

Capítulo 3

Funciones de variable compleja

A fin de construir un adecuado acervo de ejemplos, en este capítulo se estudian las funciones básicas en los números complejos. Se hace énfasis especial en su comportamiento geométrico, pues deben entenderse como transformaciones del plano.

3.1. Funciones elementales

3.1.1. Nociones generales

Una *función de variable compleja* está definida en un subconjunto D de números complejos y toma valores en los números complejos. De manera simbólica, es una función

$$f : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

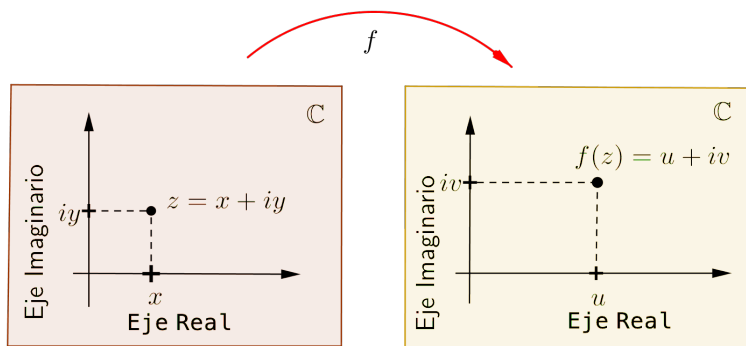
Si la variable es $z = x + yi$ entonces la parte real e imaginaria de la imagen $f(z)$, consideradas como funciones reales de dos variables

reales, se denotan

$$u, v : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

de manera que $f(x + yi) = u(x, y) + i v(x, y)$, ver **Figura 9**.

Figura 9: Representación de una función compleja



Las funciones de variable compleja no se pueden representar de manera gráfica como se hace con las funciones reales, luego su comportamiento geométrico se estudia mediante el efecto de la función sobre ciertos subconjuntos, en especial sobre las rectas horizontales y verticales. En las secciones siguientes se presentan las principales funciones de variable compleja, cuyo conocimiento será útil en el desarrollo del cálculo diferencial e integral complejo.

3.1.2. La función lineal

Tomando el nombre del cálculo real, una función compleja lineal tiene la forma $f(z) = az + b$ donde $a, b \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$. El dominio de esta función es todo el plano complejo. Para su estudio se considerarán varios casos.

- $f(z) = z + b$

Este caso corresponde al valor $a = 1$. Si $b = c + di$ entonces las funciones componentes son $u = x + c$, $v = y + d$. La imagen de una recta vertical $x = p$ es la recta vertical $u = p + c$; la imagen de una recta horizontal $y = s$ es la recta horizontal $v = s + d$. La imagen de cualquier figura es la misma figura, desplazada c hacia la derecha (si $c > 0$) y d hacia arriba (si $d > 0$), es decir, se trata de la traslación en el vector $(c, d) = b$. Esta función preserva las líneas rectas y los ángulos.

- $f(z) = a_1 z$ con $a_1 \in \mathbb{R}$ y $a_1 > 0$

En este caso las funciones componentes son $u = a_1 x$, $v = a_1 y$. La imagen de una recta vertical $x = p$ es la recta vertical $u = a_1 p$; la imagen de una recta horizontal $y = s$ es la recta horizontal $v = a_1 s$. La imagen de un rectángulo, o de cualquier figura, se obtiene multiplicando todas sus coordenadas por el mismo escalar a_1 . El efecto geométrico es una homotecia centrada en el origen. Si $a_1 > 1$ se trata de una dilatación o ampliación; si $a_1 = 1$, resulta la función idéntica; si $0 < a_1 < 1$ se tiene una contracción o reducción. Esta función también preserva las líneas rectas y los ángulos.

- $f(z) = a_2 z$ con $|a_2| = 1$

En su forma polar se tiene $a_2 = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$ para su argumento α , de manera que las funciones componentes de f son $u = x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha$, $v = x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha$. Estas igualdades se pueden expresar de manera matricial como sigue.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

La matriz de esta transformación lineal es una matriz de rotación, luego esta función corresponde a una rotación alrededor del origen en

un ángulo $\alpha = \text{Arg}(a_2)$. Nótese que si $z = |z|(\cos \theta + i \sen \theta)$ se tiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} f(z) &= a_2 z = (\cos \alpha + i \sen \alpha) |z| (\cos \theta + i \sen \theta) \\ &= |z| (\cos \theta + i \sen \theta) (\cos \alpha + i \sen \alpha) \\ &= |z| (\cos (\theta + \alpha) + i \sen (\theta + \alpha)) \end{aligned}$$

Así $f(z)$ tiene el mismo valor absoluto que z y su argumento aumenta en α . La imagen por esta función de una línea recta es también una línea recta, rotada un ángulo $\text{arg}(a_2)$ respecto al origen, así que esta función preserva las líneas rectas y los ángulos.

Combinando los análisis de los casos particulares, la función lineal $f(z) = az + b$ corresponde de manera simultánea a una homotecia con centro en el origen y factor $|a|$, una rotación alrededor del origen de ángulo $\text{Arg}(a)$ y una traslación en el vector b . La imagen por esta función de cualquier recta siempre es una recta, y ella preserva los ángulos.

3.1.3. La función conjugado

La función compleja *conjugado* está definida como $f(z) = \bar{z}$, su dominio es todo el plano complejo y sus funciones componentes son $u = x$, $v = -y$. La imagen de una recta vertical $x = p$ es la misma recta vertical $u = p$; la imagen de una recta horizontal $y = s$ es la recta horizontal $v = -s$. La imagen de cualquier figura es la misma figura reflejada de manera horizontal en el eje real. Esta función preserva todas las rectas y los ángulos.

