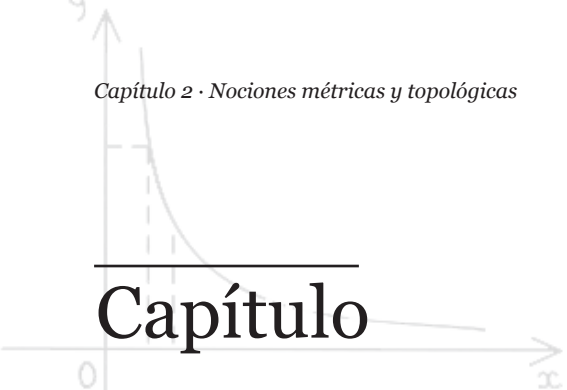




Capítulo

2

Nociones métricas y topológicas

Los conceptos de análisis y topología que se repasan en este capítulo ya se han estudiado en los cursos correspondientes. Para mayores detalles se pueden consultar los textos [1, 2, 3, 4].

2.1. Topología en el plano

2.1.1. Métrica y topología

El valor absoluto de la diferencia entre dos números complejos es, en realidad, una distancia en el sentido técnico.

Proposición 2.1.1. *La función*

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} : (z, w) \mapsto |z - w|$$

es una métrica en el plano complejo $\mathbb{C}$ porque para todo $z, w, u \in \mathbb{C}$, se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $|z - w| \geq 0$ y además $|z - w| = 0$ si y solo si $z = w$,
2. $|z - w| = |w - z|$,
3. $|z - w| \leq |z - u| + |u - w|$.

Demostración. Se sigue de las propiedades del valor absoluto. □

De esta manera, el plano complejo es un espacio métrico. Como en todas las estructuras tales, se adopta la siguiente notación para los discos abiertos y cerrados con centro $z_0 \in \mathbb{C}$ y radio real $\epsilon > 0$. Son respectivamente

$$B(z_0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \epsilon\}$$

$$\overline{B}(z_0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq \epsilon\}$$

La siguiente noción existe en cualquier espacio métrico.

Definición 2.1.1. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{C}$ del plano complejo es abierto si para cada $z_0 \in A$ existe un $\epsilon > 0$ tal que $B(z_0, \epsilon) \subseteq A$.

Ejemplo 2.1.1. Para dos números reales a, b con $a < b$, la franja vertical

$$F = \{z \in \mathbb{C} \mid a < \Re(z) < b\}$$

es un abierto. Pues dado $z_0 \in F$, sea $\epsilon = \min\{\Re(z_0) - a, b - \Re(z_0)\}$, entonces $B(z_0, \epsilon) \subseteq F$.

Proposición 2.1.2. La colección de abiertos en el plano es una topología porque satisface las siguientes condiciones:

1. El conjunto vacío $\emptyset$ y el plano $\mathbb{C}$ son abiertos;

2. Si A, B son abiertos entonces su intersección $A \cap B$ es abierto;
3. Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de abiertos entonces su unión $\bigcup_{i \in I} A_i$ es abierto.

Demostración.

1. No existe $z_0 \in \emptyset$ que incumpla la condición. Por otro lado, para cualquier $z_0 \in \mathbb{C}$ se tiene $B(z_0, 1) \subseteq \mathbb{C}$.

2. Sea $z_0 \in A \cap B$. Como A es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(z_0, \epsilon) \subseteq A$; como B es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B(z_0, \delta) \subseteq B$. Tomando $r = \min\{\epsilon, \delta\}$ se tiene $B(z_0, r) \subseteq A \cap B$.

3. Dado $z_0 \in \bigcup_{i \in I} A_i$, existe $j \in I$ tal que $z_0 \in A_j$. Como A_j es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(z_0, \epsilon) \subseteq A_j$ y, dado que $A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, también $B(z_0, \epsilon) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. $\square$

2.1.2. Conjuntos cerrados

Todas las nociones topológicas usuales se pueden considerar en el plano complejo.

Definición 2.1.2. Un conjunto $C \subseteq \mathbb{C}$ del plano complejo es cerrado si su complemento C^c es abierto.

