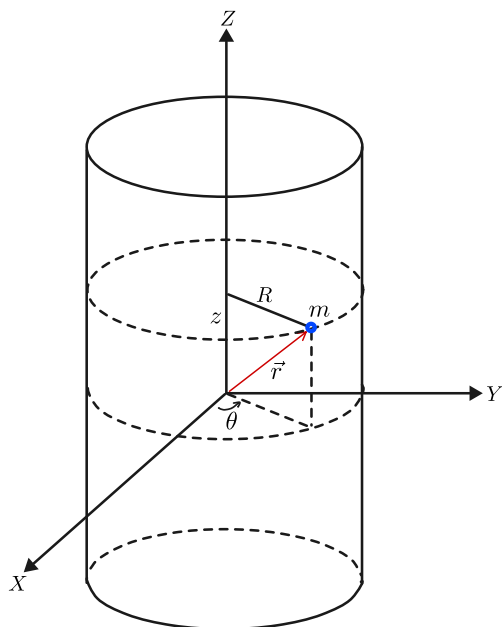
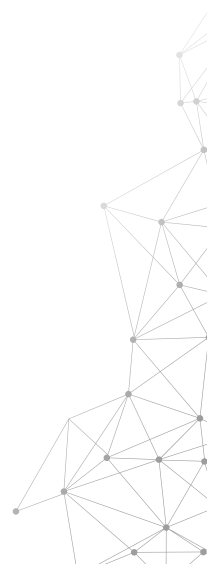


Figura 4.8: Masa deslizando sobre la superficie de un cilindro

Por otra parte, la energía potencial es

$$\begin{aligned}
 U &= - \int F dr \\
 &= - \int (-kr) dr \\
 &= \frac{1}{2} kr^2 \\
 &= \frac{1}{2} k(x^2 + y^2 + z^2) \\
 &= \frac{1}{2} k(R^2 + z^2) \\
 &= \frac{1}{2} kz^2 + \frac{1}{2} kR^2.
 \end{aligned}$$





Así, el lagrangiano $L = T - U$ resultante será:

$$L(\theta, z, \dot{\theta}, \dot{z}) = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}k(R^2 + z^2); \quad (4.81)$$

y las ecuaciones de Lagrange son

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0; \quad (4.82)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = 0. \quad (4.83)$$

Al efectuar estas derivadas se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= mR^2\dot{\theta}; \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= -kz; \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= m\dot{z}. \end{aligned} \quad (4.84)$$

De la primera derivada se concluye que la coordenada θ es cíclica. Por lo tanto, de la ecuación de Lagrange para θ se obtiene

$$\frac{d}{dt} (mR^2\dot{\theta}) = 0,$$

lo cual indica que el momento asociado a θ es constante:

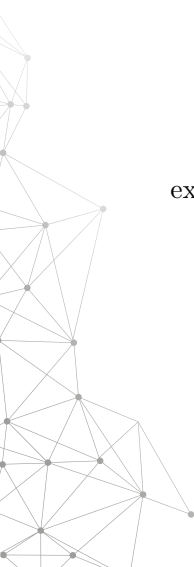
$$mR^2\dot{\theta} = \text{constante} = p_{\theta}. \quad (4.85)$$

Por otra parte, de la ecuación de Lagrange para z se llega a:

$$-kz - m\ddot{z} = 0,$$

expresión que es equivalente a

$$\ddot{z} + (k/m)z = 0, \quad (4.86)$$





concluyéndose que la partícula se mueve en la dirección z con movimiento armónico simple con frecuencia $\omega_0^2 = k/m$.

En cuanto a las fuerzas generalizadas, el sistema tiene dos:

$$Q_\theta = -\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0,$$

lo que confirma que la coordenada generalizada asociada a una coordenada cíclica es cero; y

$$Q_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -kz.$$

Ejemplo 4.14

En la parte más alta de medio cascarón esférico se encuentra una partícula de masa m . Si la partícula desciende, encuentre el ángulo o la altura para la cual se desprenderá de la superficie (este problema se resolvió en el **Capítulo 2** a través del formalismo newtoniano).

