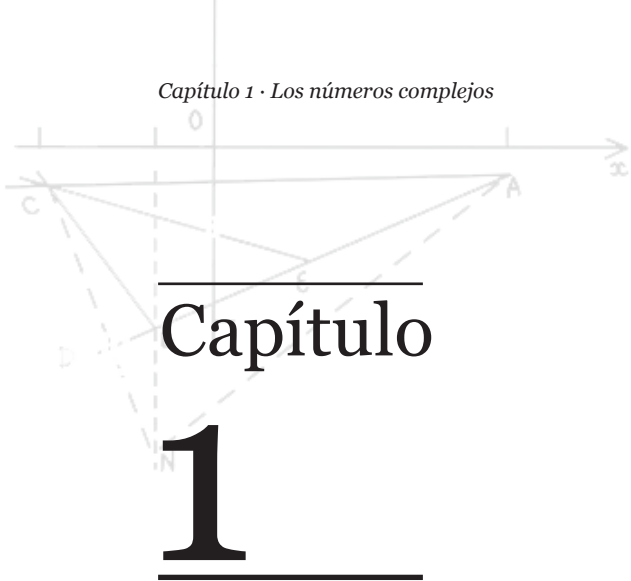




Capítulo 1

Los números complejos

En este primer capítulo se introduce el sistema de los números complejos en sus distintas perspectivas.

1.1. El campo de los números complejos

El sistema numérico complejo se puede introducir como sigue.

Definición 1.1.1. *El conjunto de las parejas ordenadas de números reales $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ junto con dos operaciones, la adición dada por*

$$(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d) \quad (1.1)$$

y la multiplicación dada por

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \quad (1.2)$$

lo denotamos $\mathbb{C}$ y sus integrantes los llamamos números complejos.

El número complejo $(a, 0)$ lo escribimos como a , esto se justifica por la función inyectiva

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ a &\mapsto (a, 0), \end{aligned}$$

que respeta las operaciones de adición y multiplicación, esto es, para cada $a, b \in \mathbb{R}$ tenemos $f(a + b) = f(a) + f(b)$ y $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$, como se verifica de inmediato.

Si hacemos $i = (0, 1)$, entonces considerando $\mathbb{C}$ como espacio vectorial real, resulta

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a + bi.$$

En este punto abandonamos la notación de pares ordenados. Llamamos *parte real* del complejo $z = a + bi$ al número real a , y *parte imaginaria* al número real b , simplificando:

$$\Re z = a \text{ e } \Im z = b. \tag{1.3}$$

A partir de (1.1), (1.2) y (1.3) tenemos de forma inmediata que para números complejos cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$ se cumple la identidad $\Re(z + w) = \Re z + \Re w$ y también $\Im(z + w) = \Im z + \Im w$.

Proposición 1.1.1. *Tenemos que $i^2 = -1$.*

Demostración. $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) = -1. \quad \square$

Con esta notación, se vuelve natural la multiplicación de números complejos, en efecto:

$$(a + bi)(c + di) = ac + (ad + bc)i + bd i^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

(en adelante, omitiremos el punto para denotar la multiplicación). Por otro lado, la **proposición 1.1.1** significa que la ecuación $z^2 + 1 = 0$ tiene solución en los números complejos. En realidad, para cada $z \in \mathbb{C}$ se tiene $z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$. Generalizando, si $z, w \in \mathbb{C}$ entonces $z^2 + w^2 = (z + wi)(z - wi)$, esta identidad se puede verificar como ejercicio. Luego para $z = a + bi \in \mathbb{C}$ con por lo menos uno de los reales a, b diferentes de cero tenemos:

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \right) + i \left(\frac{-b}{a^2 + b^2} \right). \quad (1.4)$$

Teorema 1.1.1. *El conjunto de los números complejos constituye un campo.*

Demostración. Se deja como ejercicio para el lector. El elemento dado en la **ecuación** (1.4) indica el inverso multiplicativo de un número complejo $a + bi$ cualquiera diferente de cero. $\square$

Ahora definimos dos funciones importantes para el estudio de los números complejos.

- **Función valor absoluto.** Dado el número complejo $z = a + bi \in \mathbb{C}$, el valor absoluto de z , también llamado módulo de z , es

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (1.5)$$

o, de manera equivalente, $|z|$ es el valor real no negativo tal que

$$|z|^2 = a^2 + b^2.$$

- **Función conjugado.** Dado el número complejo $z = a + bi \in \mathbb{C}$, el conjugado de z es

$$\bar{z} = a - bi. \quad (1.6)$$

Por ejemplo, $|i| = 1$ mientras $\bar{i} = -i$.

Unas propiedades básicas de estas funciones son dadas por la siguiente proposición.

Proposición 1.1.2. *Dados $z, w \in \mathbb{C}$ tenemos:*

1. $\Re z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$,
2. $\Im z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$,
3. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$,
4. $\overline{zw} = \bar{z} \bar{w}$,
5. $\overline{\bar{z}} = z$.

Demostración. Es un ejercicio para el lector, para el cual basta expresar los números complejos en la forma $z = a + bi$ y $w = c + di$ y aplicar (1.3), (1.5) y (1.6). $\square$

Sigue una propiedad fundamental que combina las funciones definidas en (1.5) y (1.6).

Proposición 1.1.3. *Dado $z \in \mathbb{C}$ tenemos:*

$$|z|^2 = z\bar{z}. \quad (1.7)$$

Demostración. Si $z = a + bi$ entonces

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (a + bi)(a - bi) = (a^2 + b^2) + (-ab + ba)i = \\ &= (a^2 + b^2) + 0i = a^2 + b^2 = |z|^2. \end{aligned}$$

$\square$

Las siguientes propiedades se pueden demostrar sin expresar el número complejo en la forma $a + bi$.

