



Capítulo

5

Dos cuerpos sometidos a una fuerza central

En este capítulo se presenta una breve introducción, mediante el formalismo lagrangiano, al problema de dos cuerpos que interactúan bajo la acción de una fuerza central, es decir, una fuerza dirigida a lo largo de la línea que une los centros de los dos cuerpos y dependiente solo de la distancia entre ellos. Este tema es de bastante aplicación en el movimiento de cuerpos celestes y en la dispersión de partículas por campos de fuerzas centrales.

5.1. Reducción al problema equivalente de un cuerpo.

Consideremos un sistema *monógeno* conformado por dos partículas de masas m_1 y m_2 sometidas a una fuerza de carácter central, es decir, que depende solo de la distancia r entre las partículas y va dirigida a lo largo de la línea que las une: $\vec{F} = f(r)\hat{e}_r$. En este caso, el potencial de interacción es $U = U(\vec{r})$, donde $\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ (vector posición relativa entre las dos partículas).

El número de grados de libertad de este sistema es $3n - m = 3(2) - 0 = 6$. Es decir, se requieren seis coordenadas generalizadas. Podemos escoger como coordenadas generalizadas a $\{q_i\} = \{\vec{r}_2, \vec{r}_1\}; \{\vec{r}_2, \vec{r}_1\}; \{\vec{R}, \vec{r}\}$, donde $\vec{R}$ es el





vector posición del centro de masa y $\vec{r}$ el vector posición relativa (Ver **Figura 5.1**). En este problema es conveniente seleccionar como coordenadas generalizadas a $\vec{R}$ y $\vec{r}$.

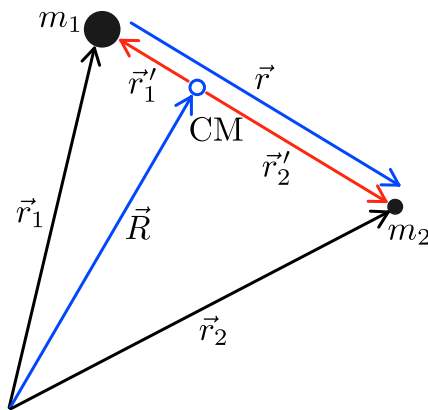


Figura 5.1: Dos masas sometidas a una fuerza central.

Nota. El vector posición relativa entre las dos partículas es *invariante*, es decir, $\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \equiv \vec{r}'_2 - \vec{r}'_1$ (el sistema primado tiene el origen en el centro de masa del sistema(CM)).

Aplicando la definición del vector posición del centro de masa, en el centro de masa del sistema, se obtiene: $m_1 \vec{r}'_1 + m_2 \vec{r}'_2 \equiv M \vec{R}' = 0$ de tal forma que $\vec{r}'_2 = -\frac{m_1}{m_2} \vec{r}'_1$. Este resultado se introduce en la ecuación $\vec{r} = \vec{r}'_2 - \vec{r}'_1$ para despejar a $\vec{r}'_1$ y $\vec{r}'_2$ en función de $\vec{r}$:

$$\begin{aligned} \vec{r}'_1 &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \\ \vec{r}'_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Observe que si se considerara $\vec{r} \equiv \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2$, las expresiones anteriores tendrían signos contrarios.





El lagrangiano en función de las coordenadas generalizadas $\vec{R}$ (vector posición del centro de masa) y $\vec{r}$ (vector posición relativa), $L = L(\vec{R}, \vec{r}, \dot{\vec{R}}, \dot{\vec{r}}; t) = T - U = T_{CM} + T' - U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \dots)$, está dado por:

$$L = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2'^2 - U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \dots),$$

donde $M = m_1 + m_2$ es la masa total del sistema. Derivando respecto al tiempo a las **Ecuaciones (5.1)** y sustituyéndolas en la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}), \\ L &= \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}), \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde $\mu \equiv \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ se llama *masa reducida* (equivalentemente $\frac{1}{\mu} \equiv \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$) y se ha considerado que $U = U(\vec{r})$, es decir, en el sistema solo actúan *fuerzas centrales conservativas*.

Ejercicio

5.1 Obtenga la masa reducida en los siguientes casos: **(1)** $m_1 = m_2$; **(2)** $m_1 \gg m_2$, ¿cuál sería, aproximadamente, la posición del centro de masa? **(3)** átomo de hidrógeno; **(4)** sistema sol-tierra.

Vale la pena resaltar que el lagrangiano dado por la **Ecuación (5.2)** se puede ver como la suma de dos lagrangianos, $L = L_1 + L_2$, asociados a movimientos diferentes, donde $L_1 = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2$ corresponde al movimiento de una partícula libre de masa M y $L_2 = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r})$, está asociado al movimiento de una partícula de masa μ ubicada a la distancia r del centro de fuerzas y sometida al potencial central $U(\vec{r})$.

Por otra parte, se observa que en el lagrangiano dado por la **Ecuación (5.2)**, $\vec{R}$ es coordenada *cíclica*, por lo tanto, $M\dot{\vec{R}} = cte$, es decir, el momento





lineal del centro de masa se conserva (este hecho está asociado a la simetría traslacional del sistema). De igual forma, se concluye que el centro de masa está en reposo o se mueve uniformemente. Además, las ecuaciones de Lagrange para $\vec{r}$ no contienen a $\vec{R}$ o $\dot{\vec{R}}$. Por lo tanto, se puede trabajar de manera independiente el lagrangiano asociado al movimiento de la masa μ :

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}; t) = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}). \quad (5.3)$$

Según la **Ecuación (5.3)** el problema de los dos cuerpos de masas m_1 y m_2 separados una distancia r e interactuando por medio de una fuerza central se ha *reducido* al problema de un solo cuerpo de masa reducida μ ubicado a una distancia r del centro de fuerzas.

5.2. Ecuaciones del movimiento.

El problema anterior tiene *simetría esférica* (es invariante ante rotaciones), por lo tanto, *el momento angular ($\vec{L}$) total se conserva*. Otra manera de llegar a este resultado es la siguiente: El torque o momento de fuerza ($\vec{N}$) del sistema es $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (f(r)\hat{e}_r) = \frac{f(r)}{r} \vec{r} \times \vec{r} = 0$. Es decir, $\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, por lo tanto, $\vec{L} = \text{constante}$. Esto quiere decir que $\vec{r}$ es siempre perpendicular a la dirección fija del momento angular $\vec{L}$. La única opción para que se cumpla esto es que el movimiento se de en un plano.

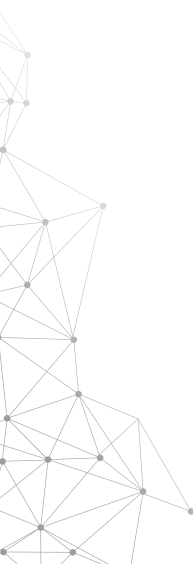
De acuerdo con lo anterior, se concluye que el movimiento de la masa μ sometida al potencial $U = U(r)$ se da en un *plano*.

El lagrangiano para la masa μ en coordenadas *polares* es:

$$L = T - U(r) = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r). \quad (5.4)$$

Las dos ecuaciones de Lagrange son:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0, \quad (5.5)$$





$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = 0. \quad (5.6)$$

Se observa que θ es *cíclica* porque no aparece explícitamente en el lagrangiano. Por lo tanto, a partir de la ecuación de Lagrange para la coordenada θ (ver **Ecuación (5.5)**) se obtiene que $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{constante}$. Esta cantidad es la magnitud del momento cinético (o angular):

$$l = \mu r^2 \dot{\theta} \equiv \text{constante}. \quad (5.7)$$

Velocidad areolar. De $l = \mu r^2 \dot{\theta} \equiv \text{constante}$ se concluye que el factor $r^2 \dot{\theta}$ también es constante. Y si se multiplica este término por $\frac{1}{2}$, se continúa obteniendo una constante. Así:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \right) &= 0, \\ \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} &= \text{constante} \equiv A. \end{aligned}$$

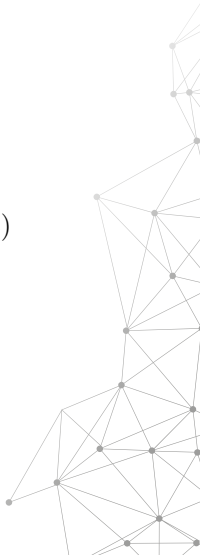
La velocidad areolar A (área barrida por el vector de posición por unidad de tiempo) es constante. Este resultado es equivalente a la *segunda ley de Kepler*: el radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales.

Por otra parte, de la ecuación de Lagrange para la coordenada r (ver **Ecuación (5.6)**) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mu r \dot{\theta}^2 - \frac{dU}{dr} - \mu \ddot{r} &= 0, \\ \mu \ddot{r} &= \mu r \dot{\theta}^2 - \frac{dU}{dr}; \end{aligned}$$

como $\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}$, se llega a la siguiente expresión:

$$\mu \ddot{r} = \frac{l^2}{\mu r^3} + f(r) \equiv f_{ef}, \quad (5.8)$$





donde f_{ef} es una fuerza *efectiva* dada por la suma de la fuerza *central* $f(r) = -\frac{dU}{dr}$ con la fuerza *centrífuga* $f_{\text{centrífuga}} = \frac{l^2}{\mu r^3}$, la cual proviene del potencial centrífugo $U_{\text{centrífugo}} = \frac{l^2}{2\mu r^2}$. Así,

$$f_{\text{ef}} = f_{\text{central}} + f_{\text{centrífuga}} = -\frac{dU_{\text{ef}}}{dr} \quad \text{con} \quad U_{\text{ef}} = U_{\text{central}} + U_{\text{centrífugo}}.$$

Observe que si la fuerza efectiva es cero, entonces, $\ddot{r} = 0$, de donde se concluye que $\frac{d(\dot{r})}{dt} = 0$, es decir, $\dot{r}$ es constante. Además, cuando la fuerza efectiva es cero, la fuerza central es igual a menos la fuerza centrífuga. Esto es: si $f_{\text{ef}} = 0$, entonces, $f(r) = -f_{\text{centrífuga}} = -\frac{l^2}{\mu r^3}$ (este resultado se utilizará cuando se estudien las condiciones para órbitas cerradas). Por otra parte, en los valores de r donde la $f_{\text{ef}} = 0$, la curva U_{ef} vs r presenta un máximo o un mínimo ya que f_{ef} es la pendiente de esta gráfica.

A continuación se mostrará que la ecuación de Lagrange para r (ver **Ecuación (5.8)**) conduce a otra constante de movimiento:

$$\begin{aligned} \mu \dot{r} \ddot{r} &= -\frac{d}{dr} \left(U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} \right) \dot{r}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 \right) &= -\frac{d}{dt} \left(U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} \right), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U \right) &= 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Esta última expresión indica que la cantidad que está dentro del paréntesis es constante. Esta cantidad es precisamente la *Energía Total* E :

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U(r) = \frac{1}{2} \mu \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + U(r) = \text{constante}. \quad (5.10)$$

Los dos primeros términos de E corresponden a la energía cinética en coordenadas polares.





A manera de conclusión, se resalta que la ecuación de Lagrange para la coordenada θ conduce a la *conservación del momento angular* l y la ecuación de Lagrange para la coordenada r conduce a la *conservación de la energía total* E .