Solución.

Este problema se resolverá mediante el uso de las ecuaciones de Lagrange con *multiplicadores de Lagrange*.

Utilizando coordenadas polares, las energías cinética y potencial se escriben así:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2), \quad (4.87)$$

$$U = mgr \cos \theta, \quad (4.88)$$

Por lo que el lagrangiano para la partícula sera:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr \cos \theta. \quad (4.89)$$



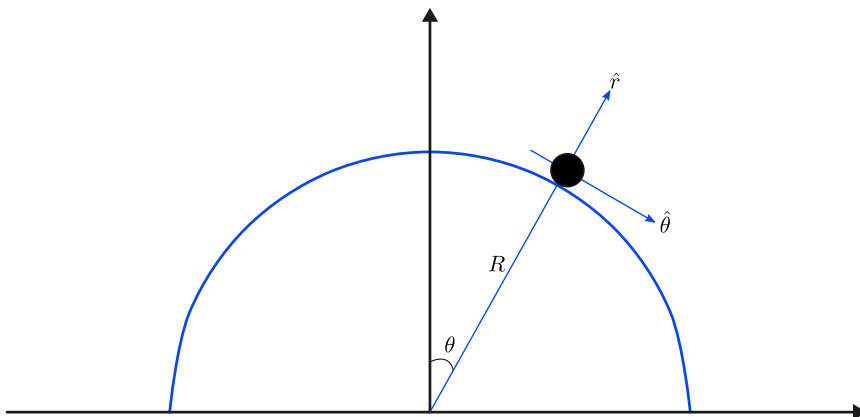


Figura 4.9: Partícula deslizándose sobre medio cascarón esférico .

Ya que la partícula se encuentra restringida a moverse sobre la superficie, se cumple que $r = cte = R$; la ligadura se puede expresar como:

$$g(r, \theta) = r - R = 0, \quad (4.90)$$

de donde

$$\frac{dg}{dr} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{dg}{d\theta} = 0. \quad (4.91)$$

Utilizando la ecuación de Lagrange para r con el multiplicador de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{dr} \right) - \frac{dL}{dr} - \lambda \frac{dg}{dr} = 0, \quad (4.92)$$

se obtiene

$$m\ddot{r} - (mr\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta) - \lambda = 0; \quad (4.93)$$

y de la ecuación de Lagrange para θ con el multiplicador de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\theta}} \right) - \frac{dL}{d\theta} - \lambda \frac{dg}{d\theta} = 0. \quad (4.94)$$

se llega a

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{\theta}\dot{r} - mgr \sin \theta = 0. \quad (4.95)$$





De acuerdo con la ligadura, $\frac{dr}{dt} = \dot{r} = 0$, las **Ecuaciones (4.93) y (4.95)** se transforman en:

$$mg \cos \theta - mr\dot{\theta}^2 = \lambda \quad (4.96)$$

y

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{r} \sin \theta, \quad (4.97)$$

de donde se observa que la aceleración angular es independiente de m .

Derivando **(4.96)** se obtiene

$$\frac{d\lambda}{dt} = -mg\dot{\theta} \sin \theta - 2mr\dot{\theta}\ddot{\theta}. \quad (4.98)$$

Reemplazando **(4.97)** en **(4.98)**

$$\frac{d\lambda}{dt} = -3mg\dot{\theta} \sin \theta = \frac{d}{dt}(3mg \cos \theta), \quad (4.99)$$

o

$$\lambda = 3mg \cos \theta + C. \quad (4.100)$$

Así, las fuerzas de ligadura en las coordenadas generalizadas se obtienen a partir de:

$$\begin{aligned} \lambda \frac{dg}{d\theta} &= 0 && \text{fuerza generalizada de ligadura en } \theta, \\ \lambda \frac{dg}{dr} &= \lambda && \text{fuerza generalizada de ligadura en } r. \end{aligned} \quad (4.101)$$