Combinando esta función con la anterior se obtiene el resultado siguiente.

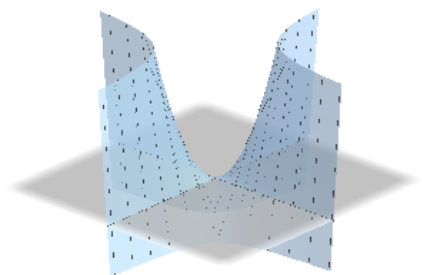
Proposición 3.1.1. *Las funciones complejas de la forma $f(z) = az + b$ y $g(z) = a\bar{z} + b$, donde $a, b \in \mathbb{C}$, dan cuenta de todos los movimientos de la geometría euclidiana en el plano: reflexiones, traslaciones, rotaciones y homotecias.*

3.1.4. La función cuadrática

El dominio de la función cuadrática $f(z) = z^2$ es todo el plano $\mathbb{C}$. Las funciones componentes son $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, ver gráfica en la **Figura 10a** y **Figura 10b**. La imagen de la recta vertical $x = a \neq 0$ es $u = a^2 - \frac{v^2}{4a^2} = \frac{4a^4 - v^2}{4a^2}$, esta es una parábola con el vértice $(a^2, 0)$ que se abre en el sentido negativo de u (“hacia la izquierda”) y corta el eje imaginario en $v = \pm 2a^2$. De manera similar, la imagen de la recta horizontal $y = c \neq 0$ es $u = \frac{v^2}{4c^2} - c^2 = \frac{v^2 - 4c^4}{4c^2}$, una parábola con el vértice $(-c^2, 0)$ que se abre en el sentido positivo de u y corta el eje imaginario en $v = \pm 2c^2$, ver la **Figura 11a**, y un rectángulo mediante $f(z) = z^2$ forma una figura en forma de hoja, ver la **Figura 11b**. Se nota que, aunque las rectas son perpendiculares, ambas parábolas tienen como eje, el eje real.

Figura 10: Partes imaginaria y real de la función $f(z) = z^2$.

(a) Parte imaginaria de z^2 .



(b) Parte real de z^2 .

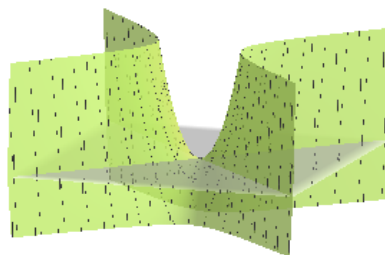
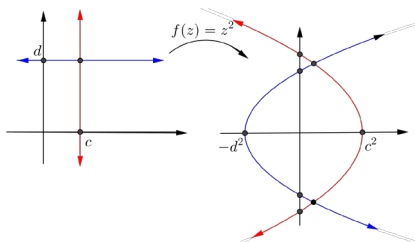
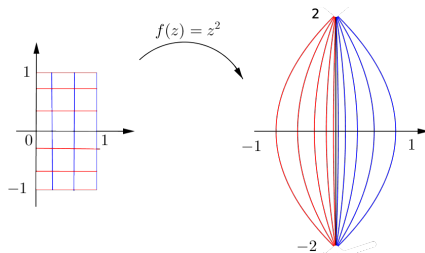


Figura 11: Imágenes de rectas y un rectángulo mediante la función $f(z) = z^2$

(a) Recta horizontal y vertical



(b) Rectángulo $[0, 1] \times [-1, 1]$



Por otro lado, la imagen de la recta vertical $x = 0$ es la semirrecta $v = 0$, $u \leq 0$, se nota que ambas semirrectas originales se “doblan” una sobre la otra en una sola semirrecta imagen. La imagen de la recta horizontal $y = 0$ es la semirrecta $v = 0$, $u \geq 0$; la imagen de la recta diagonal $y = x$ es la semirrecta $u = 0$, $v \geq 0$; la imagen de la recta diagonal $y = -x$ es la semirrecta $u = 0$, $v \leq 0$; en general, la imagen de la recta $y = mx$ con $m \neq 1$ es la semirrecta $v = \frac{2m}{1-m^2}u$ donde $u \geq 0$ cuando $|m| < 1$ y $u \leq 0$ cuando $|m| > 1$. En coordenadas polares, si $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ entonces se tiene

$$f(z) = z^2 = |z|^2(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^2 = |z|^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta).$$

Así pues, por la función cuadrática *el valor absoluto se eleva al cuadrado y el argumento se duplica*, es decir, esta función envuelve el plano dos veces sobre sí mismo alrededor del origen. Contrario a la función cuadrática real, la función cuadrática compleja es sobreyectiva: el origen es imagen solo de sí mismo mientras todo punto distinto del origen es imagen de exactamente dos números complejos, a saber, sus dos raíces cuadradas.

De manera similar se puede estudiar el comportamiento geométrico de cualquier función potencia $f(z) = z^n$, que envuelve el plano n veces sobre sí mismo alrededor del origen.

3.2. Las transformaciones de Möbius

3.2.1. Funciones racionales

Una *función racional* es el cociente de dos polinomios:

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_mz^m}{b_0 + b_1z + b_2z^2 + \cdots + b_nz^n}.$$

Aquí $q(z) \neq 0$, es decir, al menos uno de los coeficientes b_i es diferente de cero. El dominio de esta función $r(z)$ es todo el plano excepto los finitos puntos z_0 en los cuales $q(z_0) = 0$, esto es, las raíces del denominador, que son a lo más n .