Finalmente, podemos hallar de la **Ecuación (5.10)** a $r = r(t)$ y de la **Ecuación (5.7)** a $\theta = \theta(t)$:

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - U(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}}, \quad (5.11)$$

$$\theta = \frac{l}{\mu} \int_0^t \frac{dt}{r^2(t)} + \theta_0. \quad (5.12)$$

Así, el problema se ha reducido a cuadraturas con cuatro constantes de integración: E , l , r_0 y θ_0 .

5.3. Clasificación de las órbitas.

A partir de la expresión para E y de la ecuación de Lagrange para r se obtiene:

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \left[\frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U(r) \right] \equiv \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U_{\text{ef}}, \quad (5.13)$$

$$\mu \ddot{r} = \frac{l^2}{\mu r^3} + f(r) \equiv f_{\text{ef}}(r), \quad (5.14)$$

donde U_{ef} es el *potencial efectivo* que cumple con $f_{\text{ef}} = -\frac{dU_{\text{ef}}}{dr}$. Así, f_{ef} es una fuerza efectiva radial dada por la suma de la fuerza central ($= -\frac{dU}{dr}$) con una fuerza centrífuga ($= \frac{l^2}{\mu r^3}$). Esta fuerza centrífuga es una fuerza ficticia que surge por estar utilizando un sistema de referencia no inercial con origen en una de las partículas (que se encuentra acelerada).

Es posible analizar *cualitativamente* el problema de fuerzas centrales (sin resolverlo explícitamente) estudiando la curva U_{ef} vs. r para ciertos valores





de E . Para realizar este análisis es importante tener en cuenta las siguientes ideas:

- La velocidad en coordenadas polares es: $\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$. Por lo tanto, $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$.
- $E - U_{\text{ef}} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$: la diferencia $E - U_{\text{ef}}$ da información sobre la componente *radial* de $\vec{v}$.
- $U_{\text{ef}} - U(r) = \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} \equiv \frac{1}{2}\mu r^2\dot{\theta}^2$: la diferencia $U_{\text{ef}} - U(r)$ da información sobre la componente *angular* de $\vec{v}$.
- $v = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U(r))}$.
- f_{ef} es la pendiente de la gráfica U_{ef} vs. r .

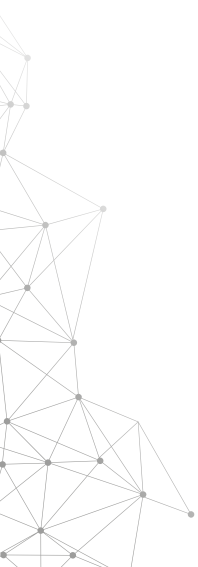
Casos especiales.

- $E = U_{\text{ef}}$: implica $\dot{r} = 0$. Hay un *punto de inversión*. Estos puntos se pueden obtener a partir de la expresión de la energía, haciendo $\dot{r} = 0$:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + U(r) \rightarrow r^2 - \frac{r^2 U(r)}{E} - \frac{l^2}{2\mu E} = 0 \equiv g(r). \quad (5.15)$$

Las raíces de este polinomio dan los puntos de inversión. La instrucción `FindRoot[g(r), {r, 0}]` en *Mathematica* da como resultado las raíces de $g(r)$ a partir de $r = 0$.

- $U_{\text{ef}} = U(r)$: implica $\dot{\theta} = 0$ (o equivalentemente $l = 0$) y $f_{\text{ef}} = f(r)$.
- $E = U(r)$: implica $v = 0$.
- $f_{\text{ef}} = 0$: la gráfica U_{ef} contra r tiene un máximo o un mínimo. Recuérdese que en la sección anterior se concluyó que si $f_{\text{ef}} = 0$, entonces, $f(r) = -f_{\text{centrífuga}} = -\frac{l^2}{\mu r^3}$.
- $E = 0$: implica $T = -U$ o equivalentemente $U_{\text{ef}} = -\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$.





También es importante tener en cuenta que la clasificación cualitativa en órbitas abiertas, acotadas y circulares se cumple para todo potencial atractivo que **(a)** disminuya más lentamente que $1/r^2$ cuando $r \rightarrow \infty$ y **(b)** tienda a infinito más lentamente que $1/r^2$, cuando $r \rightarrow 0$.

A continuación se presenta un análisis de la fuerza central atractiva del tipo $f(r) = -\frac{k}{r^n}$. La **Tabla 5.1** muestra ejemplos de esta fuerza con su respectivo potencial variando a n .

Tabla 5.1: Fuerzas centrales del tipo $f(r) = -k/r^n$ con su respectivo potencial $U(r) = -\int f(r)dr$.

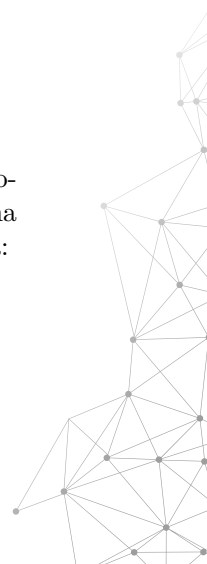
n	$f(r) = -\frac{k}{r^n}$	$U(r) = -\frac{k}{(n-1)r^{n-1}}$
-1	$-kr$	$\frac{1}{2}kr^2$
2	$-\frac{k}{r^2}$	$-\frac{k}{r}$
3	$-\frac{k}{r^3}$	$-\frac{k}{2r^2}$
4	$-\frac{k}{r^4}$	$-\frac{k}{3r^3}$
5	$-\frac{k}{r^5}$	$-\frac{k}{4r^4}$
6	$-\frac{k}{r^6}$	$-\frac{k}{5r^5}$

De manera general, se tiene:

$$f_{\text{ef}} = f_{\text{central}} + f_{\text{centrifuga}} = -\frac{k}{r^n} + \frac{l^2}{\mu r^3},$$

$$U_{\text{ef}} = U_{\text{central}} + U_{\text{centrifugo}} = -\frac{k}{(n-1)r^{n-1}} + \frac{l^2}{2\mu r^2}.$$

El impacto de los parámetros k , n , l y μ en la fuerza efectiva y el potencial efectivo se puede analizar, cualitativamente, por medio del programa Mathematica usando los comandos Manipulate y Plot en la siguiente rutina:



Código en *Mathematica* para la Figura 5.2

Código para la Figura 5.2 derecha

```
In[5]:= Manipulate[Plot[{- $\frac{k}{(n-1)r^{n-1}}$ ,  $\frac{l^2}{2\mu r^2}$ , - $\frac{k}{(n-1)r^{n-1}}$  +  $\frac{l^2}{2\mu r^2}$ },
  {r, 0, 8}, Frame→True, FrameStyle→Black, FrameLabel→
  {"r", ""}, PlotLegends→Placed[{Ucentral, Ucentrifugo, Uefectivo},
  {0.88, 0.22}]], {n, 2, 10}, {k, 1, 4}, {l, 0, 3}, {μ, 1, 4}]
```

Utilizando esta instrucción se obtiene la **Figura 5.2**. En ella se grafican las fuerzas central, centrífuga y efectiva y los respectivos potenciales central, centrífugo y efectivo, en función de r , haciendo $n = 7,5$, $k = 3$, $l = 1,4$ y $\mu = 4$. Si la Energía total es cero ($E = 0$) la partícula puede estar entre $r = 0$ y $r \approx 1,15$. La región para $r \gtrsim 1,15$ es prohibida porque $U_{ef} > E$ y se obtendría que $\dot{r}^2 < 0$. Por otra parte, si la energía total está en el rango $0,026 \lesssim E \lesssim 0,073$ hay un intervalo como región prohibida.

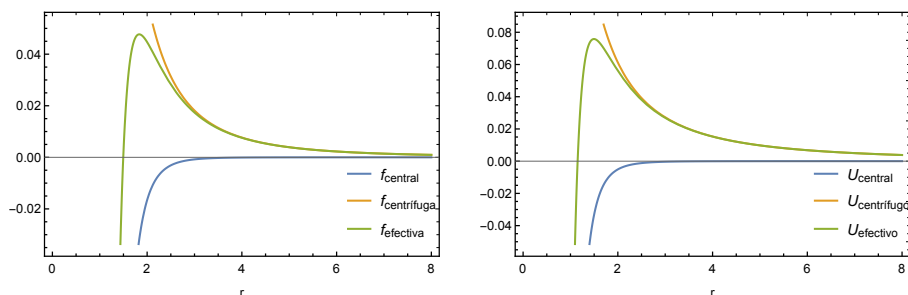


Figura 5.2: Izquierda: Fuerzas central ($= -k/r^n$), centrífuga ($= l^2/\mu r^3$) y efectiva ($= -k/r^n + l^2/\mu r^3$) en función de r . Derecha: Potenciales central ($= -k/[(n-1)r^{n-1}]$), centrífugo ($= l^2/(2\mu r^2)$) y efectivo ($= -k/[(n-1)r^{n-1}] + l^2/(2\mu r^2)$) en función de r . Se hizo $n = 7,5$, $k = 3$, $l = 1,4$ y $\mu = 4$.

Las **Figuras 5.3 a 5.7** muestran fuerzas centrales del tipo $-kr$ (recuperadora lineal), $-k/r^2$ (problema de Kepler), $-k/r^3$, $-k/r^4$ y k/r^5 en función de r , respectivamente. De igual forma, en estas figuras se muestran las fuerzas centrífuga y efectiva, y los potenciales central, centrífugo y efectivo. Para hacer un análisis cualitativo de estos potenciales se consideran posibles valores de



la energía total E y se grafican como rectas paralelas al eje horizontal en las gráficas U_{ef} Vs. r y se tiene en cuenta la diferencia $E - U_{ef}$. Los valores de r donde $E = (U_{ef})_{max}$ o $E = (U_{ef})_{min}$ son puntos de inversión ($\dot{r} = 0$). Por otra parte, las regiones donde $E \geq U_{ef}$ son permitidas, mientras que donde $E \leq U_{ef}$ son regiones prohibidas. Con este análisis también se puede determinar si la órbita es acotada o abierta.

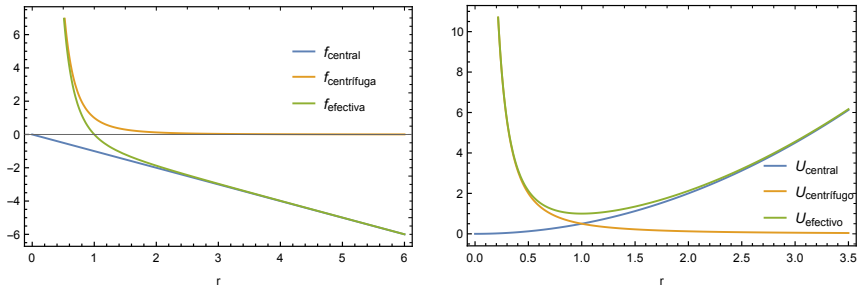


Figura 5.3: *Izquierda:* Fuerzas central ($= -kr$), centrífuga ($= l^2/\mu r^3$) y efectiva ($= -kr + l^2/\mu r^3$) en función de r . *Derecha:* Potenciales central ($= -k/2r^2$), centrífugo ($= l^2/2\mu r^2$) y efectivo ($= -k/2r^2 + l^2/2\mu r^2$) en función de r . Se hizo $k = 1$, $l = 1$ y $\mu = 1$.

