

Capítulo 4

Funciones holomorfas

Aunque las funciones de una variable compleja en realidad tienen dos variables reales, su derivada se puede definir exactamente como en el caso real, porque en los números complejos existe la división. Sin embargo, esto trae consigo consecuencias sorprendentes.

4.1. Límites, continuidad y la derivada compleja

Los límites de las funciones de variable compleja se definen como en todos los espacios métricos.

Definición 4.1.1. Sea $f : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función de variable compleja, y sea $p \in D^{\text{adh}}$ un punto adherente al dominio. Un número complejo L es el límite de f cuando z tiende a p , si para cada $\varepsilon > 0$ (real) existe $\delta > 0$ tal que para cada $z \in D$:

$$\text{si } 0 < |z - p| < \delta \text{ entonces } |f(z) - L| < \varepsilon.$$

En ese caso, se escribe $L = \lim_{z \rightarrow p} f(z)$.

Como en todo espacio métrico, en las funciones de variable compleja el límite, cuando existe, es único. Además, de nuevo como en todo espacio métrico, los límites se pueden definir en términos de sucesiones convergentes.

Proposición 4.1.1. *Se tiene $\lim_{z \rightarrow p} f(z) = L$ si y solo si para toda sucesión $\{z_n\}$ de elementos de D tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = p$ se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = L$.*

El límite de la suma, resta, producto, cociente o compuesta de funciones es la correspondiente operación de los límites.

Proposición 4.1.2. *Los límites de las funciones de variable compleja satisfacen las reglas algebraicas usuales.*

Si la función de variable compleja f tiene componentes u y v , esto es $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ con $u(x, y), v(x, y) \in \mathbb{R}$, entonces el límite de f existe en $p = r + is$ si y solo si existen los dos límites reales

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (r,s)} u(x, y) \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (r,s)} v(x, y).$$

Estas son funciones reales de dos variables reales, y del cálculo en varias variables se recuerda que para la existencia de estos límites se requiere que existan en todas las direcciones y maneras de acercamiento al punto. De la misma manera, si una función de variable compleja toma valores distintos por diferentes caminos de aproximación a un punto, entonces el límite no existe en ese punto.

Ejemplo 4.1.1.

1. No existe $\lim_{z \rightarrow p} |z|$ (como en las funciones reales).

2. No existe $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ (en el caso real es la función constante 1).
3. No existe $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\Re(z)}{z}$ (como antes, la restricción de esta función a los números reales es la función constante 1).

La noción de límite permite expresar la continuidad de funciones.

Definición 4.1.2. Una función de variable compleja $f : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua en un punto $p \in D$ del dominio si

$$\lim_{z \rightarrow p} f(z) = f(p).$$

Es decir, el límite existe y es igual al valor de la función en el punto.

Proposición 4.1.3. La función f es continua en p si y solo si para toda sucesión $\{z_n\}$ de elementos de D tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = p$ se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(p)$, es decir, si y solo si

$$f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n).$$

Por las propiedades de los límites se concluye de inmediato que la suma, resta, producto, cociente y compuesta de funciones continuas es continua. En consecuencia, una función de variable compleja es continua si y solo si ambas componentes son continuas.

Una función es continua en todo un conjunto $P \subseteq D$ si lo es en todos los puntos $p \in P$.

Ejemplo 4.1.2. Las funciones $f(z) = |z|$, $f(z) = \bar{z}$, $f(z) = \Re(z)$, las funciones lineales $f(z) = az + b$, la función exponencial $f(z) = e^z$ y las funciones trigonométricas seno y coseno son todas continuas en cualquier punto del plano complejo. Las funciones racionales y las demás funciones trigonométricas son continuas en todo su dominio.

Proposición 4.1.4. *La función f es continua en el conjunto P si y solo si para todo abierto $U \subseteq \mathbb{C}$ la imagen recíproca $f^{-1}(U)$ es un abierto en P (esto es, es la intersección de P con un abierto del plano).*

Según esta última proposición, la continuidad definida corresponde a la noción general de continuidad en topología. Por lo tanto, los resultados conocidos en esa disciplina se conservan, por ejemplo, la imagen continua de un subconjunto compacto es compacta y la imagen continua de un conexo es conexa.

La derivada compleja se define exactamente igual que la de las funciones reales, esto se debe a que los números complejos constituyen un campo conmutativo, luego se pueden dividir los incrementos de las variables.

Definición 4.1.3. *Una función de variable compleja $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es derivable en un punto $z \in D$ del dominio si existe el límite complejo:*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

que, en ese caso, se denota $f'(z)$ y se denomina la derivada de f en el punto z .