Un caso particular es la función inverso multiplicativo que se estudiará en seguida. Otro caso especial, un poco mas general, es la función racional cuyo numerador y denominador son ambos de grado menor o igual a 1. De manera explícita, se trata de una función s definida como

$$s(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ son números complejos fijos y c, d no son a la vez cero. Cuando $c = 0$ se tiene $s(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$, y se trata de una función lineal. Cuando $c \neq 0$, resulta

$$s(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) + b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(cz + d)}.$$

Así pues, si $ad - bc = 0$ entonces s es una función constante (a saber, $\frac{a}{c}$ cuando $c \neq 0$ y $\frac{b}{d}$ en caso contrario). El caso más interesante ocurre cuando $ad - bc \neq 0$, que son las llamadas transformaciones de Möbius que se estudiarán luego.

3.2.2. La función inverso multiplicativo

La función *inverso multiplicativo* está definida como

$$f(z) = \frac{1}{z}.$$

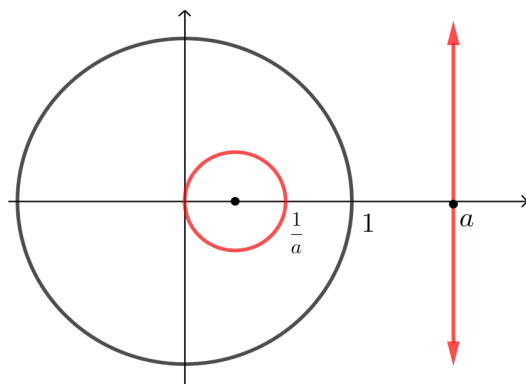
Su dominio es la región $D = \mathbb{C} - \{0\}$ de todos los complejos no nulos. Las funciones componentes son $u = \frac{x}{x^2+y^2}$ y $v = -\frac{y}{x^2+y^2}$, ambas tienen como dominio el plano excepto el origen $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Si $z = |z|(\cos \theta + i \sen \theta)$ entonces

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}(\cos(-\theta) + i \sen(-\theta)) = \frac{1}{|z|}(\cos \theta - i \sen \theta).$$

El efecto geométrico de esta función es una reflexión en la circunferencia unidad S^1 seguida de una reflexión en el eje real.

Se nota que en este caso $u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2 + y^2}$, de manera que también $x^2 + y^2 = \frac{1}{u^2 + v^2}$. Por una parte, esto implica que $x = u(x^2 + y^2) = \frac{u}{u^2 + v^2}$, $y = -\frac{v}{u^2 + v^2}$ lo cual muestra, de otra manera, que esta función es igual a su propia inversa. Por otro lado, la imagen de la recta vertical $x = a \neq 0$ es $u = \frac{a}{x^2 + y^2} = a(u^2 + v^2)$, de donde $u^2 + v^2 = \frac{u}{a}$, esto es $(u - \frac{1}{2a})^2 + v^2 = \frac{1}{4a^2}$, esta es una circunferencia con centro $(\frac{1}{2a}, 0)$ y radio $\frac{1}{2a}$, de manera que pasa por el origen aunque este punto no pertenece al recorrido de la función. En la **Figura 12** se muestran la recta y su imagen en un mismo plano.

Figura 12: Imagen de una recta por la función $f(z) = \frac{1}{z}$



3.2.3. Transformaciones de Möbius

Definición 3.2.1. Una transformación de Möbius es una función de variable compleja S definida como:

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ son números complejos fijos tales que $ad - bc \neq 0$.

El dominio de esta función es la región $D = \mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\}$ cuando $c \neq 0$, y todo el plano complejo en caso contrario. Como ejemplo, ya se observó que toda función lineal es una transformación de Möbius, cuando $c = 0$. La función inverso multiplicativo también es una transformación de Möbius, cuando $a = d = 0$ y $b = c \neq 0$.

Proposición 3.2.1. *Toda transformación de Möbius o es una función lineal o es la compuesta de una función lineal, la función inverso multiplicativo y otra función lineal, en ese orden.*

Demostración. Si $c = 0$ se tiene una función lineal. Si $c \neq 0$ entonces

$$z \mapsto cz + d \mapsto \frac{1}{cz + d} \mapsto \left(\frac{bc - ad}{c} \right) \frac{1}{cz + d} + \frac{a}{c} = \frac{az + b}{cz + d},$$

y la transformación de Möbius es la compuesta indicada. □

Así pues, según el análisis geométrico de las funciones lineales y la función inverso multiplicativo, la imagen de una recta o una circunferencia por cualquier transformación de Möbius es una recta o una circunferencia. Por ejemplo, la célebre *transformación de Cayley* es la transformación de Möbius

$$C(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

que tiene como característica peculiar que transforma el semiplano superior $\Im m(z) > 0$ en $B(0, 1)$, el interior del disco unitario $|z| < 1$ (véase el ejercicio 3.6).