Proposición 1.1.4. *Dados $z, w \in \mathbb{C}$ tenemos:*

1. $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ (para $z \neq 0$),
2. $|zw| = |z| |w|$,
3. $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$ (para $w \neq 0$),
4. $|\bar{z}| = |z|$,
5. $|-z| = |z|$.

Demostración. Probamos la igualdad (2). Utilizando la identidad (1.7) tenemos

$$|zw|^2 = zw \overline{zw}$$

y por la **proposición 1.1.2** numeral (4), usando las propiedades conmutativa y asociativa, concluimos la demostración. Las otras igualdades quedan como ejercicio. $\square$

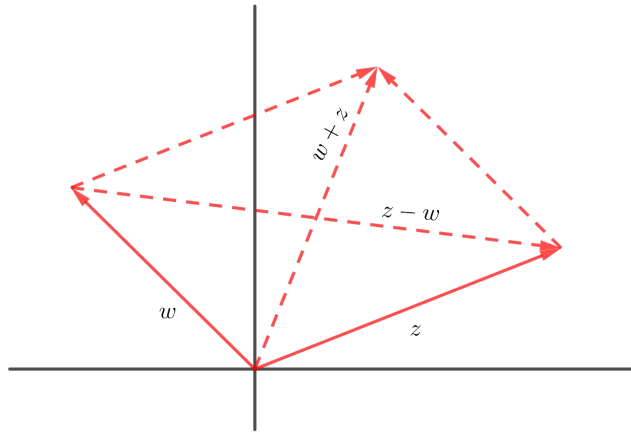
1.2. Representación rectangular

Podemos identificar cada $z = a + bi \in \mathbb{C}$ con un único punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, de manera que sus partes real e imaginaria son también sus coordenadas cartesianas. Ahora, la suma de números complejos es la suma del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, y claramente $|z - w|$ es la longitud del segmento entre z y w . También se tiene la *ley del paralelogramo*: la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales (ver la **Figura 1**).

Proposición 1.2.1. *Dados $z, w \in \mathbb{C}$ tenemos:*

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2). \quad (1.8)$$

Figura 1: Representación gráfica de suma y resta de dos números complejos



Demostración. En efecto, por (1.7) tenemos:

$$|z + w|^2 = (z + w)\overline{(z + w)},$$

luego, por la **proposición 1.1.2** numeral (3) y la propiedad distributiva obtenemos:

$$|z + w|^2 = |z|^2 + 2\Re(z\bar{w}) + |w|^2. \quad (1.9)$$

De la misma manera:

$$|z - w|^2 = |z|^2 - 2\Re(z\bar{w}) + |w|^2, \quad (1.10)$$

y al sumar (1.9) y (1.10) se obtiene la igualdad (1.8). $\square \square$

Como puede esperarse a partir de la interpretación vectorial, también es válida la desigualdad triangular.

Proposición 1.2.2. *Dados $z, w \in \mathbb{C}$ tenemos:*

$$|z + w| \leq |z| + |w|. \quad (1.11)$$

Demostración. En efecto, $(\Re z)^2 \leq (\Re z)^2 + (\Im z)^2 = |z|^2$ y de aquí $|\Re z| \leq |z|$, que es equivalente a:

$$-|z| \leq \Re z \leq |z|. \quad (1.12)$$

Cabe anotar que la parte imaginaria también satisface esta propiedad. Ahora:

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= |z|^2 + 2\Re(z\bar{w}) + |w|^2 && \text{por (1.9)} \\ &\leq |z|^2 + 2|z|\bar{w}| + |w|^2 && \text{por (1.12)} \\ &= |z|^2 + 2|z||\bar{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

De aquí llegamos a (1.11). □

Como consecuencia, dados $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tenemos que:

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|.$$

Para demostrarlo aplicamos la desigualdad triangular a $|z_1 - z_2| = |(z_1 - z_3) + (z_3 - z_2)|$. Otra consecuencia inmediata, cuya verificación se deja como ejercicio, es

$$|z - w| \leq |z| + |w|.$$

Para terminar, la siguiente es otra desigualdad muy útil.

Proposición 1.2.3. *Dados $z, w \in \mathbb{C}$ tenemos:*

$$||z| - |w|| \leq |z - w|. \quad (1.13)$$

Demostración. Por un lado $|z| = |(z - w) + w| \leq |z - w| + |w|$, esto es:

$$|z| - |w| \leq |z - w|; \quad (1.14)$$

y, por otra parte,

$$|w| = |(w - z) + z| \leq |w - z| + |z| = |z - w| + |z|$$

de donde $|w| - |z| \leq |z - w|$, y factorizando el signo llegamos a

$$|z| - |w| \geq -|z - w|. \quad (1.15)$$

De (1.14) y (1.15) llegamos a

$$-|z - w| \leq |z| - |w| \leq |z - w|,$$

que equivale a la desigualdad (1.13). $\square$

1.3. Representación polar

Podemos representar los números complejos no nulos en coordenadas polares (r, θ) donde r es la distancia al origen y θ es el ángulo (en radianes) comprendido entre el eje real positivo y el segmento determinado por el complejo y el origen del plano, como se puede ver en la **Figura 2**.