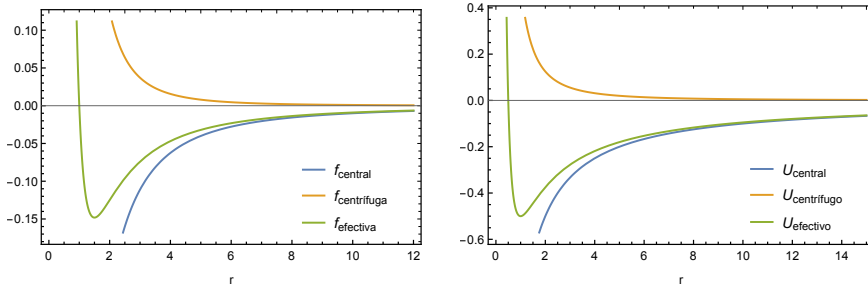
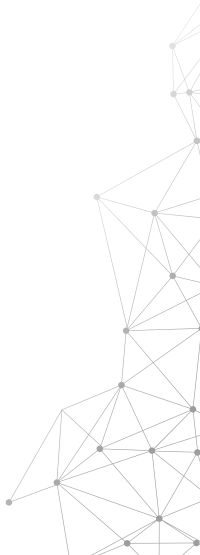


Figura 5.4: *Izquierda:* Fuerzas central ($= -k/r^2$), centrífuga ($= l^2/\mu r^3$) y efectiva ($= -k/r^2 + l^2/\mu r^3$) en función de r . *Derecha:* Potenciales central ($= -k/r$), centrífugo ($= l^2/2\mu r^2$) y efectivo ($= -k/r + l^2/2\mu r^2$) en función de r . Se tomó $k = 1$, $l = 1$ y $\mu = 1$.



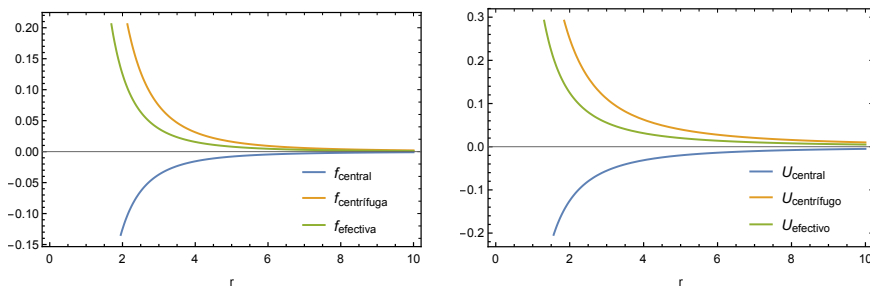


Figura 5.5: *Izquierda:* Fuerzas central ($= -k/r^3$), centrífuga ($= l^2/\mu r^3$) y efectiva ($= -kr^3 + l^2/\mu r^3$) en función de r . *Derecha:* Potenciales central ($= -k/2r^2$), centrífugo ($= l^2/2\mu r^2$) y efectivo ($= -k/2r^2 + l^2/2\mu r^2$) en función de r . Se tomó $k = 1$, $l = 2$ y $\mu = 2$.

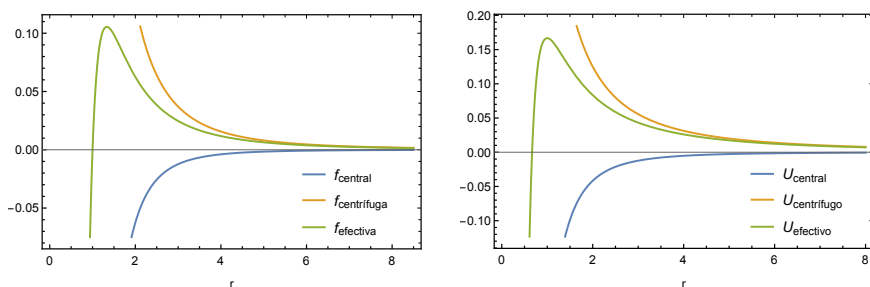
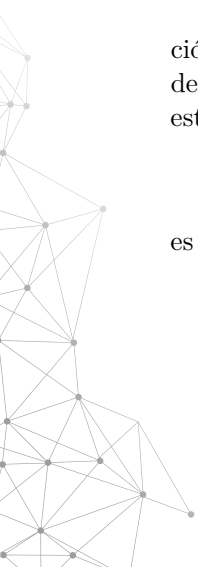


Figura 5.6: *Izquierda:* Fuerzas central ($= -k/r^4$), centrífuga ($= l^2/\mu r^3$) y efectiva ($= -kr^4 + l^2/\mu r^3$) en función de r . *Derecha:* Potenciales central ($= -k/3r^3$), centrífugo ($= l^2/2\mu r^2$) y efectivo ($= -k/3r^3 + l^2/2\mu r^2$) en función de r . Se tomó $k = 1$, $l = 1$ y $\mu = 1$.

Por su parte, la fuerza central $f = -k/r^3$ (ver **Figura 5.5**) amerita atención especial. En este caso, la fuerza central tiene la misma dependencia radial de la fuerza centrífuga ($= l^2/\mu r^3$). La fuerza efectiva $f_{\text{ef}} = f_{\text{central}} + f_{\text{centrifuga}}$ está dada por

$$f_{\text{ef}} = -\frac{k}{r^3} + \frac{l^2}{\mu r^3} = \left(\frac{l^2}{\mu} - k \right) \frac{1}{r^3} = \frac{h}{r^3};$$

es decir, la fuerza efectiva también tiene la misma dependencia radial ($1/r^3$).



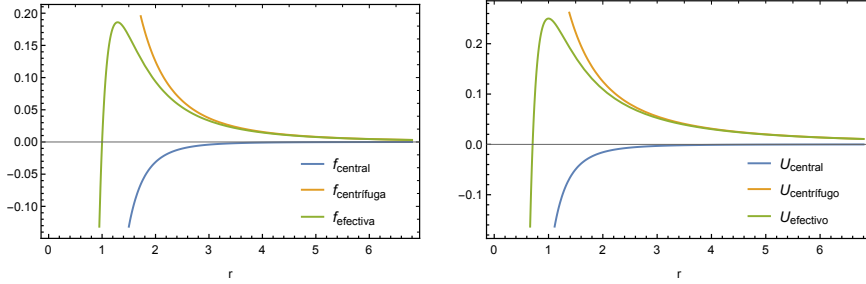


Figura 5.7: *Izquierda:* Fuerzas central ($= -k/r^5$), centrífuga ($= l^2/\mu r^3$) y efectiva ($= -kr^5 + l^2/\mu r^3$) en función de r . *Derecha:* Potenciales central ($= -k/4r^4$), centrífugo ($= l^2/2\mu r^2$) y efectivo ($= -k/4r^4 + l^2/2\mu r^2$) en función de r . Se tomó $k = 1$, $l = 1$ y $\mu = 1$.

El potencial efectivo $U_{\text{ef}} = U_{\text{central}} + U_{\text{centrifugo}}$ está dado por

$$U_{\text{ef}} = -\frac{k}{2r^2} + \frac{l^2}{2\mu r^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{l^2}{\mu} - k \right) \frac{1}{r^2} = \frac{h}{2r^2}.$$

Así, los potenciales efectivo, central y centrífugo tienen la misma dependencia radial ($1/r^2$). Obsérvese que si $l^2/\mu = k$, la fuerza efectiva f_{ef} y el potencial efectivo U_{ef} son cero. Además, el signo de $l^2/\mu - k \equiv h$ determina la naturaleza de la órbita. En la **Figura 5.5** se tomó $l^2/\mu - k \equiv h > 0$.

Para terminar esta sección se analizará en cuáles puntos el potencial efectivo tiene un máximo o un mínimo o, equivalentemente, $f_{\text{ef}} = 0$. Para hallar estos puntos (llamados críticos) se deriva a U_{ef} con respecto a r y se iguala a cero esta derivada:

$$\begin{aligned} U_{\text{ef}} &= -\frac{k}{(n-1)r^{n-1}} + \frac{l^2}{2\mu r^2}, \\ \frac{dU_{\text{ef}}}{dr} &= \frac{k}{r^n} - \frac{l^2}{\mu r^3} = 0; \end{aligned}$$

de donde se obtiene que los puntos críticos están dados por la expresión:

$$r_{\text{critico}} = \left(\frac{k\mu}{l^2} \right)^{\frac{1}{n-3}}, \quad (5.16)$$





la cual depende de n si se fijan a k , μ y l . En la **Figura 5.8** se muestra la variación del punto donde el U_{ef} tiene un valor máximo o mínimo (punto crítico) con respecto a n . En la figura de la izquierda se hizo $k = 3$, $\mu = 4$ y $l = 2$ de tal forma que $l^2/\mu < k$, mientras que en la figura de la derecha se hizo $k = 1$, $\mu = 2$ y $l = 2$, obteniéndose que $l^2/\mu > k$. En ambos casos, el valor crítico de r tiende a 1 para valores grandes de n .

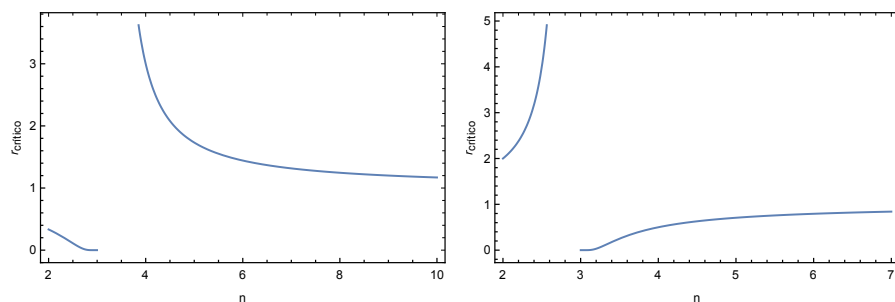


Figura 5.8: Variación del punto crítico de U_{ef} con relación a n . En la figura de la izquierda se hizo $k = 3$, $l = 2$ y $\mu = 4$ y en la de la derecha se tomó $k = 1$, $l = 2$ y $\mu = 2$.

Código en *Mathematica* para la Figura 5.8

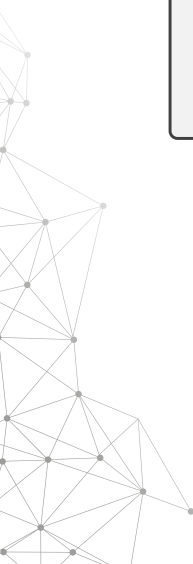
Hallar el punto crítico:

```
In[1]:= Solve[D[- $\frac{k}{(n-1)r^{n-1}}$  +  $\frac{l^2}{2\mu r^2}$ , r] == 0, r]
```

```
Out[1]= {{r -> ( $\frac{k\mu}{l^2}$ ) $^{\frac{1}{-3+n}}$ }}
```

Código **Gráfica 5.8** para $k = 3$, $l = 2$ y $\mu = 4$:

```
In[2]:= Plot[(3) $^{\frac{1}{-3+n}}$ , {n, 2, 10}, Frame->True, FrameStyle->Black,
FrameLabel -> {"n", r_critico}]
```





5.4. Ecuación diferencial de la órbita y potenciales integrables.

Las dos ecuaciones de Lagrange (ecuaciones diferenciales de segundo orden) conducen a $\theta = \theta(t)$ y $r = r(t)$. Sin embargo, se requiere conocer la **ecuación de la órbita**, es decir, la dependencia entre r y θ , eliminando el parámetro t entre estas coordenadas. A continuación se obtendrá dicha ecuación.