Proposición 3.2.2. *Si todos los coeficientes de una transformación de Möbius se multiplican por una constante no nula, la función no cambia.*

Demostración. Pues para $\lambda \neq 0$,

$$\frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d} = \frac{\lambda(az + b)}{\lambda(cz + d)} = \frac{az + b}{cz + d}.$$

□

Corolario 3.2.1. *En una transformación de Möbius puede tomarse $ad - bc = 1$.*

Demostración. Basta multiplicar todos los coeficientes de la transformación dada por

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{ad - bc}}.$$

□

Proposición 3.2.3. *Excepto la función idéntica, una transformación de Möbius tiene a lo más dos puntos fijos.*

Demostración. La ecuación $S(z) = z$ equivale a

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

Si $c \neq 0$, esta es una ecuación cuadrática que, en los complejos, tiene una o dos soluciones; si $c = 0$ pero $a \neq d$ entonces es una ecuación lineal con una única solución; por fin, si $c = 0$ y $a = d$ entonces la ecuación se reduce a $-b = 0$, que no tiene solución si $b \neq 0$ y que tiene infinitas si $b = 0$. En este último caso la transformación de Möbius es $S(z) = z$. □

En consecuencia, por ejemplo, la función conjugado no es una transformación de Möbius, porque no es la función idéntica y tiene infinitos puntos fijos, a saber, todos los reales.

Proposición 3.2.4.

1. *La compuesta de dos transformaciones de Möbius es una transformación de Möbius.*
2. *Toda transformación de Möbius es biyectiva, y su función inversa también es una transformación de Möbius.*

Demostración.

1. La compuesta de $S(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ y $T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ es

$$ST(z) = \frac{(a\alpha + b\delta)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)}.$$

2. La inversa de $S(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ es $S^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$. □

Corolario 3.2.2. *Las transformaciones de Möbius constituyen un grupo con la composición.*

Se nota que la composición de transformaciones de Möbius corresponde al producto matricial, y que el determinante del producto es el producto de los determinantes. Por otro lado, la función inversa también corresponde a la inversa matricial. Así se observa que el grupo de transformaciones de Möbius es isomorfo al grupo lineal especial $SL_2(\mathbb{C})$ constituido por todas las matrices complejas 2×2 con determinante 1.

3.3. La función exponencial

Del cálculo real recordamos las siguientes expresiones en series de potencias para las funciones básicas.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (3.1)$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (3.2)$$

Según los resultados de la sección 2.2.4, si la serie (3.1) se considera en los números complejos entonces ella converge absolutamente en todo el plano, lo cual determina una función de variable compleja.

Definición 3.3.1. *La función exponencial compleja $e : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto e^z$ está dada por la serie de potencias:*

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (3.3)$$

Walter Rudin consideró que “esta es la función más importante en matemáticas” (ver [4, p. 1]).

Proposición 3.3.1.

1. *La exponencial compleja generaliza la exponencial real: si $x \in \mathbb{R}$ entonces la exponencial compleja e^x coincide con la función exponencial real e^x .*
2. $e^0 = 1$.
3. $e^{z+w} = e^z e^w$, para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

Demostración. Solo se probará la tercera, que es una consecuencia de las propiedades de las series.

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^j w^{n-j} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \frac{z^j w^{n-j}}{j!(n-j)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} = e^z e^w \end{aligned}$$

(véase el **teorema 3.50** del libro [3, p. 74]). □

Si $z = x + iy$ entonces por la proposición se obtiene:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy},$$

donde e^x es la función exponencial real. ¿Qué es ahora e^{iy} siendo y un número real? Por definición se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = (iy)^0 + (iy)^1 + \frac{(iy)^2}{2} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \dots \\
 &= 1 + iy - \frac{y^2}{2} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - \frac{iy^7}{7!} + \dots \\
 &= \left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots\right) + i \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots\right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
 &= \cos y + i \sin y.
 \end{aligned}$$

Esta notable igualdad, válida para todo $y \in \mathbb{R}$, se conoce como *fórmula de Euler*:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y. \quad (3.4)$$

Ahora la forma polar de un número complejo se puede expresar de manera justificada como $z = re^{i\theta}$, siendo $r = |z|$ y $\theta = \arg(z)$. Un caso muy especial se obtiene para $y = \pi$, pues entonces $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + 0i = -1$, es decir,

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Esta expresión ha sido reconocida como “el teorema más bello” en matemáticas.

Combinando los resultados anteriores se obtiene

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y),$$

de manera que las funciones componentes de la exponencial son $u = e^x \cos y$ y $v = e^x \sin y$. Con esta descripción también se pueden demostrar las propiedades enunciadas antes, por ejemplo si $z = x + iy$,

$w = u + iv$ entonces:

$$\begin{aligned}
 e^z e^w &= e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) e^u (\cos v + i \operatorname{sen} v) \\
 &= e^x e^u (\cos y + i \operatorname{sen} y) (\cos v + i \operatorname{sen} v) \\
 &= e^{x+u} (\cos (y+v) + i \operatorname{sen} (y+v)) \\
 &= e^{(x+u)+i(y+v)} \\
 &= e^{(x+iy)+(y+iv)} = e^{z+w}.
 \end{aligned}$$

A partir de estas propiedades, por cualquier camino se pueden demostrar muchas otras.

Proposición 3.3.2. *Para todo $z, w \in \mathbb{C}$:*

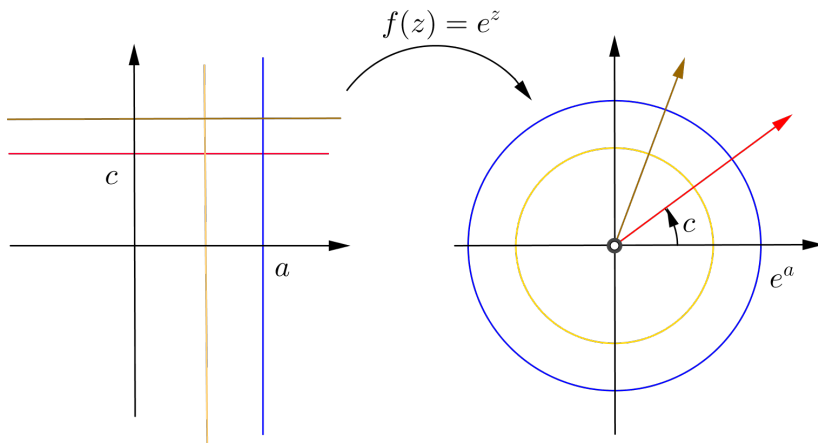
4. $e^z e^{-z} = 1$.
5. $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
6. $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.
7. $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.
8. $e^z = e^w$ si y solo si $e^{z-w} = 1$.
9. $e^z = 1$ si y solo si $z = 2k\pi i$ para algún entero $k \in \mathbb{Z}$.
10. $e^z = e^w$ si y solo si $z = w + 2k\pi i$ para algún entero $k \in \mathbb{Z}$.