Se nota que la variable h es compleja, luego el límite debe existir en cualquier camino de acercamiento a cero. Una manera alternativa, pero equivalente, de definir la derivada en un punto $z_0 \in D$ es como:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Ejemplo 4.1.3.

1. *La función idéntica $f(z) = z$ es derivable en todo punto, con $f'(z) = 1$.*

2. Cualquier función constante $f(z) = c$ es derivable en todo punto, con $f'(z) = 0$.
3. Cualquier función lineal $f(z) = az + b$ es derivable en todo punto, con $f'(z) = a$.
4. La función cuadrática $f(z) = z^2$ es derivable en todo punto, con $f'(z) = 2z$.
5. Cualquier función potencia $f(z) = z^n$, donde n es un entero positivo, es derivable en todo punto, con $f'(z) = nz^{n-1}$.

Como en cualquier contexto donde se puede definir esta noción, toda función derivable es continua.

Proposición 4.1.5. Si la función de variable compleja $f : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es derivable en $z \in D$ entonces es continua en z .

Demostración. Pues para $h \neq 0$ se tiene

$$f(z+h) = f(z) + h \left[\frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right].$$

Si la derivada existe, el límite del término derecho, cuando h tiende a 0, existe y es $f'(z)$ (pues este valor es constante para h). $\square$

Ejemplo 4.1.4. A partir de la definición, y utilizando el ejemplo 4.1.1, se obtienen los hechos siguientes.

1. La función valor absoluto $f(z) = |z|$ no es derivable en $z = 0$, aunque es continua allí.
2. La función conjugado $f(z) = \bar{z}$ no es derivable en punto alguno del plano, aunque es continua en todos.
3. La función parte real $f(z) = \Re(z)$ no es derivable en punto alguno del plano, aunque es continua en todos.

4. La función $f(z) = |z|^2$ es derivable en $z = 0$ y no es derivable en punto alguno $z \neq 0$, si bien es continua en todo el plano complejo.

Por la forma en que se define la derivada, todas las propiedades algebraicas de la misma se conservan intactas en el caso complejo.

Proposición 4.1.6. Sean $f, g : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ funciones de variable compleja derivables en un punto $z \in D$.

1. Para cada $a, b \in \mathbb{C}$ la función $af + bg$ es derivable en z , y

$$(af + bg)'(z) = af'(z) + bg'(z).$$

2. La función producto fg es derivable en z , y

$$(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z).$$

3. Si $g(z) \neq 0$, la función cociente $\frac{f}{g}$ es derivable en z , y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}.$$

La prueba es idéntica a la del cálculo real.

Ejemplo 4.1.5.

1. La función inverso multiplicativo $f(z) = \frac{1}{z}$ es derivable en todo punto $z \neq 0$, con $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.
2. Cualquier función potencia $f(z) = z^n$, donde n es un entero negativo, es derivable en todo punto $z \neq 0$, con $f'(z) = nz^{n-1}$.

3. La función valor absoluto no es derivable en punto alguno, aunque es continua en todos. Por la definición, se puede verificar que no lo es en $z = 0$, véase el **ejemplo 4.1.4**; tampoco es derivable en puntos $z \neq 0$ porque en ese caso, por la regla del producto, la función $|z|^2$ sería derivable allí, contradiciendo el **ejemplo 4.1.4**.

Para concluir, se tiene la célebre *regla de la cadena*, que también se demuestra igual que en el cálculo real.

Proposición 4.1.7. Sean $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g : E \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ funciones de variable compleja tales que g es derivable en $z \in E$, $g(z) \in D$ y f es derivable en $g(z)$. Entonces la función compuesta $f \circ g$ es derivable en z , y

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z).$$

4.2. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann

Supóngase que la función de variable compleja f tiene componentes reales de variables reales u , v , definidas en un abierto que contiene al punto $z = x + yi$.