Ejemplo 2.1.2. Cualquier disco cerrado $\overline{B}(z_0, \epsilon)$ es un conjunto cerrado. Pues si $z \notin \overline{B}(z_0, \epsilon)$ entonces $|z - z_0| > \epsilon$, de manera que $\delta = |z - z_0| - \epsilon > 0$ y además $B(z, \delta) \subseteq (\overline{B}(z_0, \epsilon))^c$. En efecto, para cada $w \in B(z, \delta)$ se tiene $|w - z| < \delta = |z - z_0| - \epsilon$, luego por la desigualdad triangular $\epsilon < |z - z_0| - |w - z| \leq |w - z_0|$.

Ejemplo 2.1.3. Cualquier conjunto finito es un conjunto cerrado. En efecto, dado $F = \{z_1, z_2, \dots, z_k\} \subseteq \mathbb{C}$, para cada $z \in F^c$ sea $\epsilon =$

$\min_{1 \leq i \leq k} |z - z_i|$. Como $z \neq z_i$ para cada i resulta $\epsilon > 0$, y además $B(z, \epsilon) \subseteq F^c$.

Proposición 2.1.3.

1. El conjunto vacío $\emptyset$ y el plano $\mathbb{C}$ son cerrados;
2. Si C, D son cerrados entonces su unión $C \cup D$ es cerrado;
3. Si $\{C_i\}_{i \in I}$ es una familia de cerrados entonces su intersección $\bigcap_{i \in I} C_i$ es cerrado.

Así los conjuntos $\emptyset$ y $\mathbb{C}$ son a la vez abiertos y cerrados (de hecho, son los únicos). También existen (muchos) conjuntos que no son abiertos ni cerrados.

Ejemplo 2.1.4. El conjunto $E = \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$ no es abierto y no es cerrado. En efecto, $0 \in E$ y no existe $\epsilon > 0$ tal que $B(0, \epsilon) \subseteq E$. De igual manera, por ejemplo, $i \in E^c$ y no existe $\epsilon > 0$ tal que $B(i, \epsilon) \subseteq E^c$.

Definición 2.1.3. El interior de un conjunto del plano $S \subseteq \mathbb{C}$ es el mayor abierto contenido en S , y se denota S^{int} .

En consecuencia, un conjunto es abierto si y solo si es igual a su interior.

Proposición 2.1.4. El interior de un conjunto arbitrario $S \subseteq \mathbb{C}$ es la unión de todos los abiertos contenidos en S . Por otro lado, para un punto z se tiene $z \in S^{\text{int}}$ si y solo si existe $\epsilon > 0$ tal que $B(z, \epsilon) \subseteq S$.

La demostración es la usual en la teoría de espacios métricos.

Definición 2.1.4. La adherencia de un conjunto del plano $S \subseteq \mathbb{C}$ es el menor cerrado que contiene a S , y se denota S^{adh} .

Luego, un conjunto es cerrado si y solo si es igual a su adherencia.

Proposición 2.1.5. *La adherencia de un conjunto arbitrario $S \subseteq \mathbb{C}$ es la intersección de todos los cerrados que contienen a S . Para un punto z se tiene $z \in S^{\text{adh}}$ si y solo si para todo $\epsilon > 0$ se cumple $S \cap B(z, \epsilon) \neq \emptyset$.*

Ejemplo 2.1.5. *El conjunto $R = \{p + qi \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$ de todos los complejos con partes real e imaginaria racionales satisface $R^{\text{int}} = \emptyset$ y $R^{\text{adh}} = \mathbb{C}$. En general, los conjuntos D tales que $D^{\text{adh}} = \mathbb{C}$ se denominan densos.*

2.1.3. Compactos y conexos

Definición 2.1.5. *Un conjunto $K \subseteq \mathbb{C}$ del plano complejo es compacto si para cada familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de abiertos tales que $K \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ existe una subfamilia finita $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}\}$ tal que $K \subseteq A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_k}$.*

La familia cuya unión contiene el conjunto se llama *cubrimiento abierto* del mismo, y la familia finita es un *subcubrimiento*. En el plano complejo existe otra caracterización de los conjuntos compactos.