Ahora, en la parte más alta de la superficie se tiene que $\lambda = mg$ (= peso), por lo que de la **Ecuación (4.100)** se obtiene el valor de la constante, $C = -2mg$. Así, la fuerza normal de la superficie sobre la partícula será

$$\lambda = mg(3 \cos \theta - 2). \quad (4.102)$$

Finalmente, cuando la partícula se separe de la superficie, la fuerza normal será cero, por lo que se puede obtener el ángulo para esta condición cuando $\lambda = 0$,





$$\cos \theta_0 = \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad \theta_0 \approx 48,19^\circ. \quad (4.103)$$

Este resultado también se obtuvo en el Capítulo 2 (ver **Ecuación (2.44)**).

Ejercicios

4.12 Demostrar que la aceleración horizontal $\ddot{X}$ del plano inclinado, dada por la **Ecuación (4.76)**, en el **Ejemplo 4.12**, es máxima cuando

$$\theta = \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\frac{m}{m+2M} \right) \quad \text{o} \quad \theta = \tan^{-1} \left[\left(\frac{M}{M+m} \right)^{1/2} \right].$$

Considere los casos $M = m$, $M = 2m$, $M \gg m$ y $m \gg M$.

De igual manera, obtener el ángulo que hace mínima la aceleración horizontal $\ddot{x}$, dada por la **Ecuación (4.78)**.

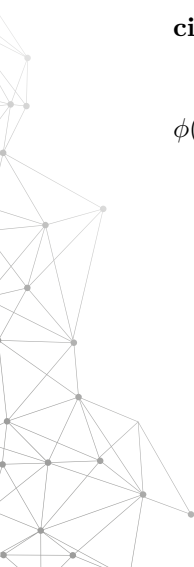
4.13 Resolver mediante el formalismo lagrangiano el péndulo doble (**Figura 4.3**). Asuma que las longitudes de las cuerdas son iguales ($l_1 = l_2 = l$) y que la masa del primer péndulo es mucho mayor que la masa del segundo péndulo ($m_1 \gg m_2$). ¿Qué se concluye en este caso?

4.14 Resolver mediante el formalismo lagrangiano la máquina de Atwood doble (**Figura 4.2**). Obtenga las fuerzas generalizadas por medio de las **Ecuaciones (4.8)** y **(4.16)**.

4.15 Revisar las demostraciones presentadas sobre lagrangianos en la **Sección 1.10** correspondiente a la derivada total de una función en el **Capítulo 1**.

4.16 Partiendo de la fuerza de Lorentz en términos del potencial escalar $\phi(\vec{r}, t)$ y el potencial vector $\vec{A}(\vec{r}, t)$:

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) = q \left(-\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right),$$





obtener el lagrangiano para una partícula cargada en un campo electromagnético: $L = T - q\phi + (q/c)\vec{A} \cdot \vec{v}$.

4.17 Resolver, mediante el formalismo lagrangiano, el sistema conformado por dos masas atadas por una cuerda y ubicadas cada una de ellas en un plano inclinado (ver **Ejemplo 2.1**).

4.18 Extensión al **Ejemplo 4.11**. Considere un disco que rueda sin fricción sobre un plano inclinado de masa M que desliza sobre una superficie horizontal. **(a)** Obtener las ecuaciones de movimiento de este sistema por medio del formalismo lagrangiano y las fuerzas generalizadas; **(b)** Resolver el problema por medio de las ecuaciones de Lagrange con multiplicadores de Lagrange (**Ecuaciones (4.46)**) y obtener las fuerzas de ligadura y los fuerzas generalizadas de ligadura.

En el **Ejemplo 4.12** se aborda el mismo problema cambiando el disco por un bloque. Otra variación que se puede plantear a este problema es cambiar el disco por un aro (ver **Ejemplo 4.4**).