Primer camino. $\mu r^2 \dot{\theta} = l$ implica $dt = \frac{\mu r^2}{l} d\theta$. Al sustituir esta expresión en la **Ecuación (5.11)** se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\mu r^2}{l} d\theta &= \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - U - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}}, \\ \theta - \theta_0 &= \int_{r_0}^r \frac{dr}{\left(\frac{\mu r^2}{l} \right) \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - U - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Si se efectúa el cambio de variable $u = \frac{1}{r}$ (esta relación implica $du = -dr/r^2$) y se introduce en el radical la cantidad μ/l se obtiene:

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} - \frac{2\mu U}{l^2} - u^2}}. \quad (5.18)$$

Esta expresión permite obtener, en principio, la ecuación de la órbita si se conoce el potencial central $U(r) = U(1/u)$.

Segundo camino. En la ecuación diferencial para la coordenada r (ver **Ecuación (5.8)**) se pasa del operador $\frac{d^2}{dt^2}$ al operador $\frac{d^2}{d\theta^2}$, aplicando regla de la cadena consecutivamente dos veces de la siguiente forma:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta}; \quad (5.19)$$





$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 r}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right), \\
 &= \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dr}{dt} \right) \frac{d\theta}{dt}, \\
 &= \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{l}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta} \right), \\
 &= \frac{l^2}{\mu^2 r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right).
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

Como $\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right)$, se obtiene

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{l^2}{\mu^2 r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{l^2}{\mu^2} u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}, \tag{5.21}$$

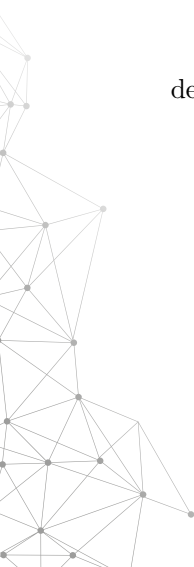
con $u = 1/r$.

Esto nos lleva a la ecuación diferencial de la órbita con el siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned}
 \mu \frac{d^2 r}{dt^2} &= \frac{l^2}{\mu r^3} + f(r), \\
 \mu \left[-\frac{l^2}{\mu^2} u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right] &= \frac{l^2}{\mu} u^3 + f(1/u), \\
 -\frac{l^2}{\mu} u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - \frac{l^2}{\mu} u^3 &= f(1/u), \\
 -\frac{l^2}{\mu} u^2 \left[\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right] &= f(1/u), \\
 \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u &= -\frac{\mu}{l^2} \frac{f(1/u)}{u^2},
 \end{aligned}$$

de donde se obtiene, finalmente, la *ecuación diferencial de la órbita*:

$$\begin{aligned}
 \frac{l^2}{\mu} u^2 \left[\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right] &= -f(1/u), \\
 \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u &= -\frac{\mu}{l^2} \frac{dU(1/u)}{du}.
 \end{aligned} \tag{5.22}$$





Para obtener la **Ecuación (5.22)** debe tenerse en cuenta que $f = -\frac{dU}{dr} = -\frac{dU}{du} \frac{du}{dr} = u^2 \frac{dU}{du}$.

La **Ecuación (5.22)** se puede utilizar en dos direcciones: **(a)** Para hallar la ecuación de la órbita si se conoce a f (o a U); **(b)** Para hallar a f (o U) si se conoce la ecuación diferencial de la órbita.

Por otra parte, según la **Ecuación (5.22)**, la órbita es *simétrica* respecto a los puntos de inversión. Es decir, la órbita es invariante ante una reflexión respecto a los vectores apsidales (la ecuación diferencial de la órbita es la misma para θ y $-\theta$).

Por último, la ecuación del lado derecho en **(5.22)** se reduce a la ecuación diferencial del oscilador libre cuando $\frac{dU}{du}$ es proporcional a u , lo cual se da cuando $U = ku^2$ (es decir, $U \sim \frac{1}{r^2}$). En este caso, se obtiene

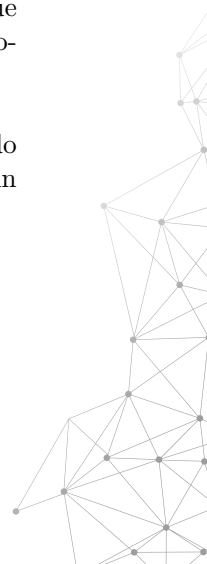
$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{d\theta^2} + u &= -\frac{\mu}{l^2}(2ku) \\ \frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(1 + \frac{2k\mu}{l^2}\right)u &= 0. \end{aligned}$$

Tercer camino. $d\theta = \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dr} dr = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} dr$ y se reemplaza a $\dot{\theta}$ y $\dot{r}$ por:

$$\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}, \quad \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - U - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}.$$

Pregunta. ¿En qué casos es relativamente sencillo realizar la integral que aparece en la ecuación de la órbita (ver **Ecuación (5.18)**), mediante funciones conocidas?

Respuesta. Cuando la cantidad subradical es un polinomio de 2.º grado la integral se puede efectuar mediante funciones circulares, y cuando es un polinomio de 4.º grado, la integral se expresa mediante funciones elípticas.





Ejercicio

5.2 Considerando $U(r) = ar^{n+1}$ demuestre que **(a)** $n = -3, -2, 1$ conduce a funciones simples -circulares- y **(b)** $n = -7, -5, -4, 0, 3, 5$ conduce a integrales elípticas. Además, si la fuerza es una función proporcional a r^n , donde n es un fraccionario, demuestre que $n = -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}$ también conduce a integrales elípticas.

En $U(r) = ar^{n+1}$ se excluye a $n = -1$ porque se obtiene un potencial constante y, por consiguiente, $f = 0$.

Ejemplo 5.1

Obtener la ecuación de la órbita de una partícula sometida a un potencial central $U(r) = (1/2)kr^2$ (oscilador armónico isótropo).

Solución. La fuerza central correspondiente a este potencial es $f(r) = -kr$. En la **Figura 5.3** se muestra el potencial efectivo y la fuerza efectiva asociados al potencial del oscilador armónico isótropo.

Haciendo $n = -1$ en la **Ecuación (5.16)** se obtiene que en

$$r_{critico} = \left(\frac{k\mu}{l^2} \right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{l^2}{k\mu} \right)^{\frac{1}{4}} \equiv r_0$$

el potencial efectivo es mínimo. Reemplazando a r por r_0 en $U_{ef}(r)$, se obtiene





el mínimo de este potencial:

$$\begin{aligned}
 U_{ef}(r = r_0) &= \frac{1}{2}kr_0^2 + \frac{l^2}{2\mu r_0^2}, \\
 &= \frac{k\mu r_0^4 + l^2}{2\mu r_0^2}, \\
 &= \frac{k\mu \left(\frac{l^2}{k\mu}\right) + l^2}{2\mu \left(\frac{l^2}{k\mu}\right)^{1/2}}, \\
 &= \frac{l^2}{\mu} \sqrt{\frac{k\mu}{l^2}}, \\
 &= \sqrt{\frac{kl^2}{\mu}}.
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

La energía total E debe ser mayor o igual que $U_{ef}(r = r_0)$:

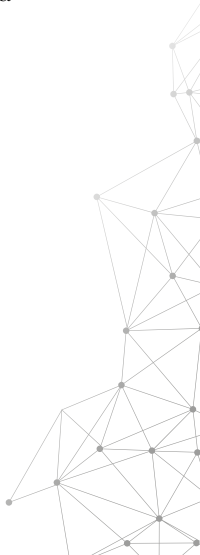
$$E \geq \sqrt{\frac{kl^2}{\mu}}. \tag{5.24}$$

La ecuación de la órbita se puede hallar reemplazando a $U(r)$ en la integral que aparece en la **Ecuación (5.17)**:

$$\theta - \theta_0 = \int \frac{dr}{\left(\frac{\mu r^2}{l}\right) \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - \frac{1}{2}kr^2 - \frac{l^2}{2\mu r^2}\right)}}. \tag{5.25}$$

Haciendo el cambio de variable $r = \sqrt{u}$, lo cual implica $dr = du/2\sqrt{u}$, la ecuación anterior se transforma en

$$\begin{aligned}
 \theta - \theta_0 &= \int \frac{du}{2\sqrt{u} \left(\frac{\mu u}{l}\right) \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - \frac{1}{2}ku - \frac{l^2}{2\mu u}\right)}}, \\
 \theta - \theta_0 &= \frac{l}{2} \int \frac{du}{u \sqrt{-k\mu u^2 + 2\mu Eu - l^2}}.
 \end{aligned}$$





Definiendo $A = -k\mu$, $B = 2\mu E$ y $C = -l^2$ la integral se expresa como:

$$\int \frac{du}{u\sqrt{Au^2 + Bu + C}} = \frac{1}{\sqrt{-C}} \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{Bu + 2C}{u\sqrt{B^2 - 4AC}} \right),$$

de donde se obtiene:

$$\begin{aligned} \theta - \theta_0 &= \frac{l}{2} \frac{1}{\sqrt{l^2}} \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{2\mu Eu - 2l^2}{u\sqrt{4\mu^2 E^2 - 4(-k\mu)(-l^2)}} \right), \\ 2(\theta - \theta_0) &= \operatorname{sen}^{-1} \left[\frac{2\mu E(u - \frac{l^2}{\mu E})}{u\sqrt{4\mu^2 E^2 \left(1 - \frac{kl^2}{\mu E^2}\right)}} \right], \\ 2(\theta - \theta_0) &= \operatorname{sen}^{-1} \left[\frac{u - \frac{l^2}{\mu E}}{u\sqrt{1 - \frac{kl^2}{\mu E^2}}} \right], \\ 2(\theta - \theta_0) &= \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{u - \alpha^2}{u\epsilon} \right), \\ \operatorname{sen} 2(\theta - \theta_0) &= \frac{u - \alpha^2}{u\epsilon}, \\ u\epsilon \operatorname{sen} 2(\theta - \theta_0) &= u - \alpha^2, \\ u[1 - \epsilon \operatorname{sen} 2(\theta - \theta_0)] &= \alpha^2, \end{aligned}$$

con $\alpha^2 = l^2/\mu E$ y la excentricidad ϵ dada por

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{kl^2}{\mu E^2}}.$$

Obsérvese que, como $E \geq \sqrt{\frac{kl^2}{\mu}}$, la excentricidad toma valores entre 0 y 1.