De esta manera, la función exponencial es *periódica* con periodo $2\pi i$, esto es, sus valores se repiten en franjas horizontales del dominio con ancho 2π . Esto representa una primera diferencia fundamental con la función exponencial real.

La imagen de la recta vertical $x = a$ por la función exponencial compleja es $e^a(\cos y + i \operatorname{sen} y)$, $y \in \mathbb{R}$, que es una circunferencia con centro el origen y radio e^a . Para los distintos valores reales de a se obtienen todas las circunferencias con centro el origen y radio positivo.

Para una recta vertical fija, la imagen de cualquier segmento de longitud 2π recorre la circunferencia una vez, así que la recta completa la describe infinitas veces. Por su parte, la imagen de la recta horizontal $y = c$ es $e^x(\cos c + i \sin c)$, $x \in \mathbb{R}$, que es una semirrecta que parte del origen (sin incluirlo) ver la **Figura 13**. Se nota que cualquier recta $y = c + 2k\pi$ describe la misma semirrecta. La imagen de una recta diagonal es una espiral logarítmica.

Figura 13: Imágenes de rectas por la función $f(z) = e^z$



A partir de aquí se puede determinar la imagen de diferentes subconjuntos del plano, por ejemplo, la imagen de la región determinada por $x < 0$, $-\pi < y \leq \pi$ es el disco abierto de radio 1 sin el origen, esto es $0 < |w| < 1$. En conclusión, podemos pensar que la función exponencial compleja pliega el plano sobre sí mismo infinitas veces. Esta función no es inyectiva ni sobreyectiva, y toma todos los valores excepto el cero.

3.4. Las funciones trigonométricas

A partir de la fórmula de Euler (3.4), obtenemos las siguientes igualdades, válidas para todo $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y, \\ e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y. \end{cases}$$

La solución de este sistema es:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \quad (3.5)$$

Estas igualdades se toman como definición de las funciones trigonométricas complejas.

Definición 3.4.1. *Para cada número complejo z , se definen las funciones seno y coseno como:*

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Las demás funciones trigonométricas se definen de la manera usual.

A partir de la definición de la función exponencial como serie se obtienen las expresiones:

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Estas series, que convergen en todo el plano complejo, también se habrían podido tomar como definición de las funciones trigonométricas complejas, generalizando así las series de potencias reales.

Tomando $z = x + yi$ se tiene:

$$\begin{aligned} e^{iz} &= e^{-y+ix} = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x), \\ e^{-iz} &= e^{y-ix} = e^y(\cos x - i \operatorname{sen} x). \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} z &= \operatorname{sen} x \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) + i \cos x \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) \\ &= \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \sinh y,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos z &= \cos x \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) + i \operatorname{sen} x \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) \\ &= \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \sinh y.\end{aligned}$$

Se obtienen así las funciones componentes de las funciones trigonométricas.

Teniendo en cuenta que $\sinh 0 = 0$ y $\cosh 0 = 1$, cuando $z = x + 0i$ es real, en las funciones componentes se obtiene:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} z &= \operatorname{sen} x \cosh 0 + i \cos x \sinh 0 = \operatorname{sen} x, \\ \cos z &= \cos x \cosh 0 - i \operatorname{sen} x \sinh 0 = \cos x.\end{aligned}$$

Esto demuestra el hecho siguiente.

Proposición 3.4.1. *Las funciones trigonométricas complejas generalizan las trigonométricas reales.*

En consecuencia se tienen, por ejemplo, los valores siguientes.

$$\begin{array}{llll}\operatorname{sen} 0 = 0 & \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1 & \operatorname{sen} \pi = 0 & \operatorname{sen} 2\pi = 0 \\ \cos 0 = 1 & \cos \frac{\pi}{2} = 0 & \cos \pi = -1 & \cos 2\pi = 1\end{array}$$

A partir de la definición se obtienen de inmediato las siguientes identidades.

Proposición 3.4.2. *Para cada número complejo $z \in \mathbb{C}$ se tiene:*

1. $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$,
2. $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$ y $\cos(-z) = \cos z$.

Demostración.

1.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 \\ &= -\frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = 1.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(-z) &= \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\operatorname{sen} z; \\ \cos(-z) &= \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.\end{aligned}\quad \square$$

De manera similar, haciendo las cuentas con las definiciones, se obtienen las siguientes identidades que generalizan las usuales.

Proposición 3.4.3. *Para cualesquier números complejos $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene:*

1. $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w;$
2. $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w.$

Reemplazando en los valores indicados en la **proposición 3.4.3** se obtienen otras identidades.