Dadas las coordenadas polares r y θ , las coordenadas cartesianas se determinan por las igualdades:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta, \\y &= r \operatorname{sen} \theta.\end{aligned}$$

Luego

$$z = x + yi = r \cos \theta + i r \operatorname{sen} \theta = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = r \operatorname{cis} \theta,$$

donde se adopta la notación

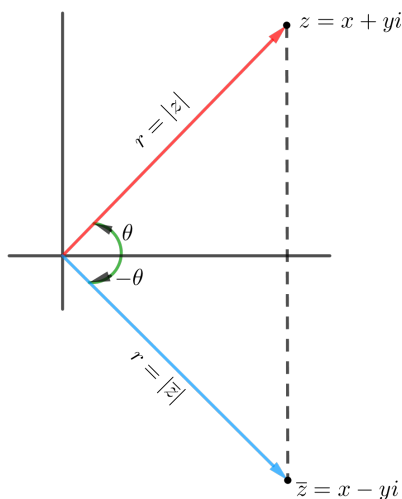
$$\operatorname{cis} \theta = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta,$$

la expresión

$$z = r \operatorname{cis} \theta$$

es llamada la *forma polar* del complejo no nulo z .

Figura 2: Representación polar de un complejo y su conjugado



Dadas las coordenadas cartesianas $x = \Re z$ e $y = \Im z$ de un complejo no nulo z , las coordenadas polares r, θ se determinan por:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

si $x \neq 0$, o

$$r = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2},$$

$$\tan \theta = \frac{\Im z}{\Re z}.$$

Así que $r = |z|$ es el valor absoluto. Por otra parte, el valor de θ se debe escoger según el cuadrante al cual pertenece z , este número es el ángulo formado por el eje de las x y el vector formado por el origen del plano y el punto que representa z . También se denota $\theta = \arg z$ y se denomina *argumento*. Si bien infinitos valores corresponden al mismo ángulo, el argumento *principal* satisface la condición $-\pi < \arg z \leq \pi$.

Proposición 1.3.1. *Dados dos complejos no nulos en forma polar $z_1 = r_1 \operatorname{cis} \theta_1$ y $z_2 = r_2 \operatorname{cis} \theta_2$, su producto es:*

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2). \quad (1.16)$$

De esta manera, en particular,

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad \text{y} \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2. \quad (1.17)$$

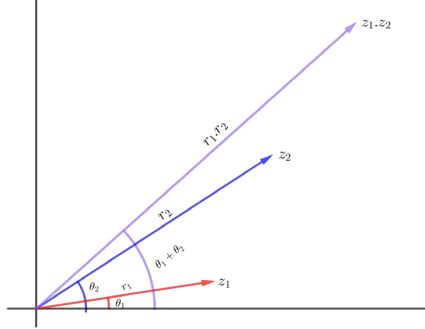
Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (r_1 \operatorname{cis} \theta_1)(r_2 \operatorname{cis} \theta_2) \\ &= r_1 r_2 \operatorname{cis} \theta_1 \operatorname{cis} \theta_2 \\ &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1)] \\ &= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)) \\ &= r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned}$$

En la penúltima línea utilizamos las identidades trigonométricas para la suma de ángulos de las funciones coseno y seno, respectivamente. $\square$

La **Figura 3** muestra el producto de dos números complejos.

Figura 3: Producto de dos números complejos



Proposición 1.3.2. *Dados dos complejos no nulos $z_1 = r_1 \operatorname{cis} \theta_1$ y $z_2 = r_2 \operatorname{cis} \theta_2$, su cociente es:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \operatorname{cis} \theta_1}{r_2 \operatorname{cis} \theta_2} = r_1 r_2^{-1} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2). \quad (1.18)$$

De esta manera, en particular,

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{y} \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2. \quad (1.19)$$

Demostración. Utilizando el hecho de que la función coseno es una función par y la función seno es una función impar (esto es: $\cos(-x) = \cos(x)$, $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$), tenemos:

$$\frac{1}{z_2} = \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{r_2(\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2)}{r_2^2} = r_2^{-1}(\cos(-\theta_2) + i \operatorname{sen}(-\theta_2)).$$

Esto es:

$$\frac{1}{z_2} = r_2^{-1} \operatorname{cis}(-\theta_2) \quad (1.20)$$

Combinando (1.20) con (1.16) se obtiene el resultado. $\square$

Proposición 1.3.3. *Dados los complejos no nulos $z_i = r_i \operatorname{cis} \theta_i$, $1 \leq i \leq n$, tenemos:*

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) \quad (1.21)$$

Demostración. Por inducción, a partir de la **proposición 1.3.1**. Los detalles se dejan como ejercicio para el lector. $\square$

Si todos los números elegidos en la proposición 1.3.3 son iguales, esto es

$$z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$$

con $z = r \operatorname{cis} \theta$, entonces obtenemos:

$$z^n = r^n \operatorname{cis} n\theta. \quad (1.22)$$

La **ecuación** (1.22) se cumple para todo $n \in \mathbb{Z}$, ya que en la **proposición 1.3.2** se demostró que $z^{-1} = r^{-1} \operatorname{cis}(-\theta)$, y si $n < 0$ tenemos $z^n = (z^{-1})^{-n}$. Cuando $|z| = 1$ obtenemos la célebre **fórmula de de Moivre**,

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta. \quad (1.23)$$

Utilizando la **ecuación** (1.22) podemos establecer una fórmula para encontrar raíces arbitrarias de números complejos. Dado un complejo no nulo $a \in \mathbb{C}$, buscamos un número complejo z tal que

$$z^n = a.$$

Utilizando la forma polar, si $z = |z| \operatorname{cis} \theta$ y $a = |a| \operatorname{cis} \alpha$, entonces por la **ecuación** (1.22) es:

y de esta igualdad tenemos:

$$|z| = \sqrt[n]{|a|} \quad \text{y} \quad \theta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \quad \text{con} \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Así hemos demostrado el siguiente resultado.