Como $u = r^2$, se obtiene que la ecuación de la órbita está dada por

$$r = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \epsilon \operatorname{sen} [2(\theta - \theta_0)]}}, \quad (5.26)$$

la cual corresponde a una elipse (ver **Figura 5.9**). Este tipo de trayectoria también se evidencia cualitativamente para energías mayores que uno, en la

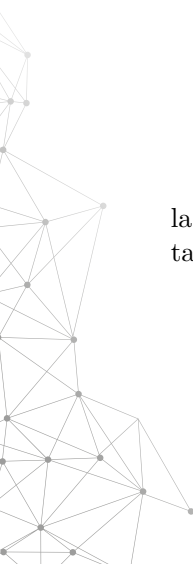




Figura 5.3 derecha.

Cuando $\sin 2(\theta - \theta_0) = 1$ y $\sin 2(\theta - \theta_0) = -1$ se obtienen, respectivamente, las distancias máxima y mínima del cuerpo al centro de fuerzas:

$$r_{max} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \epsilon}},$$

$$r_{min} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \epsilon}}.$$

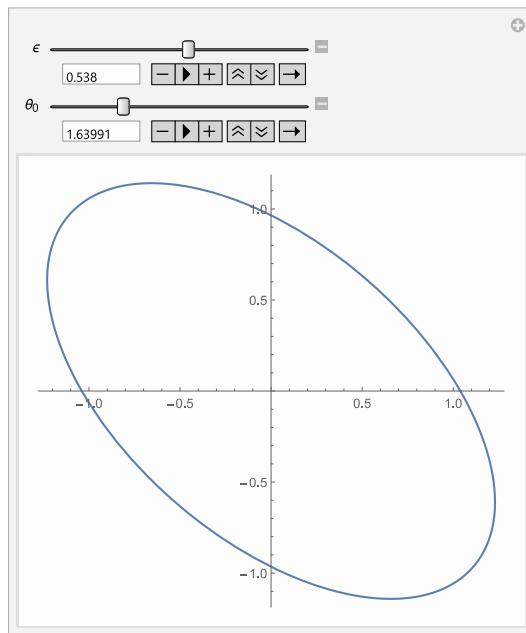


Figura 5.9: Órbita para partícula sometida a un potencial $U = (1/2)kr^2$ dada por la **Ecuación 5.26** con $\alpha = 1$.

A continuación se escribirá la **Ecuación (5.26)** en coordenadas cartesianas con el objetivo de verificar que corresponde a una elipse. Para ello, se escribirá





$\text{sen } 2(\theta - \theta_0)$ en coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}
 \text{sen } 2(\theta - \theta_0) &= 2 \text{sen}(\theta - \theta_0) \cos(\theta - \theta_0), \\
 &= 2[\text{sen } \theta \cos \theta_0 - \cos \theta \text{sen } \theta_0][\cos \theta \cos \theta_0 + \text{sen } \theta \text{sen } \theta_0], \\
 &= 2[\text{sen } \theta \cos \theta \cos^2 \theta_0 + \text{sen}^2 \theta \cos \theta_0 \text{sen } \theta_0 - \cos^2 \theta \text{sen } \theta_0 \cos \theta_0 \\
 &\quad - \cos \theta \text{sen } \theta \text{sen}^2 \theta_0], \\
 &= 2[\text{sen } \theta \cos \theta (\cos^2 \theta_0 - \text{sen}^2 \theta_0) + \text{sen}^2 \theta \cos \theta_0 \text{sen } \theta_0 - \\
 &\quad \cos^2 \theta \text{sen } \theta_0 \cos \theta_0], \\
 &= 2 \cos(2\theta_0) \text{sen } \theta \cos \theta + \text{sen}(2\theta_0) \text{sen}^2 \theta - \text{sen}(2\theta_0) \cos^2 \theta, \\
 \text{sen } 2(\theta - \theta_0) &= A \left(\frac{y}{r} \right) \left(\frac{x}{r} \right) + B \frac{y^2}{r^2} - B \frac{x^2}{r^2}; \tag{5.27}
 \end{aligned}$$

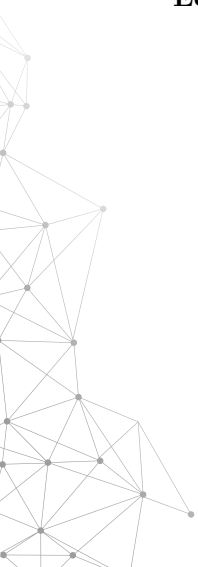
con $A = 2 \cos(2\theta_0)$ y $B = \text{sen}(2\theta_0)$. Elevando al cuadrado a la **Ecuación (5.26)** y utilizando el resultado anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 [1 - \epsilon \text{sen } 2(\theta - \theta_0)] r^2 &= \alpha^2, \\
 \left[1 - \epsilon \frac{Axy + By^2 - Bx^2}{r^2} \right] r^2 &= \alpha^2, \\
 x^2 + y^2 - \epsilon Axy - \epsilon By^2 + \epsilon Bx^2 &= \alpha^2, \\
 (1 + \epsilon B)x^2 + (1 - \epsilon B)y^2 - \epsilon Axy &= \alpha^2. \tag{5.28}
 \end{aligned}$$

De esta manera, se verifica que la **Expresión (5.26)**, expresada en la forma **5.28**, corresponde a la ecuación de una elipse en coordenadas cartesianas.

Caso especial. Si $\theta_0 = \pi/4$, se obtienen $A = 0$ y $B = 1$, con lo que la **Ecuación 5.28** se transforma en

$$\frac{x^2}{\frac{\alpha^2}{1+\epsilon}} + \frac{y^2}{\frac{\alpha^2}{1-\epsilon}} = 1.$$





Código en Mathematica para la Figura 5.9

Código Figura 5.9 con $\alpha = 1$

```
In[4]:= Manipulate[PolarPlot[ $\frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon \sin[2(\theta - \theta_0)]}}$ , { $\theta$ , 0, 2 $\pi$ },
Frame→True, FrameStyle→Black, FrameLabel → {" $\theta$ ", "r"}],
{ $\epsilon$ , 0.001, 0.999}, { $\theta_0$ , 0, 2 $\pi$ }]
```

Ejemplo 5.2

Una partícula sometida a una fuerza central describe una órbita dada por la espiral logarítmica $r = ke^{\rho\theta}$. Encontrar la expresión para la fuerza y el potencial.

Solución.

En este caso nos dan la expresión de la órbita. A partir de la ecuación diferencial de la órbita se puede hallar a $f(r)$:

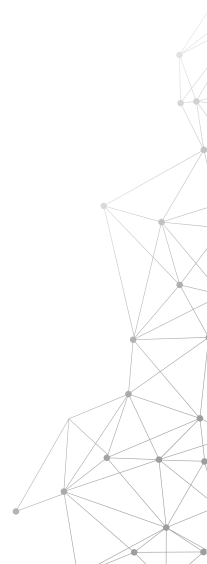
$$f(1/u) = -\left(\frac{l^2}{\mu}\right) u^2 \left[\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right];$$

Por lo tanto, necesitamos hallar a $\frac{du}{d\theta}$ y luego a $\frac{d^2 u}{d\theta^2}$. Como $r = ke^{\rho\theta}$, entonces,
 $u = \frac{1}{k} e^{-\rho\theta}$:

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= -\frac{\rho}{k} e^{-\rho\theta}, \\ \frac{d^2 u}{d\theta^2} &= \frac{\rho^2}{k} e^{-\rho\theta} = \rho^2 u. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} f(1/u) &= -\left(\frac{l^2}{\mu}\right) u^2 (\rho^2 u + u), \\ f(1/u) &= -\frac{l^2(1 + \rho^2)}{\mu} u^3. \end{aligned}$$





La fuerza en función de r es:

$$f(r) = -\frac{l^2(1+\rho^2)}{\mu} \frac{1}{r^3};$$

y el potencial está dado por:

$$\begin{aligned} f(r) &= -\frac{dU}{dr}, \\ U(r) &= -\int f(r)dr, \\ U(r) &= -\frac{l^2(1+\rho^2)}{2\mu} \frac{1}{r^2}. \end{aligned}$$

5.5. Condiciones para órbitas circulares y estables.

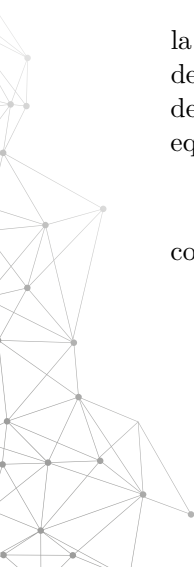
Si recordamos que $E - U_{\text{ef}} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$, se concluye que para fuerzas centrales atractivas se obtienen órbitas circulares cuando $E = U_{\text{ef}}$ ya que en este caso, $\dot{r} = 0$, es decir, la distancia r de la partícula al centro de fuerzas es constante.

Equivalentemente, en esta situación $f_{\text{ef}} = -\frac{dU_{\text{ef}}}{dr} = 0$. Si el radio de la órbita circular es r_0 , el momento cinético l y la energía E están dados por (recuérdese que si $f_{\text{ef}} = 0 \rightarrow f(r) = -\frac{l^2}{\mu r^3}$):

$$f(r_0) = -\frac{l^2}{\mu r_0^3} \quad y \quad E = U_{\text{ef}} = U(r_0) + \frac{l^2}{2\mu r_0^2}. \quad (5.29)$$

El carácter de la órbita circular depende de si $U_{\text{ef}}(r_0)$ es máximo o mínimo y la estabilidad de la órbita circular está determinada por el signo de la segunda derivada de U_{ef} (recuérdese que una función tiene un mínimo si la segunda derivada es positiva en el punto crítico. Y un mínimo en el potencial indica equilibrio estable).

Por lo tanto, se tiene una órbita circular estable si $\left(\frac{d^2U_{\text{ef}}}{dr^2}\right)_{r=r_0} > 0$. Esta condición implica lo siguiente:





$$\begin{aligned}
 U_{\text{ef}} &= U + \frac{l^2}{2\mu r^2}, \\
 \frac{dU_{\text{ef}}}{dr} &= \frac{dU}{dr} - \frac{l^2}{\mu r^3} = -f(r) - \frac{l^2}{\mu r^3}, \\
 \frac{d^2U_{\text{ef}}}{dr^2} &= -\frac{df}{dr} + \frac{3l^2}{\mu r^4} > 0, \\
 -\frac{df}{dr} &> \frac{3}{r} \left(-\frac{l^2}{\mu r^3} \right), \\
 -\frac{df}{dr} &> \frac{3}{r} f, \\
 \frac{df}{dr} &< -\frac{3}{r} f.
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

Esta inecuación da la condición para que la órbita sea circular y estable.

Supongamos ahora que la fuerza tiene la dependencia con respecto a r de la forma

$$f = -\frac{k}{r^n}.$$

De la condición para órbitas circulares estables se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{df}{dr} &< -\frac{3}{r} f, \\
 \frac{d[-kr^{-n}]}{dr} &< -\frac{3}{r} \left(-\frac{k}{r^n} \right), \\
 \frac{kn}{r^{n+1}} &< \frac{3k}{r^{n+1}}.
 \end{aligned}$$

La inecuación anterior implica $n < 3$. Por lo tanto, un potencial atractivo que cumpla una ley potencial que varíe más lentamente que $\frac{1}{r^2}$ dará *órbitas circulares estables* para todos los valores de r_0 .