Definición 2.1.6. *Un conjunto $A \subseteq \mathbb{C}$ del plano complejo es acotado si existe algún disco abierto $B(z_0, \epsilon)$ tal que $A \subseteq B(z_0, \epsilon)$.*

De manera alternativa, un conjunto $A \subseteq \mathbb{C}$ es acotado si y solo si existe algún real $M > 0$ tal que $|z| < M$ para cada $z \in A$.

Proposición 2.1.6. *En el plano complejo $\mathbb{C}$, un subconjunto K es compacto si y solo si es cerrado y acotado.*

Ejemplo 2.1.6. *Todo subconjunto finito es compacto (esto sucede en cualquier espacio topológico). Cualquier disco cerrado $\overline{B}(z_0, \epsilon)$ es compacto en $\mathbb{C}$, mientras ningún disco abierto $B(z_0, \epsilon)$ lo es.*

Por fin, los subconjuntos conexos son los que no se pueden separar mediante abiertos en distintas “piezas”.

Definición 2.1.7. *Un conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ del plano complejo es disconexo si $D = A \cup B$ donde A, B son conjuntos disjuntos no vacíos y abiertos en D , esto es, existen abiertos U, V del plano complejo tales que $A = D \cap U$ y $B = D \cap V$. Por el contrario, un conjunto $C \subseteq \mathbb{C}$ del plano complejo es conexo si no es disconexo.*

La siguiente noción se denomina *conexidad por arcos*.

Proposición 2.1.7. *En el plano complejo $\mathbb{C}$, un subconjunto C es conexo si y solo si para cada par de puntos de C existe una curva poligonal contenida completamente en C que los une.*

Ejemplo 2.1.7. *El conjunto $C = B(0, 1) \cup \overline{B}(3, 1)$ es disconexo.*

Definición 2.1.8. *Un conjunto no vacío $R \subseteq \mathbb{C}$ del plano complejo es una región si es abierto y conexo.*

Un conjunto del plano puede ser conexo y, aún así, tener “huecos”. Esa característica también se puede expresar con precisión.

Definición 2.1.9. *Un conjunto $S \subseteq \mathbb{C}$ del plano complejo es simplemente conexo si es conexo y además toda curva cerrada contenida en S puede contraerse de manera continua a un punto, sin salir del conjunto S .*

Ejemplo 2.1.8. *Cualquier disco abierto $B(z_0, \epsilon)$ es una región simplemente conexa. Una corona circular $\{z \in \mathbb{C} \mid a < |z - z_0| < b\}$, donde a, b son reales tales que $0 < a < b$, es una región que no es simplemente conexa.*

2.2. Sucesiones y series complejas

2.2.1. Sucesiones

Una *sucesión compleja* es una función de los números naturales en los complejos:

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C} : n \mapsto z(n) = z_n.$$

Una sucesión se denota $\{z_n\}_n$ o de manera simple $\{z_n\}$. Los índices n se pueden tomar desde 0 o desde 1, según convenga.

Una *subsucesión* de una sucesión compleja $\{z_n\}$ es una sucesión “contenida” en ella $\{z_{n_k}\}_k$ con la condición de que si $j < k$ entonces $n_j < n_k$. Esto corresponde a componer la sucesión, en tanto función, con una función estrictamente creciente de números naturales $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

La noción más importante en el estudio de las sucesiones es la de convergencia.

Definición 2.2.1. *Una sucesión compleja $\{z_n\}$ converge si existe un número complejo $z \in \mathbb{C}$ tal que para cualquier $\epsilon > 0$ (real) existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$ se tiene:*

$$|z_n - z| < \epsilon.$$

Es decir, $z_n \in B(z, \epsilon)$ salvo para un número finito de índices. En caso contrario, la sucesión *diverge*.