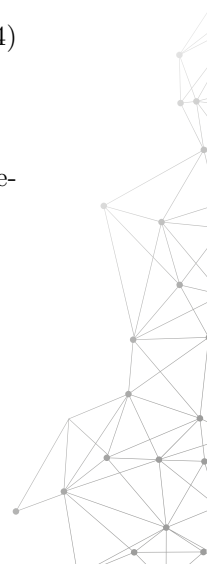
4.6. Algunas propiedades de las ecuaciones de Lagrange

Propiedad 1. Si L es el lagrangiano para un sistema de n grados de libertad que satisface las ecuaciones de Lagrange y $F = F(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ es una función arbitraria, pero derivable, entonces

$$L' = L + \frac{dF}{dt}, \quad (4.104)$$

también cumple las ecuaciones de Lagrange.

A continuación se mostrará esta propiedad a través de dos caminos diferentes.





Procedimiento 1. Se mostrará que L' satisface el principio de Hamilton. Integrando entre t_1 y t_2 a $L' = L + \frac{dF}{dt}$ se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} L' dt &= \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF(q_i, t)}{dt} dt, \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L dt + F(q_i, t)|_{t_1}^{t_2}, \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L dt + F(q_i(t_2), t_2) - F(q_i(t_1), t_1).\end{aligned}$$

Ahora, tomamos la variación de esta integral:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L' dt = \underbrace{\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt}_{=0 \text{ por el principio de Hamilton}} + \underbrace{\delta [F(q_i(t_2), t_2) - F(q_i(t_1), t_1)]}_{=0 \text{ porque no varía}}.$$

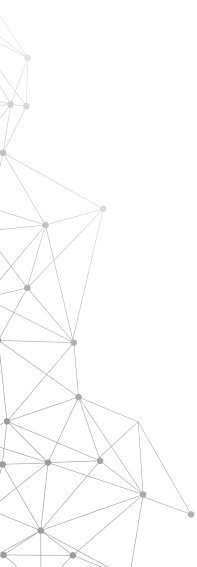
Así,

$$\int_{t_1}^{t_2} L' dt = 0,$$

mostrándose que L' satisface el principio de Hamilton y, por lo tanto, cumple con las ecuaciones de Lagrange.

Procedimiento 2. Se mostrará directamente que L' satisface las ecuaciones de Lagrange.

$$\begin{aligned}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{dF}{dt} \right), \\ \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial F}{\partial q_i} + 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \right), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{dF}{dt} \right).\end{aligned}\tag{4.105}$$





Por otra parte,

$$\frac{\partial L'}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{dF}{dt} \right). \quad (4.106)$$

A partir de las **Ecuaciones (4.105) y (4.106)** se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \frac{\partial L}{\partial q_i} + \cancel{\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{dF}{dt} \right)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \cancel{\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{dF}{dt} \right)} \\ \frac{\partial L'}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial L'}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0.$$

Ejemplo 4.15

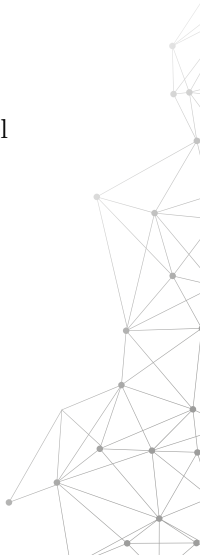
El campo electromagnético es invariante bajo la siguiente transformación gauge de los potenciales escalar $\phi(\vec{r}, t)$ y vector $\vec{A}(\vec{r}, t)$:

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t}, \\ \vec{A}' &= \vec{A} + \nabla \psi(\vec{r}, t); \end{aligned}$$

donde $\psi(\vec{r}, t)$ es una función arbitraria derivable. El lagrangiano de una partícula que se mueve en un campo electromagnético está dado por la expresión:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + \frac{q}{c}\vec{A} \cdot \vec{v}.$$

Demostrar que al utilizar la transformación gauge de los potenciales, el nuevo lagrangiano L' también satisface las ecuaciones de Lagrange.