Proposición 1.3.4. *Para cualquier entero positivo n , dado un complejo no nulo $a = |a| \operatorname{cis} \alpha$ sus raíces n -ésimas están dadas por la fórmula*

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} \operatorname{cis} \frac{\alpha + 2k\pi}{n}, \quad (1.24)$$

donde k recorre los n valores enteros, $0 \leq k \leq n-1$.

Corolario 1.3.1. *Las raíces n -ésimas de la unidad están dadas por:*

$$z_k = \operatorname{cis} \frac{2k\pi}{n}, \quad 0 \leq k \leq n-1. \quad (1.25)$$

Demostración. En efecto, para la unidad 1 se tiene $|1| = 1$ y $\arg 1 = 0$, luego en (1.24) queda:

$$z_k = \sqrt[n]{1} \operatorname{cis} \frac{0 + 2k\pi}{n} = \operatorname{cis} \frac{2k\pi}{n}. \quad \square$$

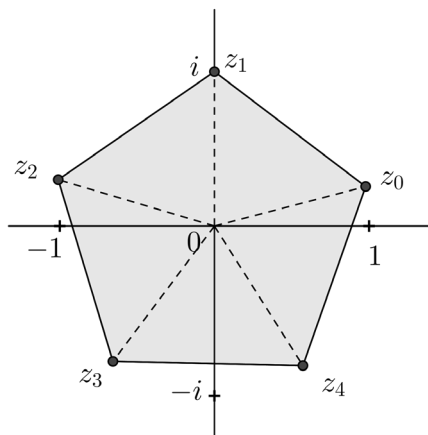
Por ejemplo, las raíces cúbicas de la unidad son:

$$\begin{aligned} z_0 &= \operatorname{cis} \frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1 + 0i = 1, \\ z_1 &= \operatorname{cis} \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z_2 &= \operatorname{cis} \frac{2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Se observa que, geométricamente, las raíces cúbicas de la unidad representan los vértices de un triángulo equilátero. En general, las

raíces n -ésimas de cualquier número complejo no nulo son los vértices de un polígono regular de n lados. Por ejemplo, las raíces quintas de i son los vértices de un pentágono regular (ver la **Figura 4**).

Figura 4: Pentágono con vértices las raíces quintas de i



1.4. Geometría en el plano complejo

Diversas figuras de la geometría plana se pueden expresar con sencillez mediante ecuaciones de variable compleja.

1.4.1. La recta

Si L es una recta en el plano $\mathbb{C}$, de la geometría analítica elemental sabemos que L está completamente determinada por un punto a en L y un vector dirección $b \neq 0$, de la siguiente manera:

$$L = \{z \in \mathbb{C} \mid z = a + tb, t \in \mathbb{R}\}. \quad (1.26)$$

Despejando en (1.26), tenemos

$$t = \frac{z - a}{b}$$

y como $t \in \mathbb{R}$, podemos utilizar esta última igualdad para expresar la recta como:

$$L = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \Im \frac{z - a}{b} = 0 \right\}. \quad (1.27)$$

Esto se generaliza como sigue.

Proposición 1.4.1. *En el plano complejo, toda recta se puede expresar mediante una ecuación de la forma*

$$\Re(\alpha z + \beta) = 0,$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ con $\alpha \neq 0$, o bien mediante una ecuación de la forma

$$\Im(\alpha' z + \beta') = 0,$$

donde $\alpha', \beta' \in \mathbb{C}$ con $\alpha' \neq 0$.

Demostración. Haciendo $\alpha = a_1 + ia_2$, $\beta = b_1 + ib_2$, $z = x + iy$ tenemos que $\alpha z + \beta = (a_1x - a_2y + b_1) + i(a_2x + a_1y + b_2)$. En consecuencia, la igualdad $\Re(\alpha z + \beta) = 0$ equivale a $a_1x - a_2y + b_1 = 0$, que es la ecuación de una recta porque a_1, a_2 no son ambos cero dado que $\alpha \neq 0$. Por otro lado, como $\Re(iw) = -\Im(w)$, la segunda ecuación implica $\Re(i\alpha' z + i\beta') = \Re(i(\alpha' z + \beta')) = -\Im(\alpha' z + \beta') = 0$, que también corresponde a una recta por la primera parte. $\square$

El mismo cálculo permite concluir que los siguientes conjuntos son los semiplanos asociados a la recta con ecuación $\Re(\alpha z + \beta) = 0$:

$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(\alpha z + \beta) > 0\}, \quad K = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(\alpha z + \beta) < 0\}. \quad (1.28)$$

Podemos encontrar otra ecuación compleja de una recta en términos de la función conjugado.

Proposición 1.4.2. *En el plano complejo, toda recta se puede expresar mediante una ecuación de la forma*

$$\overline{\alpha z + \beta} = \alpha z + \beta,$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ con $\alpha \neq 0$.

Demostración. Para cualquier complejo $w \in \mathbb{C}$ tenemos $\overline{w} = w$ si y solo si $w - \overline{w} = 0$, si y solo si $2i\Im w = 0$, si y solo si $\Im w = 0$. De esta manera, $\overline{\alpha z + \beta} = \alpha z + \beta$ si y solo si $\Im(\alpha z + \beta) = 0$, lo cual por la **proposición 1.4.1** corresponde a una recta en el plano. $\square$

Aún hay una tercera ecuación de la recta, en términos del valor absoluto. Interpretando el valor absoluto de la diferencia entre dos complejos como la distancia entre ellos, podemos considerar los puntos equidistantes de dos puntos fijos distintos.