Proposición 2.2.1. *En la definición anterior el complejo z , si existe, es único y se llama el límite de la sucesión. En ese caso se escribe:*

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n.$$

Proposición 2.2.2. *Toda sucesión que converge es acotada, esto es, existe $M > 0$ (real) tal que $|z_n| < M$ para todo índice n .*

Al revés, como se verá en los ejemplos, no toda sucesión acotada converge.

Proposición 2.2.3. *Si la sucesión compleja $\{z_n\}$ converge a z , entonces toda subsucesión $\{z_{n_k}\}_k$ también converge, y su límite es el mismo z .*

Proposición 2.2.4 (Linealidad). *Si las sucesiones complejas $\{z_n\}$, $\{w_n\}$ convergen entonces para cualesquier complejos $a, b \in \mathbb{C}$ la sucesión $\{az_n + bw_n\}$ también converge, y además se tiene:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (az_n + bw_n) = a \lim_{n \rightarrow \infty} z_n + b \lim_{n \rightarrow \infty} w_n.$$

Supóngase ahora que para cada índice n se tiene $z_n = x_n + iy_n$ con $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ reales, esto es, $x_n = \Re(z_n)$ y $y_n = \Im(z_n)$.

Proposición 2.2.5. *La sucesión compleja $\{z_n\}$ converge si y solo si sus partes real $\{x_n\}$ e imaginaria $\{y_n\}$ convergen como sucesiones reales, y en ese caso se tiene:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Demostración. En un sentido, esto es consecuencia de las desigualdades:

$$\begin{aligned} |x_n - x| &= |\Re(z_n - z)| \leq |z_n - z|, \\ |y_n - y| &= |\Im(z_n - z)| \leq |z_n - z|. \end{aligned}$$

En el otro sentido, es consecuencia de la linealidad de los límites, expresada en la afirmación anterior. $\square$

Proposición 2.2.6. *Supóngase que la sucesión compleja $\{z_n\}$ converge a z .*

1. *La sucesión (real) $\{|z_n|\}$ converge a $|z|$.*
2. *La sucesión (compleja) $\{\overline{z_n}\}$ converge a $\overline{z}$.*

Demostración.

1. Porque $||z_n| - |z|| \leq |z_n - z|$.

2. Ya que $|\overline{z_n} - \overline{z}| = |\overline{z_n - z}| = |z_n - z|$. □

Ejemplo 2.2.1. La sucesión compleja $\{\frac{1}{n+i}\}$ converge a 0.

Ejemplo 2.2.2. Para un número complejo fijo $c \in \mathbb{C}$ se considera la sucesión $\{c^n\}$. Si $|c| < 1$, la sucesión converge a 0; si $|c| > 1$, la sucesión diverge porque no es acotada.

Ejemplo 2.2.3. Se observa que la sucesión $\{i^n\} = \{i^0, i^1, i^2, \dots\} = \{1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, \dots\}$ no converge, aunque es acotada. Sí tiene subsucesiones que convergen, por ejemplo $\{i^{4k}\}$ que es la sucesión constante 1.

Ejemplo 2.2.4. La sucesión $\{\frac{i^n}{n}\}$ converge a 0, aunque ningún término de la sucesión es igual a 0.

Ejemplo 2.2.5. Se considera la sucesión compleja $\{z_n\}$ definida por:

$$z_n = \begin{cases} i^k & \text{si } n = 2k; \\ \frac{1}{k} & \\ 0 & \text{si } n = 2k + 1. \end{cases}$$

Esto es, $\{z_n\} = \{0, i, 0, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{i}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \dots\}$. Esta sucesión converge a 0 y toma este valor infinitas veces.

En el plano complejo, diversas nociones topológicas se pueden expresar mediante la convergencia de sucesiones. Por ejemplo, para cualquier conjunto A de números complejos se tiene que un complejo z pertenece a su adherencia, $z \in A^{adh}$, si y solo si existe una sucesión de elementos de A que converge a z . En consecuencia, un subconjunto C de números complejos es cerrado si y solo si es cerrado para límites en el siguiente sentido: si $\{z_n\}$ es una sucesión de elementos de C , esto es $z_n \in C$ para cada índice n , y además $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$, entonces $z \in C$.