Solución.

La demostración se desarrollará utilizando el enunciado de la Propiedad 1 de las ecuaciones de Lagrange.

$$\begin{aligned}
 L' &= \frac{1}{2}mv^2 - q\phi' + \frac{q}{c}\vec{A}' \cdot \vec{v}, \\
 L' &= \frac{1}{2}mv^2 - q\left(\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\psi(\vec{r}, t)}{\partial t}\right) + \frac{q}{c}\left(\vec{A} + \nabla\psi(\vec{r}, t)\right) \cdot \vec{v}, \\
 L' &= \underbrace{\frac{1}{2}mv^2 - q\phi + \frac{q}{c}\vec{A} \cdot \vec{v}}_L + \frac{q}{c}\frac{\partial\psi(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{q}{c}\nabla\psi(\vec{r}, t) \cdot \vec{v}, \\
 L' &= L + \frac{q}{c}\left(\nabla\psi(\vec{r}, t) \cdot \vec{v} + \frac{\partial\psi(\vec{r}, t)}{\partial t}\right), \\
 L' &= L + \frac{q}{c}\frac{d\psi}{dt}, \\
 L' &= L + \frac{d}{dt}\left(\frac{q}{c}\psi\right). \tag{4.107}
 \end{aligned}$$

Así, $L' = L + \frac{dF}{dt}$, con $F = \frac{q}{c}\psi$. Por lo tanto, L y L' satisfacen las ecuaciones de Lagrange según lo planteado en la Propiedad 1.

Propiedad 2. La forma de las ecuaciones de Lagrange es *invariante* bajo una transformación puntual entre coordenadas generalizadas que describan el sistema.

Sea $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ un conjunto de coordenadas generalizadas que describen un sistema de n grados de libertad y sea $L(q_i, \dot{q}_i; t)$, $i = 1, \dots, n$, el lagrangiano del sistema. Consideremos otro conjunto de coordenadas independientes $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ relacionadas con las $\{q_i\}$ mediante las ecuaciones de transformación

$$q_i = q_i(s_1, s_2, \dots, s_n, t), \quad i = 1, \dots, n.$$

La anterior transformación es puntual. Demostrar que si se expresa la lagrangiana en función de las coordenadas $\{s_k, \dot{s}_k, t\}$ mediante las ecuaciones de transformación, entonces, L satisface las ecuaciones de Lagrange con respecto





a las coordenadas $\{s_k\}$, esto es

$$\frac{\partial L}{\partial s_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_k} \right) = 0.$$

A continuación se demostrará esta propiedad de invarianza de la forma de las ecuaciones de Lagrange. Aplicando regla de la cadena a $L(q_i(s_k), \dot{q}_i(s_k, \dot{s}_k), t)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial s_k} &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial s_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial s_k} + \frac{\partial L}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial s_k}, \\ \frac{\partial L}{\partial s_k} &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial s_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial s_k}; \end{aligned} \quad (4.108)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_k} &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \dot{s}_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{s}_k} + \frac{\partial L}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \dot{s}_k}, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_k} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{s}_k}, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_k} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \dot{s}_k}, \end{aligned} \quad (4.109)$$

ya que $\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{s}_k} = \frac{\partial q_i}{\partial s_k}$.

Derivando respecto al tiempo a la **Ecuación (4.109)**:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_k} \right) &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \dot{s}_k} \right], \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_k} \right) &= \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \frac{\partial q_i}{\partial \dot{s}_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_i}{\partial \dot{s}_k} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.110)$$





A partir de las **Ecuaciones (4.108) y (4.110)** se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial s_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_k} \right) &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial s_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial s_k} - \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \frac{\partial q_i}{\partial s_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_i}{\partial s_k} \right) \right], \\ \frac{\partial L}{\partial s_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_k} \right) &= \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right]}_{=0} \frac{\partial q_i}{\partial s_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial s_k} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left[\frac{\partial}{\partial s_k} \left(\frac{dq_i}{dt} \right) \right], \\ \frac{\partial L}{\partial s_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_k} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial s_k} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial s_k} = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial L}{\partial s_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_k} \right) = 0.$$