Proposición 1.4.3. *Dados dos puntos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ con $z_1 \neq z_2$, la recta mediatriz del segmento que los une se puede expresar mediante la ecuación*

$$|z - z_1| = |z - z_2|.$$

Demostración. En efecto, $|z - z_1| = |z - z_2|$ si y solo si $|z - z_1|^2 = |z - z_2|^2$, si y solo si $|z|^2 - 2\Re(z\overline{z_1}) + |z_1|^2 = |z|^2 - 2\Re(z\overline{z_2}) + |z_2|^2$ (véase la **ecuación (1.10)**), si y solo si $2\Re(z(\overline{z_2} - \overline{z_1})) + |z_1|^2 - |z_2|^2 = 0$, si y solo si:

$$\Re\left(\left(\overline{z_2 - z_1}\right)z + \frac{|z_1|^2 - |z_2|^2}{2}\right) = 0, \quad (1.29)$$

ya que $\frac{|z_1|^2 - |z_2|^2}{2}$ es un número real. Pero (1.29) es la ecuación de una recta por **proposición 1.4.1**. Si $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ y $z = x + iy$, entonces la **ecuación (1.29)** adquiere la forma:

$$(x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y = \frac{x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2}{2},$$

que es una expresión cartesiana conocida para la mediatriz del segmento que une los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) . La verificación de los detalles se dejan como ejercicio. $\square$

Para estos mismos puntos, y utilizando la expresión (1.27) con $a = z_1$ y $b = z_2 - z_1$, la recta que pasa por los puntos z_1 y z_2 y que es perpendicular a la mediatriz encontrada (ver **Figura 5**), tiene ecuación

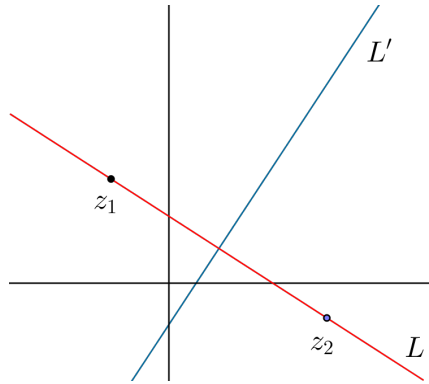
$$\Im(\overline{(z_2 - z_1)}z - \overline{(z_2 - z_1)}z_1) = 0.$$

Comparando con la **ecuación** (1.29), se observa que tienen el mismo coeficiente de z . Se puede comprobar como ejercicio que las siguientes rectas son perpendiculares:

$$\Re(\alpha z + \beta) = 0 \text{ y } \Im(\alpha z + \gamma) = 0,$$

para todo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ con $\alpha \neq 0$.

Figura 5: Mediatriz de la recta determinada por z_1 y z_2



Dados ahora dos puntos $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, tomando $a = z_0$ y $b = z_1 - z_0$, como al principio de esta sección, el *segmento* con punto inicial z_0 y punto final z_1 es

$$[z_0, z_1] = \{z_0 + t(z_1 - z_0) \mid 0 \leq t \leq 1\} = \{tz_1 + (1 - t)z_0 \mid 0 \leq t \leq 1\}.$$

En general, dados los puntos $z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, llamamos

$$[z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \dots \cup [z_{n-1}, z_n] = \bigcup_{k=1}^n [z_{k-1}, z_k]$$

una *poligonal* desde z_0 hasta z_n .

1.4.2. La circunferencia

La circunferencia con centro $z_0 \in \mathbb{C}$ (fijo) y radio $r > 0$ (real positivo) es el conjunto de todos los complejos z que distan r de z_0 , es decir, que satisfacen

$$|z - z_0| = r.$$

En efecto, si $z_0 = h + ki$ y $z = x + yi$ entonces $|z - z_0| = r$ si y solo si $|z - z_0|^2 = r^2$, si y solo si $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, que es la conocida ecuación cartesiana de la circunferencia. Si la diferencia $z - z_0$ se expresa en forma polar, resulta

$$z - z_0 = |z - z_0| \operatorname{cis} \theta = r \operatorname{cis} \theta,$$

de donde

$$z = z(\theta) = z_0 + r \operatorname{cis} \theta,$$

que es una expresión *paramétrica* de la circunferencia.

Por otro lado, se sigue que el interior de la circunferencia, esto es el *disco abierto* con centro z_0 y radio r , está dado por

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

Existen otras ecuaciones para especificar una circunferencia. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ con $\alpha \neq \beta$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda > 0$ y $\lambda \neq 1$. Veamos que la ecuación

$$\left| \frac{z - \alpha}{z - \beta} \right| = \lambda$$

representa un círculo. Este es un célebre teorema de Apolonio, véase la **Figura 6**, según el cual la circunferencia es el lugar geométrico de los puntos P para los cuales se cumple la razón $\frac{AP}{PB} = \lambda$, siendo λ una constante positiva.

Pero lo podemos ver también en coordenadas cartesianas. En efecto, si $\alpha = a_1 + ia_2, \beta = b_1 + ib_2, z = x + iy$, reemplazando en la ecuación dada reescrita de la forma $|z - \alpha|^2 = \lambda^2 |z - \beta|^2$, obtenemos:

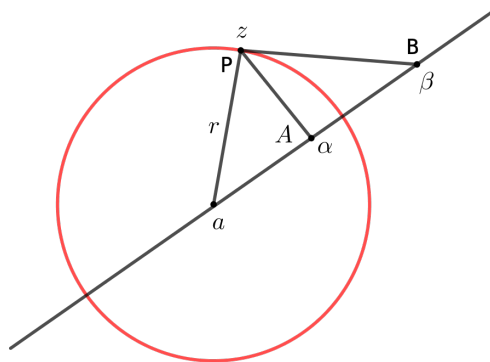
$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = \lambda^2(x - b_1)^2 + \lambda^2(y - b_2)^2.$$

De aquí, por cálculos elementales y completando cuadrados, llegamos a

$$\left(x - \frac{a_1 - \lambda^2 b_1}{1 - \lambda^2} \right)^2 + \left(y - \frac{a_2 - \lambda^2 b_2}{1 - \lambda^2} \right)^2 = k,$$

donde k es una constante positiva. Esta es la ecuación de una circunferencia.