Por otro lado, un subconjunto K de números complejos es compacto si y solo si toda sucesión de elementos de K tiene alguna subsucesión convergente.

2.2.2. Series

De manera intuitiva, una *serie* es una suma infinita:

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + \dots$$

Para formalizar esta idea, se definen las *sumas parciales* de una sucesión:

$$\begin{aligned} s_1 &= z_1 \\ s_2 &= z_1 + z_2 \\ s_3 &= z_1 + z_2 + z_3 \\ s_4 &= z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \\ &\vdots \\ s_n &= s_{n-1} + z_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tal sucesión de sumas parciales puede o no converger.

Definición 2.2.2. Una serie de números complejos converge si existe el límite de la correspondiente sucesión de sumas parciales, que en ese caso se llama la suma de la serie y se denota:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n.$$

En caso contrario, la serie diverge.

Proposición 2.2.7. Si la serie compleja $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0.$$

Proposición 2.2.8 (Linealidad). Si las series $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ convergen entonces, para complejos $a, b \in \mathbb{C}$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (az_n + bw_n)$ converge y además se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (az_n + bw_n) = a \sum_{n=0}^{\infty} z_n + b \sum_{n=0}^{\infty} w_n.$$

Como antes, sean $x_n = \Re(z_n)$ y $y_n = \Im(z_n)$ para cada n .

Proposición 2.2.9. *La serie compleja $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge si y solo si sus partes real $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ e imaginaria $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ convergen como series reales, y en ese caso se tiene:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + i \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

Corolario 2.2.1. *Si la serie compleja $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge entonces la serie conjugada $\sum_{n=0}^{\infty} \overline{z_n}$ también converge, y además:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{z_n} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} z_n}.$$

En contraste con las sucesiones, la convergencia de una serie no implica la convergencia de la correspondiente serie de valores absolutos, como se verá en los ejemplos. La implicación recíproca sí es válida, lo cual constituye un primer criterio de convergencia.

Ejemplo 2.2.6 (Serie geométrica). *Para un número complejo $c \in \mathbb{C}$ fijo se considera la suma parcial:*

$$c^0 + c^1 + c^2 + c^3 + \cdots + c^n.$$

Como $(1 + c + c^2 + c^3 + \cdots + c^n)(1 - c) = 1 - c^{n+1}$, para $c \neq 1$ resulta:

$$c^0 + c^1 + c^2 + c^3 + \cdots + c^n = \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c}. \quad (2.1)$$

Para $|c| > 1$, la sucesión $\{c^{n+1}\}$ diverge luego la serie también. Cuando $|c| = 1$ no se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$, luego la serie diverge. Por

fin, si $|c| < 1$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} c^{n+1} = 0$ luego la sucesión (2.1) converge. En conclusión, para cada complejo $c \in \mathbb{C}$ con $|c| < 1$ resulta la serie geométrica convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n = \frac{1}{1-c}.$$

En particular, por ejemplo, $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{3}\right)^n = \frac{9+3i}{10}$.

Ejemplo 2.2.7. Se considera $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$. Esta serie converge porque:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} &= \frac{i}{1} - \frac{1}{2} - \frac{i}{3} + \frac{1}{4} + \frac{i}{5} - \frac{1}{6} - \frac{i}{7} + \dots \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots\right) + i \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right) \end{aligned}$$

y estas dos series reales convergen porque son alternantes cuyas sucesiones de valores absolutos son estrictamente decrecientes y convergen a cero. Por otro lado, la serie de valores absolutos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{i^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge.

2.2.3. Algunos criterios de convergencia

Existen algunos métodos que permiten establecer la convergencia de series.

Proposición 2.2.10 (Convergencia absoluta). *Dada la serie compleja $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, si la serie real de valores absolutos $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ converge entonces*

también la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge. En este caso, esta serie converge absolutamente.

Como ya se observó, el recíproco no es cierto. Por otro lado, este método se puede generalizar como sigue.