• Aproximación por valores reales

Si $h = t \in \mathbb{R}$, como número complejo es $h = (t, 0)$, luego $z + h = (x, y) + (t, 0) = (x + t, y)$, de donde:

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{u(x+t, y) + i v(x+t, y) - (u(x, y) + i v(x, y))}{t} \\ &= \frac{u(x+t, y) - u(x, y)}{t} + i \frac{v(x+t, y) - v(x, y)}{t}. \end{aligned}$$

Si f es derivable en z entonces ambos límites existen cuando t tiende a cero, y además:

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x+t, y) - u(x, y)}{t} + i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x+t, y) - v(x, y)}{t} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

De manera que u, v tienen derivadas parciales respecto a x , y además:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

• Aproximación por valores imaginarios

Si $h = ti$ con $t \in \mathbb{R}$, como número complejo es $h = (0, t)$, luego $z + h = (x, y + t)$ de donde:

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{u(x, y+t) + i v(x, y+t) - (u(x, y) + i v(x, y))}{it} \\ &= \frac{v(x, y+t) - v(x, y)}{t} - i \frac{u(x, y+t) - u(x, y)}{t}. \end{aligned}$$

Si f es derivable en z entonces ambos límites existen cuando t tiende a cero, y además:

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x, y+t) - v(x, y)}{t} - i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, y+t) - u(x, y)}{t} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

De modo que u, v tienen derivadas parciales respecto a y , y además:

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = -i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -i \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Así se ha demostrado el siguiente resultado.

Proposición 4.2.1. *Si la función de variable compleja $f = u + iv$ es derivable en $z = x + iy$, entonces existen ambas derivadas parciales de cada una de las funciones componentes u, v en (x, y) y además se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Estas célebres ecuaciones se pueden resumir como $\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$, o bien como $\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}$.

Ejemplo 4.2.1.

1. Si $f(z) = z^2$, las componentes $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.
2. Si $f(z) = z^3$, las componentes $u = x^3 - 3xy^2$, $v = 3x^2y - y^3$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.
3. Si $f(z) = |z|^2$ entonces $u = x^2 + y^2$ y $v = 0$ y las ecuaciones de Cauchy-Riemann solo se satisfacen en $(0, 0)$. Es decir, fuera del origen esta función no es derivable.
4. Si $f(z) = \bar{z}$ entonces $u = x$, $v = -y$ y no se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en punto alguno, es decir, esta función no es derivable.
5. Si $f(z) = \Re(z)$ entonces $u = x$, $v = 0$ y esta función no satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann (y, por lo tanto, no es derivable) en punto alguno.
6. Si $f(z) = \bar{z}^2$ entonces $u = x^2 - y^2$ y $v = -2xy$. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen si y solo si $x = 0$ y $y = 0$, es decir, fuera del origen $z = 0$ esta función no es derivable. Para la derivabilidad en el origen, es necesario retomar la definición.
7. Si $f(z) = z \Re(z)$ entonces $u = x^2$ y $v = xy$. De nuevo, para $z \neq 0$ esta función no es derivable, y para $z = 0$ hay que volver a la definición.

Cuando una función de variable compleja es derivable en un punto, entonces cada una de sus funciones componentes tienen ambas derivadas parciales y estas además satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Surge la duda sobre la validez de la implicación recíproca: si la existencia de las derivadas parciales y el cumplimiento de las ecuaciones garantiza la derivabilidad en un punto.

Ejemplo 4.2.2. *Se considera la función de variable compleja:*

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4} & \text{si } z \neq 0, \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Sus funciones componentes son:

$$u = \frac{x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \quad y \quad v = \frac{5x^4y - 10x^2y^3 + y^5}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Ahora, por ejemplo,

$$\frac{u(0 + s, 0) - u(0, 0)}{s} = \frac{u(s, 0)}{s} = 1$$

luego $\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = 1$. *De forma similar* $\frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) = 0$ *y* $\frac{\partial v}{\partial y}(0, 0) = 1$. *De esta manera, las derivadas parciales de* u *y* v *no solo existen en* $z = 0$, *sino que además satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en ese punto.*

Pero f *no es derivable en* $z = 0$, *ya que*

$$\frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \frac{h^5}{h|h|^4} = \frac{h^4}{|h|^4},$$

y para $h = t(\cos \theta + i \sen \theta)$ *con* $t > 0$, $t \in \mathbb{R}$ *y* θ *fijo se tiene:*

$$\frac{h^4}{|h|^4} = \frac{t^4(\cos \theta + i \sen \theta)^4}{t^4} = \cos 4\theta + i \sen 4\theta,$$

que depende del ángulo θ , *luego el límite no existe cuando* h *tiende a* 0 .

Ahora se nota que para $(x, y) \neq (0, 0)$ *se tiene, por ejemplo,*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(5x^4 - 30x^2y^2 + 5y^4)(x^2 + y^2) - (x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4)4x}{(x^2 + y^2)^3}$$

luego para $x = 0$, $y \neq 0$ es $\frac{\partial u}{\partial x} = 5$, mientras que para todo $y = 0$ resulta $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, el mismo valor que toma en $(0, 0)$. De donde la derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial x}$ no es continua en el punto $(0, 0)$.