Figura 6: La circunferencia de Apolonio



De nuevo, sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ dos puntos fijos diferentes. La ecuación de la *elipse* con focos z_1, z_2 es

$$|z - z_1| + |z - z_2| = k,$$

siendo k una constante real positiva.

Ejemplo 1.4.1. La igualdad $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$ representa la *elipse* $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$, como se puede verificar sustituyendo $z = x + yi$, y haciendo los cálculos correspondientes.

Por fin, la ecuación de la *hipérbola* con focos z_1, z_2 es

$$|z - z_1| - |z - z_2| = \pm k,$$

siendo k cualquier constante real no nula (el caso $k=0$ se reduce a la recta mediatriz).

Ejemplo 1.4.2. La igualdad $|z - 5i| - |z + 5i| = \pm 6$ representa la *hipérbola* con ecuación cartesiana $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$.

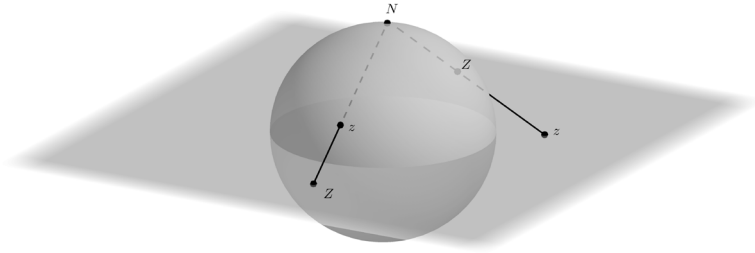
1.5. La esfera de Riemann

Con frecuencia aparecen funciones que se convierten en infinitas cuando la variable se aproxima a un punto dado. Para analizar esta situación introducimos el plano extendido el cual es $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. La representación geométrica de $\mathbb{C}_\infty$ es una esfera unidad en $\mathbb{R}^3$, que denotaremos $\mathcal{S}$, así que

$$\mathcal{S} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Sea $N = (0, 0, 1)$ el polo norte de $\mathcal{S}$, identificamos el plano complejo $\mathbb{C}$ con $\{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ y tenemos que el plano $\mathbb{C}$ corta a $\mathcal{S}$ a lo largo del ecuador (ver la **Figura 7**).

Figura 7: Representación esférica del plano extendido



Para cada punto $z \in \mathbb{C}$, consideremos la recta que va de N a z la cual toca a $\mathcal{S}$ en $Z \neq N$. En la **Figura 7** podemos ver que si $|z| > 1$ entonces Z está en el hemisferio norte, si $|z| < 1$ entonces Z está en el hemisferio sur, y cuando $|z| = 1$ tenemos que Z está en el ecuador de la esfera $\mathcal{S}$ y geoméricamente la posición de Z coincide con la de $z \in \mathbb{C}$. Cuando $|z| \rightarrow \infty$, tenemos que $Z \rightarrow N$, luego podemos identificar a N con ∞ en $\mathbb{C}_\infty$.

1.5.1. Relación de coordenadas de $\mathcal{S}$ y $\mathbb{C}$

Sea $z = x + iy$, y si $Z = (x_1, x_2, x_3)$ es el correspondiente punto en $\mathcal{S}$, encontremos x_1, x_2, x_3 en términos de x, y . Si se considera a z como el punto en $\mathbb{R}^3$ con coordenadas $(x, y, 0)$, de la geometría analítica tenemos que la línea en $\mathbb{R}^3$ que pasa por z y N está dada por

$$\{tN + (1-t)z \mid t \in \mathbb{R}\},$$

o por

$$\{((1-t)x, (1-t)y, t) \mid t \in \mathbb{R}\}. \quad (1.30)$$

Encontremos el valor de t cuando la línea (1.30) interseca a $\mathcal{S}$ en un punto diferente de N . Para este valor de t tenemos que $((1-t)x, (1-t)y, t) \in \mathcal{S}$, y como $\mathcal{S}$ es la esfera unidad tenemos que

$$\begin{aligned} (1-t)^2x^2 + (1-t)^2y^2 + t^2 &= 1 \\ (1-t)^2(x^2 + y^2) &= 1 - t^2 \\ (1-t)^2|z|^2 &= (1-t)(1+t) \\ (1-t)|z|^2 &= 1+t \\ |z|^2 - t|z|^2 &= 1+t \\ |z|^2 - 1 &= t(|z|^2 + 1). \end{aligned}$$

Como $z \neq \infty$ porque $N \neq Z$, tenemos

$$t = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

y, por lo tanto, reemplazando este valor en (1.30), llegamos a:

$$x_1 = \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}. \quad (1.31)$$

Por el **teorema 1.1.2**, esto lo podemos expresar como:

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{-i(z - \bar{z})}{|z|^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \quad (1.32)$$

y si el punto $Z \neq N$ es dado, podemos encontrar x, y en función

de (x_1, x_2, x_3) donde $t = x_3$:

$$\begin{aligned} x_1 &= (1-t)x, \quad \text{entonces} \quad x = \frac{x_1}{1-t} = \frac{x_1}{1-x_3}, \\ x_2 &= (1-t)y, \quad \text{entonces} \quad y = \frac{x_2}{1-t} = \frac{x_2}{1-x_3}. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Nota 1.5.1. *La correspondencia entre los puntos de $\mathcal{S}$ y $\mathbb{C}_\infty$ es llamada la **proyección estereográfica**.*

Ejemplo 1.5.1. *Si tenemos el complejo $z = 1+i$, lo podemos expresar en coordenadas de $\mathcal{S}$. Veamos: $|z|^2 + 1 = 3$ y $|z|^2 - 1 = 1$, luego por las ecuaciones (1.31) tenemos:*

$$x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3}, \quad x_3 = \frac{1}{3}.$$

Podemos decir que es el mismo complejo pero con uniforme diferente para jugar en $\mathcal{S}$.