Corolario 3.4.1. *Para cada número complejo $z \in \mathbb{C}$ se tiene:*

1. $\operatorname{sen}(z + 2\pi) = \operatorname{sen} z, \cos(z + 2\pi) = \cos z;$
2. $\operatorname{sen}\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z, \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} z;$
3. $\operatorname{sen} 2z = 2 \operatorname{sen} z \cos z, \cos 2z = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z.$

Por fin, se buscan las raíces de las funciones trigonométricas, que resultan ser todas reales.

Proposición 3.4.4.

1. $\operatorname{sen} z = 0$ si y solo si $z = k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$;
2. $\cos z = 0$ si y solo si $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

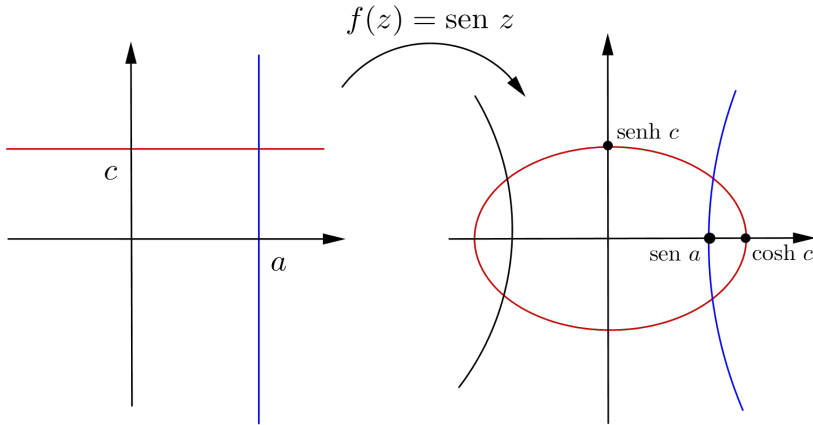
Demostración.

1. Por definición, $\operatorname{sen} z = 0$ si y solo si $\frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = 0$, si y solo si $e^{-iz} - e^{iz} = 0$, si y solo si $e^{-iz} = e^{iz}$, si y solo si $1 = e^{2iz}$, si y solo si $2iz = 2k\pi i$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, si y solo si $z = k\pi$.

2. Ahora, por (2) del **corolario 3.4.1**, $\cos z = 0$ si y solo si $\operatorname{sen}(z + \frac{\pi}{2}) = 0$, si y solo si $z + \frac{\pi}{2} = k'\pi$ para algún $k' \in \mathbb{Z}$, si y solo si $z = \frac{\pi}{2} + (k' - 1)\pi$, si y solo si $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

En conclusión, las funciones trigonométricas básicas son periódicas con periodo 2π , sus valores se repiten en franjas verticales del dominio con ancho 2π .

Por (2) del **corolario 3.4.1**, para analizar la geometría de las funciones trigonométricas basta estudiar una sola función. La imagen de la recta vertical $x = a$ por la función seno es aquella rama de la hipérbola con centro el origen y focos ± 1 que corta el eje real en $\operatorname{sen} a$; la imagen de la recta horizontal $y = c$ por la misma función es una elipse con centro el origen, focos ± 1 , cortes con el eje horizontal $\pm \cosh c$ y con el eje vertical $\pm \sinh c$. ver la **Figura 14**.

Figura 14: Imágenes de rectas por la función $f(z) = \operatorname{sen} z$ 

3.5. El logaritmo complejo

Consideremos el problema de encontrar un número complejo $w \in \mathbb{C}$ tal que:

$$e^w = 1 + i\sqrt{3}.$$

Si $w = u + v i$, esto se traduce como:

$$e^u (\cos v + i \operatorname{sen} v) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right).$$

Esta ecuación se resuelve tomando $e^u = 2$ (esto es, $u = \ln 2$) y $v = \frac{\pi}{3}$, de manera que una solución es $w = \ln 2 + \frac{\pi i}{3}$. Pero también se puede tomar cualquier otro argumento que difiera de $\frac{\pi}{3}$ en un múltiplo entero de 2π , de manera que hay infinitas soluciones que se pueden expresar como:

$$w = \ln 2 + i \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Proposición 3.5.1. *Para cualquier número complejo no nulo $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, la solución general a la ecuación $e^w = z$ es:*

$$w = \ln |z| + i (\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi),$$

donde $k \in \mathbb{Z}$.

Escogiendo el valor principal se obtiene una función compleja.

Definición 3.5.1. *Se define la función logaritmo principal para cada $z \neq 0$ como:*

$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg}(z).$$

Así, por ejemplo, $\operatorname{Log}(1 + i\sqrt{3}) = \ln 2 + \frac{\pi i}{3}$, $\operatorname{Log} i = \frac{\pi i}{2}$ y $\operatorname{Log}(-1) = \pi i$.

Esta función es una inversa parcial de la función exponencial.

Proposición 3.5.2. *Para cada complejo $z \in \mathbb{C}$ se tiene:*

1. $e^{\operatorname{Log} z} = z$ (si $z \neq 0$),
2. $\operatorname{Log}(e^z) = z + 2k\pi i$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración.

1. Por la definición 3.5.1

$$\begin{aligned} e^{\operatorname{Log} z} &= e^{\ln |z| + i \operatorname{Arg}(z)} = e^{\ln |z|} (\cos \operatorname{Arg}(z) + i \operatorname{sen} \operatorname{Arg}(z)) = \\ &= |z| (\cos \operatorname{Arg}(z) + i \operatorname{sen} \operatorname{Arg}(z)) = z. \end{aligned}$$

2. Si $z = x + yi$ entonces $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ de donde $|e^z| = e^x$ y $\operatorname{Arg}(e^z) = y_0$ con $y_0 = y + 2k\pi$, aquí $k \in \mathbb{Z}$ es el único entero tal que $-\pi < y_0 \leq \pi$. En consecuencia, $\operatorname{Log}(e^z) = \ln |e^z| + i \operatorname{Arg}(e^z) = \ln e^x + i y_0 = x + (y + 2k\pi)i = x + yi + 2k\pi i = z + 2k\pi i$. $\square$

En el segundo caso no siempre es $k = 0$, por ejemplo $\text{Log} \left(e^{\frac{1}{2} + \frac{3\pi i}{2}} \right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi i}{2}$. La prueba de las identidades siguientes es similar.