Proposición 2.2.11 (Criterio de comparación). *Si se tiene $|z_n| \leq b_n$, con $b_n > 0$ para cada índice n , y además la serie real $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, entonces la serie compleja $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge absolutamente.*

Proposición 2.2.12 (Criterio del cociente). *Supóngase que existe $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$, en ese caso se trata de un número real no negativo.*

- Si $l < 1$ entonces la serie compleja $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge;
- Si $l > 1$ entonces la serie compleja $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ diverge.

Proposición 2.2.13 (Criterio de la raíz). *Supóngase que existe $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|}$, en ese caso se trata de un número real no negativo.*

- Si $r < 1$ entonces la serie compleja $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge;
- Si $r > 1$ entonces la serie compleja $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ diverge.

2.2.4. Series de potencias

El estudio realizado con la serie geométrica se puede resumir como sigue.

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \begin{cases} \frac{1}{1-z} & \text{si } |z| < 1; \\ \text{diverge} & \text{si } |z| \geq 1. \end{cases}$$

En general, para un número complejo fijo $a \in \mathbb{C}$, una *serie de potencias* con centro a es una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n,$$

donde $z \in \mathbb{C}$ se considera variable. En seguida, se plantea el problema de establecer para cuáles valores de z la serie de potencias converge.

Proposición 2.2.14. *Si existe el límite*

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}, \quad (2.2)$$

entonces la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$ converge absolutamente para todo $z \in B(a, R)$, es decir, tal que $|z - a| < R$.

Proposición 2.2.15. *Si existe el límite*

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad (2.3)$$

entonces la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$ converge absolutamente para todo z tal que $|z - a| < R$.

El número real no negativo R dado por (2.2) y (2.3) es el **radio de convergencia** de la serie de potencias.

Ejemplo 2.2.8. En el caso de la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ se tiene $a = 0$ y $a_n = 1$ para cada n . Es claro que $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$, luego su radio de convergencia es 1.

Ejemplo 2.2.9. Para la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n z^n$ se tiene $a = 0$, $a_n = n$, luego el radio de convergencia es $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$.

Ejemplo 2.2.10. Para la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ es $a = 0$ y $a_n = \frac{1}{n!}$, de donde

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} n+1 = +\infty,$$

es decir, esta serie converge absolutamente para todo número complejo $z \in \mathbb{C}$.

Ejercicios para el capítulo 2

2.1. Dé ejemplos de una familia de abiertos del plano complejo $\mathbb{C}$ cuya intersección no es abierta, y de una familia de cerrados cuya unión no es cerrada.

2.2. a) Muestre que $(A \cup B)^{adh} = A^{adh} \cup B^{adh}$ para cualesquier subconjuntos $A, B \subseteq \mathbb{C}$ del plano complejo.

b) Dé ejemplos de subconjuntos $A, B \subseteq \mathbb{C}$ del plano complejo tales que $(A \cap B)^{adh} \neq A^{adh} \cap B^{adh}$.

2.3. Muestre que si un subconjunto $A \subseteq \mathbb{C}$ del plano complejo es conexo entonces su adherencia A^{adh} también es conexa.

2.4. Pruebe que un complejo $z \in \mathbb{C}$ pertenece a la adherencia de un subconjunto $A \subseteq \mathbb{C}$ si y solo si existe una sucesión de elementos de A que converge a z .

2.5. Verifique las expresiones siguientes de la serie geométrica.

$$\text{a)} \quad \frac{1}{az + b} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n}{b^{n+1}} z^n, \text{ para } |z| < \frac{|b|}{|a|}.$$

$$\text{b)} \quad \frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{b^{n+1}} - \frac{1}{a^{n+1}} \right) z^n, \text{ para } |z| < \min\{|a|, |b|\}.$$

$$\text{c)} \quad \frac{1}{b-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(b-a)^{n+1}} (z-a)^n, \text{ para } |z-a| < |b-a|.$$

2.6. Encuentre el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$$

$$\text{b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n$$

$$\text{c)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} z^n$$