4.7. Actividades complementarias

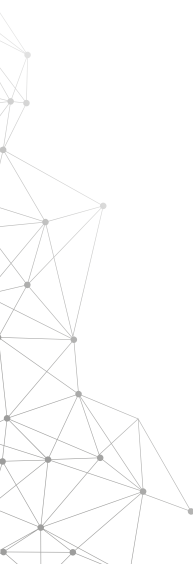
1. Consultar acerca del *lema fundamental* del cálculo de variaciones. Asumiendo que $\eta(x)$ es una función arbitraria y continua hasta la segunda derivada, y si

$$\int_a^b M(x)\eta(x)dx = 0,$$

entonces, $M(x) = 0$, en el intervalo (a, b) .

2. La máquina de Atwood es un sistema físico sobre el cual se pueden estudiar diversas generalizaciones o variaciones como, por ejemplo, considerar la masa de la cuerda o de la polea, la fricción de la polea, la rotación de la polea, entre otras. Las siguientes referencias trabajan algunas de estas extensiones:

- Lemos NA. Atwood's machine with a massive string. *Eur J Phys.* 2017; 38.
- Sánchez RS. Simulación de la máquina de Atwood para estudiantes de Física, *Lat. Am J Phys Educ.* 2016; 10(2).



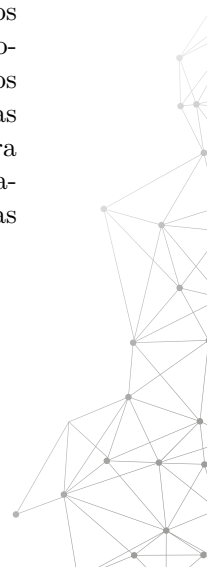


- Tarnopolski M. On Atwood's Machine with a Nonzero *Mass String*, *Phys. Phys Teac*
- Lucatto B, Caprecci MB, Gonçalves JVA, Sismanoglu BN. Máquina de Atwood com massa variável em movimento oscilatório atípico. *Rev Bras Ens Fis.* 2014; 36(2).
- Mehdi JM. Introduction of Atwood's machines as Series and Parallel networks, *Lat. Am J Phys Educ.* 2011; 5(2).
- Martell EC, Martell VB. The Effect of Friction in Pulleys on the Tension in Cables and Strings. *The Physics Teacher.* 2013; 51.
- Coelho RL. The compound Atwood machine problem, *Phys. Phys Educ.* 2017; 52.
- Coelho RL. Decomposition of the compound Atwood machine. *Eur J Phys.* 2017; 38.

3. En las siguientes referencias se estudian las oscilaciones amortiguadas mediante el formalismo lagrangiano:

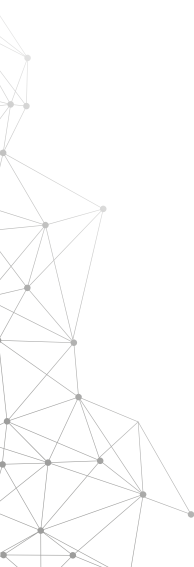
- Denman HH. On Linear Friction in Lagrange's Equation. *Am J Phys.* 1966; 34.
- Sarlet W. Invariance and conservation laws for Lagrangian systems with one degree of freedom. *J Math Phys.* 1978; 19.
- Galley CR. Classical Mechanics of Nonconservative Systems. *Phys Rev Lett.* 2013; 110.