Proposición 3.5.3. *Para números complejos no nulos $z, w \neq 0$ se tiene:*

1. $\text{Log}(zw) = \text{Log} z + \text{Log} w + 2k\pi i$, para algún $k \in \mathbb{Z}$,
2. $\text{Log} \left(\frac{z}{w} \right) = \text{Log} z - \text{Log} w + 2k\pi i$, para algún $k \in \mathbb{Z}$,
3. $\text{Log}(z^n) = n \text{Log} z + 2k\pi i$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

En el primer caso no se tiene siempre $k = 0$. Por ejemplo:

$$\begin{cases} \text{Log} [(-1)i] = \text{Log}(-i) = -\frac{\pi i}{2}, \\ \text{Log}(-1) + \text{Log} i = \pi i + \frac{\pi i}{2} = \frac{3\pi i}{2}, \end{cases}$$

de manera que $\text{Log} [(-1)i] \neq \text{Log}(-1) + \text{Log} i$. Por otro lado, respecto al último caso, por ejemplo:

$$\begin{cases} \text{Log}(-1)^2 = \text{Log} 1 = 0, \\ 2 \text{Log}(-1) = 2\pi i, \end{cases}$$

así que $\text{Log}(-1)^2 \neq 2 \text{Log}(-1)$.

Con la ayuda del logaritmo, se pueden definir potencias complejas arbitrarias.

Definición 3.5.2. *Para cualesquier números complejos $z, a \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$, se define:*

$$z^a = e^{a \text{Log} z}.$$

Por ejemplo: $i^i = e^{i \text{Log} i} = e^{i(\frac{\pi i}{2})} = e^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^\pi}}$, se nota que $i^i \in \mathbb{R}$. Las propiedades del logaritmo determinan algunas propiedades de las potencias.

Proposición 3.5.4. *Para números complejos no nulos $z, w \neq 0$, y $a, b \in \mathbb{C}$ arbitrarios, se tiene:*

1. $z^{a+b} = z^a z^b$,
2. $(zw)^a = z^a w^a e^{a2k\pi i}$, para algún $k \in \mathbb{Z}$,
3. $\left(\frac{z}{w}\right)^a = \left(\frac{z^a}{w^a}\right) e^{a2k\pi i}$, para algún $k \in \mathbb{Z}$,
4. $(z^a)^b = z^{ab} e^{b2k\pi i}$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Aunque la continuidad se definirá más adelante de manera formal, se entiende muy bien que en cercanías del eje real negativo el argumento de los números salta de $-\pi$ a π , lo cual implica que la función logaritmo principal es discontinua en ese eje. Para subsanar este inconveniente se tienen diferentes opciones.

Una posibilidad consiste en escoger otro rango para los valores del argumento. En general, cada porción que se escoja define una rama del logaritmo.

Definición 3.5.3. *Un rama del logaritmo complejo es una función continua L definida en una región (subconjunto abierto y conexo) del plano que no contiene a 0 y tal que $e^{L(z)} = z$ para cada punto z de la región.*

Por ejemplo, el logaritmo principal restringido al plano excepto el eje real no positivo es una rama del logaritmo complejo. De nuevo, en ninguna rama se cumplen de manera plena las propiedades esperadas de los logaritmos.

Otra posible solución consiste en sustituir las funciones por *multi-funciones* o funciones multivaluadas, que a cada elemento asignan un conjunto finito o infinito de imágenes y no un sólo elemento.

Definición 3.5.4. Se define la multifunción logaritmo para cada $z \neq 0$ como

$$\log z = \{ \ln |z| + i (\operatorname{Arg} z + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

Así, por ejemplo, $\log(-1) = \{\pi i + 2k\pi i\}$ y $\log i = \{\frac{\pi i}{2} + 2k\pi i\}$. En el resultado siguiente, las operaciones a la derecha de cada igualdad se realizan entre conjuntos, como se acostumbra en álgebra.

Proposición 3.5.5. Para números complejos no nulos $z, w \neq 0$ se tiene:

1. $\log(zw) = \log z + \log w$,
2. $\log\left(\frac{z}{w}\right) = \log z - \log w$,
3. $\log(z^n) = n \log z$.

La combinación de las ideas anteriores dieron origen a las *superficies de Riemann*. Si se considera la rama L_1 definida con el argumento en $[0, 2\pi)$, esta función coincide con el logaritmo principal Log en el semiplano superior, pero en el semiplano inferior ellas difieren en $2\pi i$. Podría considerarse un pegamiento en el semiplano superior y dos hojas separadas en el inferior. Este proceso se puede repetir indefinidamente, formando una superficie con forma de hélice o espiral infinita de hojas superpuestas. Cada vuelta corresponde a aumentar en 2π el argumento.