1.5.2. Distancia en el plano extendido

Sean $z, z' \in \mathbb{C}_\infty$. La distancia entre z y z' es la distancia entre $Z, Z' \in \mathcal{S}$, luego si $Z = (x_1, x_2, x_3)$, $Z' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ entonces por la fórmula de distancia en el espacio:

$$[d(z, z')]^2 = (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2. \tag{1.34}$$

Desarrollando los cuadrados y teniendo en cuenta que $Z, Z' \in \mathcal{S}$, esto es, la suma de los cuadrados de sus componentes es 1, llegamos a

$$[d(z, z')]^2 = 2 - 2(x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3). \tag{1.35}$$

Ahora utilizando las ecuaciones (1.32), tenemos:

$$\begin{aligned} x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3 &= \\ &= \frac{(z + \bar{z})(z' + \bar{z}') - (z - \bar{z})(z' - \bar{z}') + (|z|^2 - 1)(|z'|^2 - 1)}{(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Realizando los productos de los paréntesis, cancelando y agrupando términos semejantes llegamos a:

$$x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3 = \frac{2(z\bar{z}' + \bar{z}z') + |z|^2|z'|^2 - |z|^2 - |z'|^2 + 1}{(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1)}.$$

Como $z\bar{z}' + \bar{z}z' = z\bar{z}' + \overline{z\bar{z}'} = 2\Re(z\bar{z}')$, tenemos que

$$x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3 = \frac{4\Re(z\bar{z}') + |z|^2|z'|^2 - |z|^2 - |z'|^2 + 1}{(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1)}.$$

Sumando y restando $|z|^2, |z'|^2$ en el numerador y agrupando términos obtenemos

$$\begin{aligned} x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3 &= \\ &= \frac{-2(|z|^2 - 2\Re(z\bar{z}') + |z'|^2) + (|z|^2 + |z'|^2 + |z|^2|z'|^2 + 1)}{(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1)} = \\ &= \frac{-2|z - z'|^2 + (1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}{(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1)}, \quad (1.36) \end{aligned}$$

y reemplazando (1.36) en (1.35) tenemos:

$$\begin{aligned} [d(z, z')]^2 &= 2 - 2 \left(\frac{-2|z - z'|^2 + (1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}{(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1)} \right) \\ &= \frac{2(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1) - 2(-2|z - z'|^2 + (1 + |z|^2)(1 + |z'|^2))}{(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1)} \\ &= \frac{4|z - z'|^2}{(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1)}. \end{aligned}$$

De donde, finalmente,

$$d(z, z') = \frac{2|z - z'|}{[(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1)]^{\frac{1}{2}}}. \quad (1.37)$$

Cuando $Z' = N$, tenemos que:

$$\begin{aligned} [d(z, \infty)]^2 &= x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 1)^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2x_3 + 1 \\ &= 2 - 2x_3 \\ &= 2 - 2\left(\frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right) \\ &= \frac{2(|z|^2 + 1) - 2(|z|^2 - 1)}{|z|^2 + 1} \\ &= \frac{4}{|z|^2 + 1}, \end{aligned}$$

luego

$$d(z, \infty) = \frac{2}{(|z|^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}. \quad (1.38)$$

Ejemplo 1.5.2. Sea Λ un círculo contenido en $\mathcal{S}$. Entonces existe un único plano $P \subseteq \mathbb{R}^3$ con $P \cap \mathcal{S} = \Lambda$. De la geometría analítica tenemos que

$$P = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = l\},$$

donde $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ es un vector ortogonal a P y l es un número real. Podemos suponer que $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1$. Utilizando esta información es posible demostrar que si Λ contiene a N , entonces su proyección estereográfica en $\mathbb{C}$ es una línea recta, y en otro caso es una circunferencia.

Veamos. Si Λ pasa por $N = (0, 0, 1)$, de la ecuación del plano $0 \cdot \beta_1 + 0 \cdot \beta_2 + 1 \cdot \beta_3 = l$ resulta $\beta_3 = l$. Ahora utilizando las ecuaciones

(1.31) tenemos que:

$$\frac{2x\beta_1}{x^2 + y^2 + 1} + \frac{2y\beta_2}{x^2 + y^2 + 1} + \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\beta_3 =,$$

luego:

$$2x\beta_1 + 2y\beta_2 + x^2\beta_3 + y^2\beta_3 - \beta_3 = lx^2 + ly^2 + l$$

Factorizando los términos al cuadrado,

$$2x\beta_1 + 2y\beta_2 + x^2(\beta_3 - l) + y^2(\beta_3 - l) = l + \beta_3, \quad (1.39)$$

pero cuando Λ pasa por N tenemos que $\beta_3 = l$, luego

$$2x\beta_1 + 2y\beta_2 = l + \beta_3$$

Podemos llevar esta ecuación a la de una recta despejando y :

$$y = ax + b \text{ con } a = \frac{-\beta_1}{\beta_2}, b = \frac{l + \beta_3}{2\beta_2}.$$