Pregunta. Qué forma debe tener la ley de la fuerza para que la órbita ligeramente perturbada respecto a cualquiera de estas órbitas circulares sea cerrada?





Respuesta. Para pequeñas desviaciones de las condiciones de circularidad, la partícula ejecuta un movimiento armónico simple en u alrededor de u_0 : $u = u_0 + a \cos \beta \theta$, donde

$$\beta^2 = 3 + \frac{r}{f} \left(\frac{df}{dr} \right)_{r=r_0}. \quad (5.31)$$

Reordenando la expresión anterior se obtiene:

$$\frac{dLnf}{dLnr} = \beta^2 - 3 \quad \Rightarrow \quad f(r) = -\frac{k}{r^{3-\beta^2}}. \quad (5.32)$$

Todas las leyes de la fuerza de esta forma, donde β es un número racional, conducen a órbitas cerradas para condiciones iniciales que difieren un poco de las condiciones para órbitas circulares. Este procedimiento corresponde al *teorema de Bertrand*.

Las únicas fuerzas centrales que dan lugar a órbitas cerradas para todas las partículas ligadas son la *inversamente proporcional al cuadrado* ($\beta^2 = 1$) y la *ley de Hooke* ($\beta^2 = 4$).

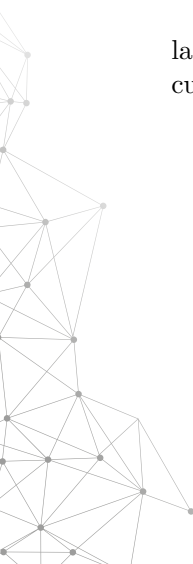
Ejercicio

5.3 ¿Qué tipo de movimiento se genera con $\beta = 5$ y $\beta = \frac{5}{3}$?

Ejemplo 5.3

Considere una fuerza central de la forma $f(r) = -(k/r^2)e^{-r/a}$. Encuentre la condición que debe cumplir la constante a para que el movimiento sea circular y estable.

Solución.





A partir de la condición para que la órbita sea circular y estable se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dr} &< -\frac{3}{r}f, \\ -k \left[-\frac{2}{r^3}e^{-r/a} - \left(\frac{1}{a}\right) \frac{1}{r^2}e^{-r/a} \right] &< -\frac{3}{r} \left(-\frac{ke^{-r/a}}{r^2} \right), \\ ke^{-r/a} \left[\frac{2}{r^3} + \frac{1}{ar^2} \right] &< ke^{-r/a} \left(\frac{3}{r^3} \right), \\ \frac{2}{r^3} + \frac{1}{ar^2} &< \frac{3}{r^3}, \\ \frac{1}{ar^2} &< \frac{1}{r^3}.\end{aligned}$$

A partir de este resultado se obtiene que la constante a debe cumplir la condición $a > r$.

Generalización. Suponiendo que la fuerza es $f(r) = -(k/r^n)e^{-r/a}$, la condición para que la órbita sea circular y estable da como resultado $r < (3 - n)a$. Así, para $n = 1$, se obtiene órbita circular estable cuando $r < 2a$; para $n = 2$, cuando $r < a$. Para $n > 3$ no hay órbitas circulares.

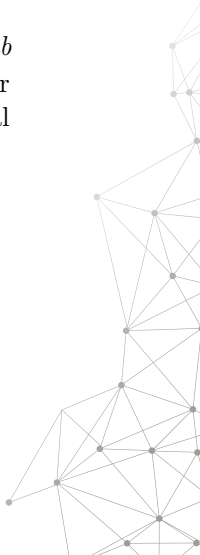
Pregunta. ¿Cuáles son las unidades de a y k ?

Ejercicio

5.4 Como complemento al ejemplo anterior, estudie detalladamente la estabilidad de órbitas circulares cuando el potencial central sea

$$U(r) = -\frac{k}{r}e^{-r/a}.$$

A este potencial se le conoce como *potencial de Yukawa* o *potencial de Coulomb apantallado*. Hacer un análisis cualitativo de la gráfica U_{ef} vs r . Establecer una comparación entre $1/r$ y $e^{-r/a}$, obtener el valor mínimo para el potencial efectivo y la ecuación diferencial de la órbita.





5.6. Problema de Kepler: fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

El objetivo en este problema es hallar la ecuación de la órbita cuando $f(r) = -\frac{k}{r^2}$ o equivalentemente $U(r) = -\frac{k}{r}$. Para ello, podemos tomar dos caminos:

Primer camino. A partir de la ecuación diferencial de la órbita (**Ecuación. (5.22)**), sustituyendo la expresión para la fuerza en términos de u : $f(1/u) = -ku^2$. Esta sustitución nos lleva a la ecuación general de una cónica con un foco en el origen. Veamos el procedimiento:

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\theta^2} + u &= -\frac{\mu}{l^2 u^2} (-ku^2), \\ \frac{d^2u}{d\theta^2} + u &= \frac{\mu k}{l^2}, \\ \frac{d^2u}{d\theta^2} + u - \frac{\mu k}{l^2} &= 0.\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $X = u - \frac{\mu k}{l^2}$ en la ecuación diferencial anterior se llega a

$$\frac{d^2X}{d\theta^2} + X = 0.$$

Esta expresión corresponde a una ecuación diferencial análoga a la de un oscilador armónico simple, con $\omega_0 = 1$. Su solución es

$$\begin{aligned}X &= B \cos(\theta - \theta_0), \\ u - \frac{\mu k}{l^2} &= B \cos(\theta - \theta_0), \\ u &= \frac{\mu k}{l^2} + B \cos(\theta - \theta_0).\end{aligned}$$

Así, se obtiene, en función de r , la expresión

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2} \left[1 + \frac{Bl^2}{\mu k} \cos(\theta - \theta_0) \right] \Leftrightarrow \frac{1}{r} = C(1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)), \quad (5.33)$$

donde B y θ' son constantes de integración y ϵ es la excentricidad de la cónica.





Segundo camino. Resolviendo la integral que aparece en la expresión $\theta = \theta(r)$ (ver **Ecuación (5.18)**) se obtiene:

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} - \frac{2\mu U}{l^2} - u^2}}, \\ &= \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} - \frac{2\mu(-ku)}{l^2} - u^2}}, \\ &= \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{c + bu + au^2}},\end{aligned}$$

donde $a = -1$, $b = \frac{2\mu k}{l^2}$ y $c = \frac{2\mu E}{l^2}$. Por medio de la fórmula

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \cos^{-1} \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \right),$$

se obtiene, con un poco de procedimiento algebraico, la expresión que describe la ecuación de la órbita:

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \cos(\theta - \theta_0) \right]. \quad (5.34)$$

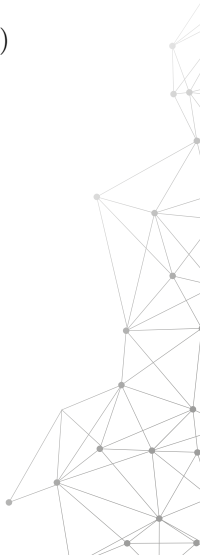
Este camino permite relacionar la excentricidad ϵ con la energía E y el momento cinético l , donde la excentricidad está dada por:

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}. \quad (5.35)$$

Así, la expresión de la órbita, **Ecuación (5.34)**, se puede escribir como:

$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)}, \quad (5.36)$$

con $\alpha = l^2/\mu k$.





Teniendo en cuenta que $-1 \leq \cos(\theta - \theta_0) \leq 1$, cuando $\cos(\theta - \theta_0) = -1$ se obtiene $r_{\max}$ y para $\cos(\theta - \theta_0) = +1$ se obtiene $r_{\min}$:

$$\begin{aligned} r_{\max} &= \frac{\alpha}{1 - \epsilon}, \\ r_{\min} &= \frac{\alpha}{1 + \epsilon}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Ejercicio

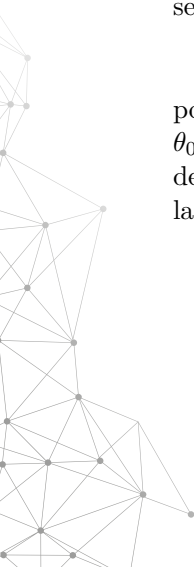
5.5 Hacer explícitamente el desarrollo matemático para obtener la **Ecuación (5.34)**.

A continuación se analizará la expresión para la excentricidad dada por la **Ecuación (5.35)**:

- Para $\epsilon > 1$, $E > 0$. En este caso la trayectoria de la partícula corresponde a una *hipérbola*.
- Para $\epsilon = 1$, $E = 0$. La trayectoria es una *parábola*.
- Para $0 < \epsilon < 1$, $(U_{ef})_{\min} < E < 0$. La trayectoria es una *elipse*.
- $\epsilon = 0$, $E = (U_{ef})_{\min}$. La trayectoria es una *circunferencia*.

En el caso de $\epsilon = 0$ (*órbitas circulares*), $E = -\frac{\mu k^2}{2l^2}$, lo cual indica que solo se obtienen órbitas circulares cuando la energía total es negativa.

En las **Figuras 5.10 y 5.11** se muestra la órbita que sigue el cuerpo, dada por la **Ecuación (5.34)**, asignando valores diferentes a la excentricidad ϵ y a θ_0 , con $\mu = 1$, $k = 1$ y $l = 1$. Se observa que la inclinación de la órbita está determinado por el valor de θ_0 . Únicamente en el caso de $\epsilon = 0$, la órbita tiene la misma inclinación, independiente del valor de θ_0 .



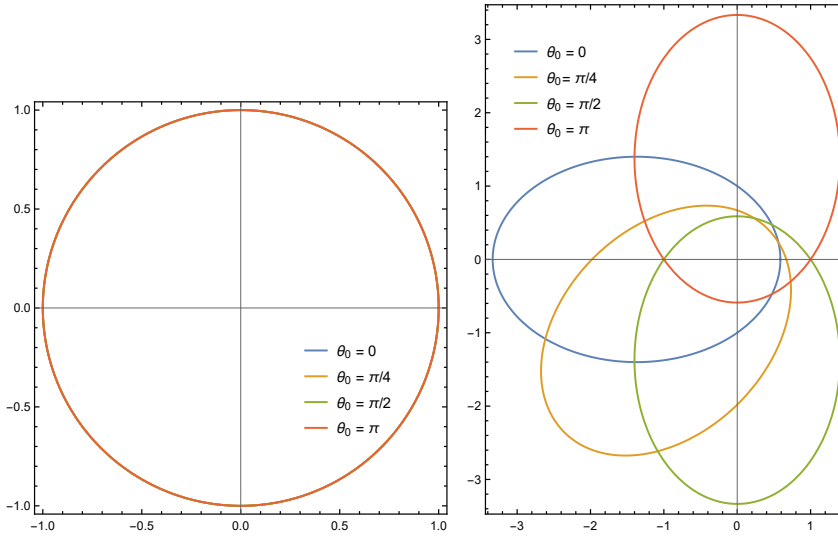


Figura 5.10: *Izquierda:* Órbitas para $\epsilon = 0$. ; *Derecha:* Órbitas para $\epsilon = 0,7$.