De manera más técnica, se construye la superficie

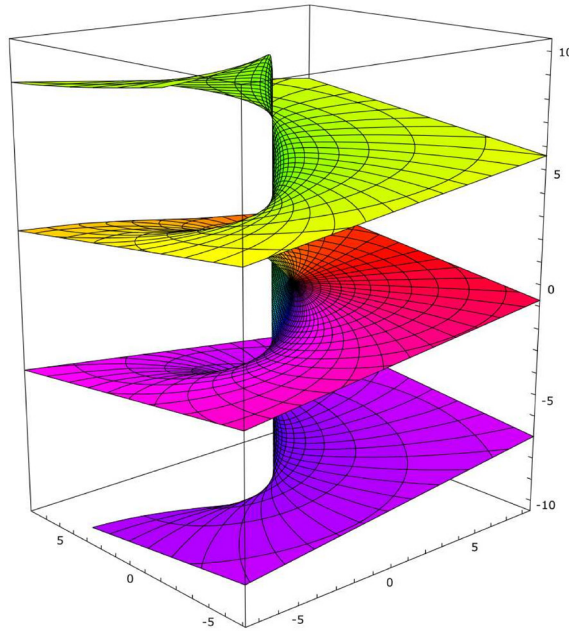
$$R = \left\{ (z, \theta) \mid z \in \mathbb{C} - \{0\}, \theta \in \mathbb{R}, \tan \theta = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} \right\}.$$

Aquí θ corresponde a un posible argumento de z y, según el intervalo donde se encuentra, el punto se ubica en la hoja correspondiente de la superficie R . Como siempre, la excepción $\operatorname{Re}(z) = 0$ se considera

por aparte. En estas condiciones, la función $L_R : R \longrightarrow \mathbb{C}$ definida como $L_R(z, \theta) = \ln|z| + i\theta$ es biyectiva, con inversa $w \mapsto (e^w, \Im(w))$.

Se nota que, por un lado, se pegan las ramas del logaritmo en una sola función; por otra parte, todos los valores de $\log z$ pueden imaginarse como una torre de puntos superpuestos en la superficie, uno en cada hoja, (ver la **Figura 15** que fue tomada de [5]).

Figura 15: Función $f(z) = \log z$



Ejercicios para el capítulo 3

3.1. Dado el triángulo con vértices $3 + 4i$, $-3 + 4i$ y $-5i$, encuentre su imagen por cada función y elabore un dibujo.

a) $f(z) = z - 3 + 5i$

b) $f(z) = iz$

c) $f(z) = iz + 2 - i$

d) $f(z) = i\bar{z} + 2 - i$

e) $f(z) = \left(\frac{3-4i}{5}\right)z - 5 + 2i$

3.2. Encuentre una función lineal $f(z) = az + b$ con $a, b \in \mathbb{C}$ tal que la imagen de la circunferencia $|z + 1| = 2$ es la circunferencia $|w + i| = 3$. Elabore un dibujo.

3.4. Muestre que la imagen de la recta $y = x - c$ (con $c \in \mathbb{R}$ y $c \neq 0$) por la función cuadrática $f(z) = z^2$ es una parábola que se abre en el sentido positivo del eje v , esto es, “hacia arriba”.

3.5. Muestre que la imagen de la circunferencia con centro el origen y radio $r > 0$ por la función inverso multiplicativo es la circunferencia con centro el origen y radio $\frac{1}{r}$. En particular, la circunferencia unidad es un conjunto invariante bajo esta función.

3.6. Expresé la transformación de Cayley, $C(z) = \frac{z-i}{z+i}$, como compuesta de funciones lineales y la función inversa. A partir de ello, justifique que esta función transforma el semiplano superior en el interior del disco unidad.

3.7. En cada caso, encuentre todos los valores de z tales que:

a) $e^{3z} = 1$, **b)** $e^{(z^2)} = 1$, **c)** $e^{(e^z)} = 1$.

3.8. Encuentre la imagen de la región $0 \leq x \leq \pi$, $y \geq 0$, por cada

una de las funciones siguientes.

$$\text{a)} f(z) = e^{iz}, \quad \text{b)} f(z) = ie^{iz}.$$

3.9. Pruebe que:

$$e^{-|z|} \leq |e^z| \leq e^{|z|}.$$

¿Cuándo se tiene cada igualdad?

3.10. Muestre que para $z = x + yi$ se tiene:

$$\text{a)} |\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y = -\cos^2 x + \cosh^2 y.$$

$$\text{b)} |\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y = -\operatorname{sen}^2 x + \cosh^2 y.$$

c) Concluya que $|\operatorname{sen} z|^2 + |\cos z|^2 \geq 1$ para cada $z \in \mathbb{C}$.
¿Cuándo se tiene la igualdad?

3.11. Demuestre que si $|z| < 1$ entonces $|\cos z| < 2$.

3.12. Verifique las igualdades que siguen, para $y \in \mathbb{R}$:

$$\text{a)} \operatorname{sen}(iy) = i \operatorname{senh} y, \quad \text{b)} \cos(iy) = \cosh y.$$

3.13. En cada caso, encuentre $\operatorname{Log} z$ y $\log z$.

$$\text{a)} z = 1 + i, \quad \text{b)} z = 1 - i, \quad \text{c)} z = \frac{e}{\sqrt{2}} + \frac{e}{\sqrt{2}}i.$$

3.14. Encuentre las partes real e imaginaria de los siguientes complejos:

$$\text{a)} x^x \text{ con } x \in \mathbb{R}, x \neq 0, \quad \text{b)} (iy)^{iy} \text{ con } y \in \mathbb{R}, y \neq 0.$$

3.15. Determine el valor principal de cada una de las siguientes expresiones.

a) 3^i , **b)** $(\pi i)^e$, **c)** $(\sqrt{3} + i)^{\frac{i}{2}}$.