Cuando Λ no pasa por N , tenemos por (1.39):

$$2\frac{\beta_1}{\beta_3 - l}x + 2\frac{\beta_2}{\beta_3 - l}y + x^2 + y^2 = \frac{l + \beta_3}{\beta_3 - l},$$

y formando cuadrados

$$\begin{aligned} \left(x^2 + 2\frac{\beta_1}{\beta_3 - l}x + \frac{\beta_1^2}{(\beta_3 - l)^2} \right) + \left(y^2 + 2\frac{\beta_2}{\beta_3 - l}y + \frac{\beta_2^2}{(\beta_3 - l)^2} \right) &= \\ &= \frac{\beta_1^2}{(\beta_3 - l)^2} + \frac{\beta_2^2}{(\beta_3 - l)^2} + \frac{l + \beta_3}{\beta_3 - l}, \end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{aligned}
 \left(x + \frac{\beta_1}{\beta_3 - l}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta_2}{\beta_3 - l}\right)^2 &= \frac{(\beta_3 + l)(\beta_3 - l) + \beta_1^2 + \beta_2^2}{(\beta_3 - l)^2} \\
 &= \beta_3^2 - l^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 \\
 &= \frac{1 - l^2}{(\beta_3 - l)^2}.
 \end{aligned}$$

Finalmente, llegamos a la ecuación

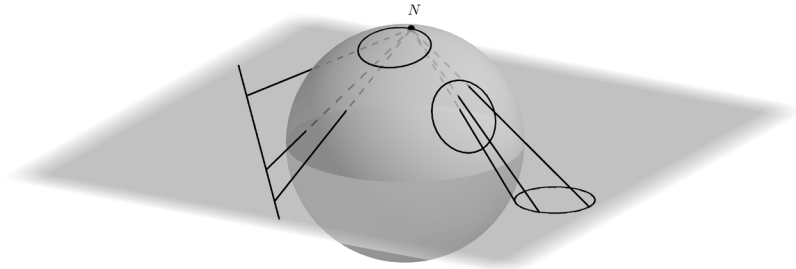
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

donde

$$a = -\frac{\beta_1}{\beta_3 - l}, \quad b = -\frac{\beta_2}{\beta_3 - l}, \quad r = \frac{\sqrt{1 - l^2}}{\beta_3 - l},$$

que es la ecuación de una circunferencia. En la **Figura 8** podemos ver la ilustración de este ejemplo.

Figura 8: Proyecciones estereográficas de círculos en el plano extendido



Ejercicios para el capítulo 1

1.1. Encuentre los siguientes valores:

a) $(2 + 3i)[3(4 + 3i) - 6(2 - 2i)]$ **b)** $(1 + i)^2$ **c)** $\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3$

1.2. Verifique:

$$\left| \frac{(3 - 4i)(2 + i)}{(2 - 4i)(6 + 8i)} \right| = \frac{1}{4}$$

1.3. Si $z = 3 - 4i$ y $w = -2 + 3i$, determine de manera analítica y gráfica:

a) $2z + 4w$ **b)** $3z - 2\bar{w}$ **c)** $z - \bar{w} - 4$

1.4. Identifique todos los puntos del plano complejo que satisfacen la condición dada. En cada caso, elabore un dibujo.

a) $\Re((1 - i)z) = 1$ **b)** $\Re(z^2) = -1$ **c)** $\Im(z^2) < 0$

1.5. Verifique las identidades siguientes:

a) $\Re(iz) = -\Im z$ **b)** $\Im(iz) = \Re z$

1.6. Expresé los siguientes números complejos en forma polar y elabore un dibujo:

a) $-7i$ **b)** $\frac{1 - i}{\sqrt{2}}$ **c)** $-2 + i\sqrt{12}$

1.7. Expresa los siguientes números complejos en la forma $x + yi$ con $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\text{a) } (1 + i)^{12} \qquad \text{b) } (-1 + i\sqrt{3})^{20} \qquad \text{c) } \frac{[8 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{8}]^3}{[2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{16}]^{10}}$$

1.8. Escriba en forma polar los siguientes números complejos:

$$\text{a) } \frac{(1 - i\sqrt{3})^7}{(\sqrt{3} - i)^3} \text{ (pase primero a forma polar ambos términos).}$$

$$\text{b) } 1 - \operatorname{sen} \alpha + i \cos \alpha \text{ (donde } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{).}$$

1.9. Encuentre todos los valores de cada una de las siguientes raíces complejas y elabore un dibujo:

$$\text{a) } \sqrt{18i}$$

$$\text{b) } \sqrt{\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}}$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{27i}$$

$$\text{d) } \sqrt[4]{2 - 2i\sqrt{3}}$$

$$\text{e) } \sqrt[5]{4 + 4i}$$

1.10. Haciendo:

$$w = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} = \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi}{n} \right),$$

pruebe que las raíces n -ésimas de la unidad pueden ser expresadas por $1, w, w^2, \dots, w^{n-1}$.

1.11. Encuentre todas las raíces complejas de las siguientes ecuaciones:

a) $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = 0$

b) $(z - 1)^n = (z + 1)^n$

c) $1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots + (-1)^n z^{2n} = 0$

1.12. Encuentre una ecuación compleja para la recta $y = mx + b$, donde $m, b \in \mathbb{R}$ con $m \neq 0$.

1.13. Encuentre una ecuación de la forma $|z - z_0| = r$ para la circunferencia de Apolonio

$$\frac{|z - i|}{|z - 4i|} = 2.$$

1.14. Encuentre una ecuación compleja para la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$.