Código en Mathematica para las Figuras 5.10 y 5.11

Código Figuras 5.10 y 5.11, con $k = 1$, $l = 1$ y $\mu = 1$ en la Ecuación (5.36):

```
In[6]:= Manipulate[PolarPlot[ $\frac{1}{1 + \epsilon \text{Cos}[\theta - \theta_0]}$ , { $\theta$ , 0, 2 $\pi$ },
  Frame→True, FrameStyle→Black], { $\epsilon$ , 0, 5}, { $\theta_0$ , 0, 2 $\pi$ }]
```

Para órbitas elípticas: La velocidad radial es nula en los puntos apsidales, es decir, $\dot{r}_a = 0$ en dichos puntos (con r_a el vector posición para los puntos apsidales). Por lo tanto, a partir de la expresión para la energía E obtenemos:

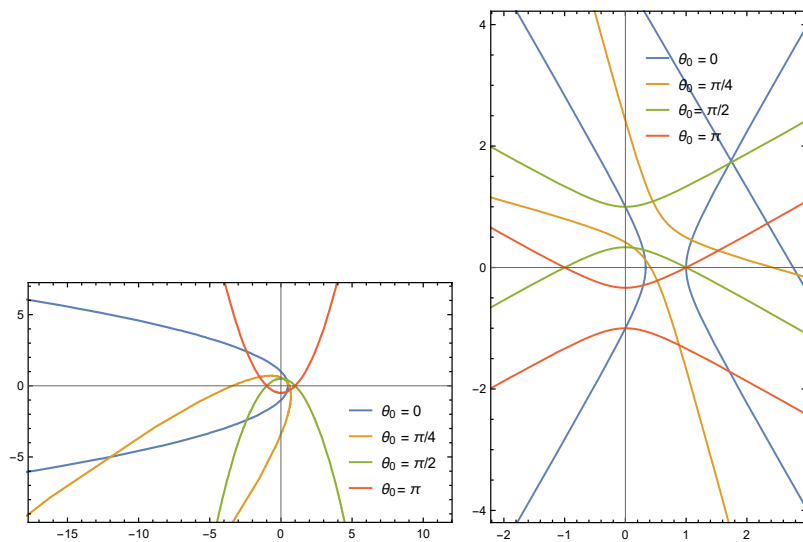
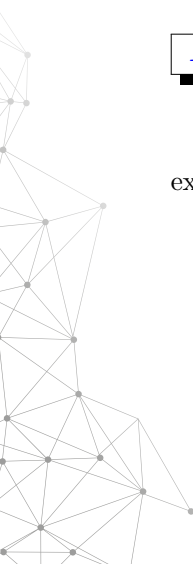


Figura 5.11: *Izquierda:* Órbitas para $\epsilon = 1$. ; *Derecha:* Órbitas para $\epsilon = 2$

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2}\mu\dot{r}_a^2 + \frac{l^2}{2\mu r_a^2} - \frac{k}{r_a}, \\
 E - \frac{l^2}{2\mu r_a^2} + \frac{k}{r_a} &= 0, \\
 r_a^2 + \frac{k}{E}r_a - \frac{l^2}{2\mu E} &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

Ejemplo 5.4

Obtener las raíces de la **Ecuación cuadrática (5.38)** en función de la excentricidad.





Solución.

Asumiendo que $a = 1$, $b = k/E$ y $c = -l^2/(2\mu E)$, la **Ecuación (5.38)** adopta la forma $ar_a^2 + br_a + c = 0$, cuya solución es

$$\begin{aligned}(r_a)_\pm &= \frac{-\frac{k}{E} \pm \sqrt{\frac{k^2}{E^2} - 4(1)\left(-\frac{l^2}{2\mu E}\right)}}{2} = \frac{-\frac{k}{E} \pm \sqrt{\frac{k^2}{E^2} + \left(\frac{2l^2}{\mu E}\right)}}{2}, \\(r_a)_\pm &= \frac{-\frac{k}{E} \pm \sqrt{\frac{k^2}{E^2} \left(1 + \frac{2l^2 E}{\mu k^2}\right)}}{2} = \frac{-\frac{k}{E} \pm \frac{k}{E}\epsilon}{2}, \\(r_a)_\pm &= \frac{k}{2E}(-1 \pm \epsilon).\end{aligned}$$

A partir de la definición de la excentricidad, dada por la **Ecuación (5.35)**, se obtiene que la energía total E está dada por

$$E = \frac{\mu k^2}{2l^2}(\epsilon^2 - 1);$$

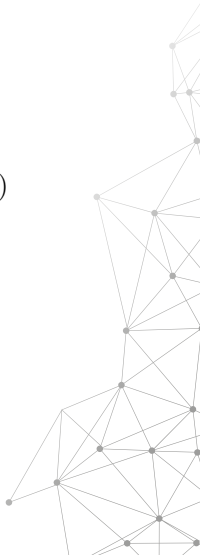
sustituyendo esta expresión en la de las raíces se llega a

$$\begin{aligned}(r_a)_+ &= \frac{l^2}{\mu k} \left(\frac{1}{\epsilon + 1} \right) = \frac{\alpha}{1 + \epsilon} \equiv r_{\min}, \\(r_a)_- &= -\frac{l^2}{\mu k} \left(\frac{1}{\epsilon - 1} \right) = \frac{\alpha}{1 - \epsilon} \equiv r_{\max},\end{aligned}$$

donde $\alpha = l^2/\mu k$. Este resultado se obtuvo de forma general a través de las **Ecuaciones (5.37)**.

Los semiejes mayor (a) y menor (b) de la elipse están dados por:

$$\begin{aligned}a &= \frac{\alpha}{1 - \epsilon^2} = \frac{l^2/\mu k}{1 - \left(1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}\right)} = \frac{k}{2|E|}, \\b &= \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} = \frac{l^2/\mu k}{\sqrt{1 - \left(1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}\right)}} = \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}}.\end{aligned}\tag{5.39}$$





Por otra parte, a partir de la expresión para la velocidad areolar $\frac{dA}{dt} = \frac{l}{2\mu}$, se puede hallar el período del movimiento elíptico: $\tau = \frac{2\mu}{l} A$. Como el área de la elipse es $A = \pi ab$ y utilizando las expresiones para a y b se obtiene:

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2\mu}{k} a^3. \quad (5.40)$$

Este resultado corresponde a la tercera ley de Kepler: el cuadrado del período es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita elíptica.

La excentricidad ϵ se puede expresar en función del semieje mayor a . Para ello, debemos escribir la energía E en términos de este parámetro:

$$E = -\frac{k}{2a}.$$

Reemplazando este valor de E en la **Ecuación 5.35** se obtiene

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{l^2}{\mu k a}},$$

de donde

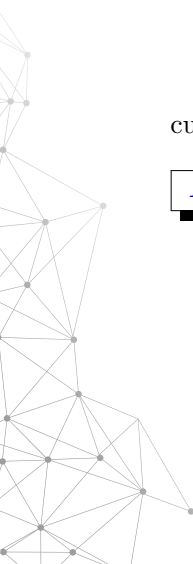
$$\frac{l^2}{\mu k} = a(1 - \epsilon^2).$$

El factor $\frac{l^2}{\mu k}$ se sustituye en la ecuación de la órbita para obtener:

$$r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)}. \quad (5.41)$$

Con esta última expresión es inmediato encontrar las distancias apsidales, las cuales se obtienen cuando $(\theta - \theta_0) = 0, \pi$. En efecto, $r_{\pm} = a(1 \pm \epsilon)$.

Ejemplo 5.5





Considere una partícula sometida al potencial

$$U(r) = -\frac{k}{r} + \frac{h}{r^2},$$

con $h, k > 0$. Haga un estudio amplio del movimiento de esta partícula utilizando las siguientes estrategias para abordar un problema de fuerza central cuando se conoce el potencial o la fuerza:

- (a) Analizar el potencial efectivo.
- (b) Obtener la ecuación de la órbita.
- (c) Obtener la condición de estabilidad para órbitas circulares.
- (d) Encontrar regiones donde este acotado el movimiento a partir de un análisis cualitativo del potencial efectivo.

Solución.

Haciendo el cambio de variable $u = \frac{1}{r}$, se obtiene

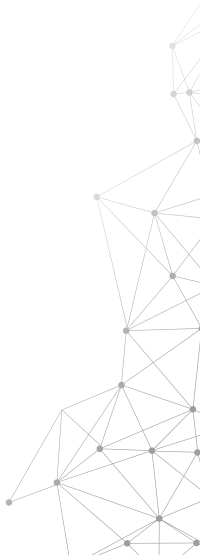
$$U(u) = -ku + hu^2.$$

La fuerza central está dada por $f = -dU/dr$:

$$\begin{aligned} f(r) &= -\frac{k}{r^2} + \frac{2h}{r^3}, \\ f(1/u) &= -ku^2 + 2hu^3. \end{aligned}$$

(a) Análisis del potencial efectivo: el potencial efectivo $U_{ef} = U_{centrifugo} + U_{central}$ para el problema dado es:

$$\begin{aligned} U_{ef} &= \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r), \\ U_{ef} &= \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} + \frac{h}{r^2}, \\ U_{ef} &= \left(\frac{l^2 + 2\mu h}{2\mu} \right) \frac{1}{r^2} - \frac{k}{r}. \end{aligned}$$





Se concluye que siempre que el potencial central $U(r)$ esté conformado por un potencial de Kepler ($\approx 1/r$) más un potencial de la forma $\approx 1/r^2$, este último término se agrupa con el potencial centrífugo que también depende de la forma $1/r^2$, llegando así a un problema similar al de Kepler, pero con precesión.

(b) Ecuación de la trayectoria a partir de la ecuación diferencial de la órbita:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u &= -\frac{\mu}{l^2} \frac{dU}{du}, \\ \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u &= -\frac{\mu}{l^2} (-k + 2hu), \\ \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \left(1 + \frac{2h\mu}{l^2}\right) u - \frac{\mu k}{l^2} &= 0.\end{aligned}$$

Considerando

$$X = \left(1 + \frac{2h\mu}{l^2}\right) u - \frac{\mu k}{l^2},$$

se obtiene la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 X}{d\theta^2} + \left(1 + \frac{2h\mu}{l^2}\right) X &= 0, \\ \frac{d^2 X}{d\theta^2} + \omega_0^2 X &= 0,\end{aligned}\tag{5.42}$$

donde $\omega_0 = \sqrt{1 + \frac{2h\mu}{l^2}}$. Esta ecuación diferencial es de segundo orden, lineal, homogénea con coeficientes constantes. Su solución es:

$$\begin{aligned}X &= B \cos(\omega_0 \theta - \theta_0), \\ \omega_0^2 u - \frac{\mu k}{l^2} &= B \cos(\omega_0 \theta - \theta_0), \\ \frac{1}{r} &= \frac{\mu k}{l^2 \omega_0^2} \left[1 + \frac{l^2 B}{\mu k} \cos(\omega_0 \theta - \theta_0)\right].\end{aligned}\tag{5.43}$$

De esta manera, se obtiene que el movimiento de la partícula corresponde al movimiento generado por el potencial de Kepler con precesión.