4. En este capítulo se obtuvieron las ecuaciones de Lagrange a través de dos caminos: por medio del principio de Hamilton (utilizando cálculo variacional) y mediante el principio de D'Alembert (considerando desplazamientos virtuales). Sin embargo, en la literatura hay otros métodos para obtener las mencionadas ecuaciones. Algunos de ellos utilizan cálculo vectorial, álgebra lineal, geometría diferencial o cálculo tensorial y facilitan una interpretación geométrica de las ecuaciones de Lagrange. Las siguientes referencias muestran algunos métodos alternativos para obtener estas ecuaciones:





- Beers BL. Geometric Nature of Lagrange's Equations. *Am J Phys.* 1972; 40.
 - Casey J. Geometrical derivation of Lagrange's equations for a system of particles. *Am J Phys.* 1994; 62(9).
 - Hanc J, Taylor EF, Tuleja S. Deriving Lagrange's equations using elementary calculus. *Am J Phys.* 2004; 72(4).
 - Curiel E. The Geometry of the Euler-Lagrange Equation. Unpublished manuscript [internet]; 2010 [citado el 29 de septiembre de 2022]. Disponible en: <http://strangebeautiful.com/papers/curiel-geom-ele.pdf>
 - Guerrero J, Muñoz JH. Revisiting the Newton's second law and Lagrange's equations in orthogonal curvilinear coordinates: some remarks, *working paper.* 2020.
5. En las siguientes referencias se revisan tópicos más avanzados del formalismo lagrangiano, relacionados con fuerzas de ligadura en sistemas holónomos, simetrías, invarianzas y potenciales generalizados:
- Lemos NA. Forces of constraint in the holonomic case. *Rev Bras Ens Fís.* 2004; 26(3): 283–6.
En esta referencia, el autor propone un método para obtener las fuerzas de ligadura usando las ecuaciones de Lagrange pero sin emplear los multiplicadores de Lagrange.
 - Torres del Castillo GF, Andrade-Mirón C, Bravo-Rojas RI. Variational symmetries of Lagrangians. *Rev Mex Fis E.* 2013; 59.
En este artículo se obtiene una derivación sencilla de la ecuación para los generadores infinitesimales de simetrías variacionales del lagrangiano de un sistema con número finito de grados de libertad.
 - Lima W, Ferreira de Oliveira PH, Braga M, Ramos O. Determination of constraint forces in holonomic classical systems: critical analysis of the three methods. *Rev Bras Ens Fis.* 2019; 41(1).
En este trabajo se estudian tres formalismos (el newtoniano, el lagrangiano y uno desarrollado por Nivaldo Lemos) para calcular las fuerzas de ligadura en sistemas holónomos.





- De la Peña L, Cetto AM, Valdés-Hernández A. Power and beauty of the Lagrange equations. *Rev Mex Fís E*. 2020; 17(1): 47–54.

Es un excelente artículo para reforzar los temas estudiados en el presente capítulo. Resalta dos razones para considerar a las ecuaciones de Lagrange como una descripción fundamental de la dinámica de partículas clásicas. Una de ellas es que las ecuaciones de Lagrange preservan su forma en cualquier sistema coordenado (ver Propiedad 2 de las ecuaciones de Lagrange). Usa algunas herramientas matemáticas de la geometría diferencial como el tensor métrico y el símbolo de Christoffel.

- Benedetto E. Generalized potential for apparent forces: the Coriolis effect. *Eur J Phys*. 2020; 41(4).

En este trabajo se presenta un análisis matemático a potenciales generalizados asociados a fuerzas como la de Coriolis y de arrastre, a partir de una analogía con la fuerza de Lorentz.

6. En la siguiente referencia se estudia el movimiento de un cuerpo que rueda y desliza con fricción sobre un hemisferio (ver **Ejemplo 4.14**):

- Souza DC, Coluci VR. The motion of a ball moving down a circular path. *Am J Phys*. 2017; 85.

En el artículo se describe un aparato para determinar el ángulo a partir del cual el cuerpo se despega de la trayectoria circular. Así, es un trabajo en el cual se verifica experimentalmente un problema ideal que aparece en los libros de texto.