Nota. La ecuación de la órbita también se puede obtener haciendo la integral de la **Ecuación 5.17**

(c) Aplicación de la condición de estabilidad para órbitas circulares: considerando la fuerza central de la forma general

$$f(r) = -\frac{k}{r^n} + \frac{2h}{r^m}, \quad \text{con } m > n$$

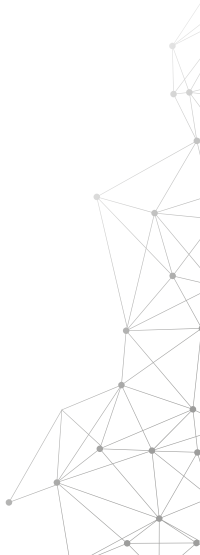
La condición de estabilidad de la órbita $df/dr < -(3/r)f$ da:

$$\begin{aligned} \frac{kn}{r^{n+1}} + \frac{2hm}{r^{m+1}} &< -\frac{3}{r} \left(-\frac{k}{r^n} + \frac{2h}{r^m} \right), \\ \frac{kn}{r^{n+1}} + \frac{2hm}{r^{m+1}} &< \frac{3k}{r^{n+1}} - \frac{6h}{r^{m+1}}, \\ \frac{k(n-3)}{r^n} &< -\frac{2h(3+m)}{r^m}, \\ k(n-3)r^{m-n} &< -2h(3+m), \\ r^{m-n} &< -\frac{2h(3+m)}{k(n-3)}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Haciendo $m = 3$ y $n = 2$ en la desigualdad anterior, se obtiene $r < -2h(6)/(-k)$. Por lo tanto, para la fuerza central dada en este problema es posible obtener órbitas circulares estables cuando $r < 12h/k$.

De la condición dada por la **Inecuación (5.44)** se concluye que solo para $n = 1, 2$ se pueden obtener órbitas circulares estables ya que $n - 3$ es negativo. Para valores diferentes de n se obtendría que r es menor que un número negativo, lo cual no corresponde a una situación física. Por lo tanto, solo las fuerzas $f = -k/r + 2h/r^m$ con $m > 1$ y $f = -k/r^2 + 2h/r^m$ con $m > 2$ podrían conducir a órbitas circulares estables.

(d) Análisis cualitativo de la gráfica U_{ef} vs r por medio de una herramienta computacional. Se utilizará el paquete *Mathematica* con el objetivo de encontrar regiones donde el sistema este acotado.





La **Figura 5.12** muestra los potenciales central, centrífugo y efectivo en función de r haciendo $k = 1$, $l = 2$, $\mu = 2$ y $h = 0,5$. Teniendo en cuenta la condición dada por la **Inecuación 5.44** y como $12h/k = 6$, se concluye que para $r < 6$ se pueden obtener órbitas circulares, lo cual es consistente con el mínimo que presenta U_{ef} entre $0 < r < 6$. Para una energía total $E \approx -0,126$ el sistema es acotado entre $2 \lesssim r \lesssim 6$.

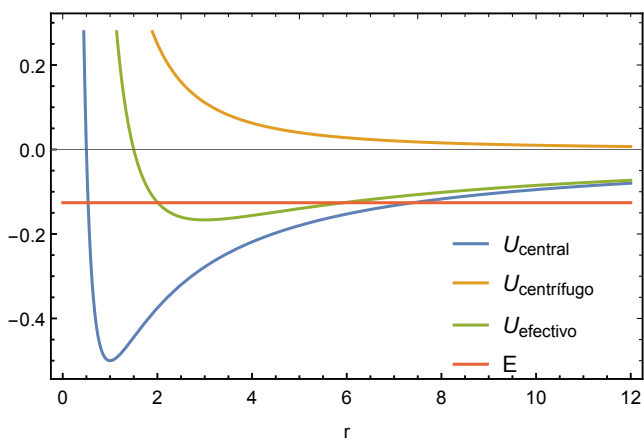
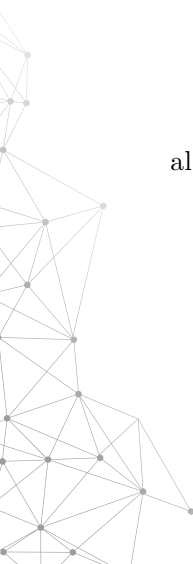


Figura 5.12: Potenciales central ($= -k/r + h/r^2$), centrífugo ($= l^2/2\mu r^2$) y efectivo ($= -k/r + h/r^2 + l^2/2\mu r^2$) en función de r con $k = 1$, $l = 2$, $\mu = 2$ y $h = 0,5$.

Ejercicios

5.6 Analizar exhaustivamente el movimiento cuando se le cambia de signo al segundo término del potencial del **Ejemplo 5.5**:

$$U(r) = -\frac{k}{r} - \frac{h}{r^2};$$





o, equivalentemente, cuando la fuerza es

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{2h}{r^3}.$$

5.7 Analizar el movimiento de una partícula sometida a la fuerza central

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{\lambda}{r^4}.$$

Grafique con el *Mathematica* (u otro programa) U_{ef} en función de r y determine si hay regiones donde el movimiento sea acotado. Obtenga la condición para órbitas circulares estables.

5.8 En el modelo de quarks no-relativista ISGW (N. Isgur, D. Scora, B. Grinstein and M. B. Wise, *Phys. Rev. D*, vol. 39, no. 3, pp. 799, 1985) consideran el siguiente potencial entre dos quarks:

$$U(r) = -\frac{4\alpha_s}{3r} + c + br,$$

con $\alpha_s = 0,5$, $c = -0,84$ GeV y $b = 0,18$ GeV². Analizar gráficamente este potencial y el potencial efectivo.

5.9 Un cuerpo es sometido al potencial de *Lennard-Jones* (ver **Ejercicio 2.19**):

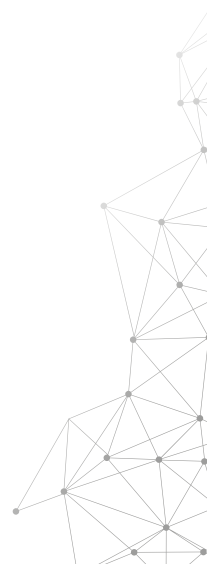
$$U(r) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right].$$

Analizar el potencial efectivo y encontrar regiones de estados ligados.

5.10 Considere una partícula sometida a la fuerza central

$$f(r) = -\frac{\lambda}{r^4} - \frac{\rho}{r^3};$$

demuestre que la órbita de la partícula es una espiral.





Considere el problema inverso: asuma que la órbita del cuerpo es $r = k\theta^2$. Obtenga la fuerza, haga la gráfica de la órbita y discuta la condición de estabilidad para órbitas circulares.

5.11 Un cuerpo es sometido a la fuerza central atractiva

$$f(r) = -ke^{-\rho r} \quad k > 0.$$

Aplice la condición para órbitas circulares estables y determine para que valores de r es posible obtener este tipo de órbitas.

5.12 Un cuerpo es sometido a la fuerza central atractiva

$$f(r) = -kr^3e^{-\rho r^2}, \quad k > 0.$$

A partir de la condición para órbitas circulares estables determine para que valores de r es posible obtener este tipo de órbitas.

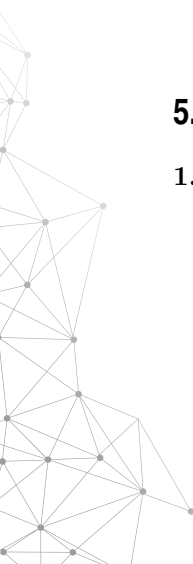
5.13 Las fuerzas centrales dadas en los **Ejercicios 5.11** y **5.12** se pueden escribir en forma general como:

$$f(r) = -kr^n e^{-\rho r^m}.$$

¿Cuáles son las unidades de ρ y k ? Hacer un análisis de las contribuciones de r^n y $e^{-\rho r^m}$ al producto $r^n e^{-\rho r^m}$, y encontrar bajo qué condición será posible obtener órbitas circulares. Además hacer un análisis cualitativo del potencial efectivo U_{ef} variando n y m .

5.7. Actividades complementarias

1. Estudiar el *Problema de los tres cuerpos*. Es una extensión del problema de dos cuerpos en la cual se considera la interacción de tres cuerpos debido a fuerzas centrales. Revisar la siguiente referencia:





- Quaresma LJB, Rodrigues ME. Choreographies on the restricted three-body problem. *Rev Bras Ens Fis.* 2019; 41(2).

En este artículo se estudia el comportamiento y la estabilidad de dos tipos de soluciones periódicas importantes al problema restringido de tres cuerpos interactuando mutuamente por la fuerza gravitacional.

2. Analizar la combinación del potencial de Kepler (ver **Sección 5.6**) con el potencial de Yukawa (ver **Ejercicio 5.4**). Revisar la siguiente publicación:

- Cavan E, Haranas I, Gkigkitzis I. Cobbett Dynamics and Stability of the Two Body Problem with Yukawa Correction. *Astrophysics and Space Science* 2020; 365.

En esta referencia se estudia la estabilidad de las órbitas de un cuerpo sometido a un potencial $U(r) = U_{\text{Kepler}} + U_{\text{Yukawa}}$. Al final de la sección 4, los autores presentan un ejemplo numérico comparable a la órbita de Marte. Al problema planteado en este artículo se le puede aplicar la teoría presentada en este capítulo.

3. El problema de dos cuerpos sometidos a una fuerza central también se puede estudiar mediante el formalismo newtoniano. Ver la referencia:

- Lucic D, Varga M. Simulation of the two-body problem in GeoGebra. *Acta Electrotechnica et Informatica.* 2012; 12(3): 47–50.

En este artículo estudia el problema de Kepler obteniendo la ecuación de la trayectoria a partir de la segunda ley de Newton en coordenadas polares, usando el paquete GeoGebra. De esta manera, este artículo complementa el enfoque presentado en este capítulo y el uso de herramientas computacionales para abordar el problema de fuerzas centrales.

4. Una aplicación interesante del problema de dos cuerpos se presenta en el juego del billar. Ver la referencia siguiente:





- Antón C, Brun JL. Gravitational pocket billiards with *MathematicaTM*. *Rev Mex Fis.* 2009; 55: 168–75.

En este trabajo se estudia el movimiento de dos bolas de billar sometidas a la fuerza gravitacional $\approx 1/r^2$ y un hueco no interactuante, por medio del paquete *Mathematica*. Este artículo complementa el uso dado en este libro a esta herramienta computacional.

5. En 1964, Richard Feynman presentó, en una conferencia, una derivación elemental de la primera ley de Kepler utilizando un enfoque geométrico sin acudir al uso del cálculo integral o de ecuaciones diferenciales. En los siguientes artículos, se discute esta construcción geométrica planteando en algunos casos generalizaciones a órbitas abiertas:

- Cariñena JF, Rañada MF, Santander M. A new look at the Feynman ‘hodograph’ approach to the Kepler first law. *Eur J Phys.* 2016; 37.
- Vogt E. Elementary derivation of Kepler’s laws. *American Journal of Physics.* 1996; 64(4).
- Kowen M, Mathur H. On Feynman’s analysis of the geometry of Keplerian orbits. *Am J Phys.* 2003; 71.
- Unruh WG. Kepler’s laws without calculus; 2018.

Este enfoque geométrico facilita el acceso al problema de Kepler a estudiantes que no tengan mucha formación en ecuaciones diferenciales y cálculo diferencial.