El ejemplo anterior sugiere este resultado.

Proposición 4.2.2. *Sea $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función de variable compleja con funciones componentes $f = u + iv$. Si las derivadas parciales de u, v existen todas y son continuas en alguna vecindad de un punto $(x, y) \in D$, y además satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en ese punto, entonces la función f es derivable en $z = x + yi$ y además $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z)$.*

Para la prueba se utiliza el hecho siguiente. En una función real f de una variable, si es derivable en toda una vecindad de x entonces, por el teorema del valor medio,

$$\frac{f(x+s) - f(x)}{x+s-x} = f'(x+\lambda s)$$

para algún valor de λ , con $0 < \lambda < 1$. De aquí se sigue $f(x+s) - f(x) = f'(x+\lambda s)s$. Si, además, la derivada f' es continua en x , sea entonces $E = f'(x+\lambda s) - f'(x)$, de manera que $f(x+s) - f(x) = (f'(x) + E)s = f'(x)s + Es$, con $\lim_{s \rightarrow 0} E = 0$.

En el caso de una función real F de dos variables reales, el resultado análogo es:

$$F(x+s, y+t) - F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x+\lambda s, y+\mu t)s + \frac{\partial F}{\partial y}(x+\lambda s, y+\mu t)t,$$

para ciertos valores λ, μ con $0 < \lambda < 1$, $0 < \mu < 1$. Si las derivadas

parciales son ambas continuas en (x, y) entonces:

$$F(x + s, y + t) - F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)s + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)t + Es + Dt,$$

donde

$$\lim_{(s,t) \rightarrow (0,0)} E = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{(s,t) \rightarrow (0,0)} D = 0.$$

Demostración. Si $h = s + it$ entonces:

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \\ &= \frac{u(x+s, y+t) - u(s, t)}{h} + i \frac{v(x+s, y+t) - v(s, t)}{h} \\ &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)s + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)t}{h} + i \frac{\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)s + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)t}{h} + \frac{\widehat{E}s + \widehat{D}t}{h} \\ &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)s - \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)t}{h} + i \frac{\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)s + \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)t}{h} + \frac{\widehat{E}s + \widehat{D}t}{h} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \frac{s+it}{h} + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \frac{s+it}{h} + \frac{\widehat{E}s + \widehat{D}t}{h} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + \frac{\widehat{E}s + \widehat{D}t}{h}. \end{aligned}$$

La primera igualdad se tiene por definición; la segunda por el teorema del valor medio y la continuidad de las derivadas parciales, aquí $\lim_{h \rightarrow 0} \widehat{E} = 0$ y $\lim_{h \rightarrow 0} \widehat{D} = 0$, pues $\widehat{E} = E_u + iE_v$ mientras $\widehat{D} = D_u + iD_v$; la tercera igualdad se tiene por las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el punto (x, y) .

Ahora como $|s| \leq |h|$, resulta $\left| \frac{\widehat{E}s}{h} \right| \leq |\widehat{E}|$, de donde $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\widehat{E}s}{h} = 0$, y de la misma manera $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\widehat{D}t}{h} = 0$.

Así, el límite existe y $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$. □

Ejemplo 4.2.3. Sea $f(z) = \Re^2(z) + i\Im^2(z)$, esto es $u = x^2$, $v = y^2$. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann solo se satisfacen en la diagonal $y = x$, luego en esos (y solo en esos) puntos la función f es derivable, con derivada $f'(z) = 2\Re(z)$. Esto también se puede verificar con la definición.

Las componentes de la función exponencial compleja $f(z) = e^z$ son $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$. Estas funciones tienen sus dos derivadas parciales continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, luego la función exponencial es derivable con derivada

$$f'(z) = (e^z)' = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z,$$

como podía esperarse.

Proposición 4.2.3. La función exponencial e^z es derivable con derivada e^z .

En consecuencia, aplicando el álgebra de las derivadas, se tiene

$$(\sin z)' = \frac{ie^{iz} - (-i)e^{-iz}}{2i} = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z,$$

y de la misma manera $(\cos z)' = -\sin z$.

Proposición 4.2.4. Las funciones trigonométricas son derivables y $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$.

Otra manera de obtener estas derivadas es observar que las componentes de cada función trigonométrica satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann y sus derivadas son continuas.

4.3. Funciones holomorfas

Ahora se estudian funciones que no solo son derivables en un punto sino en toda una vecindad.

Definición 4.3.1. Una función de variable compleja $f : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa (también llamada analítica) en el punto $z \in D$ si es derivable en z y en una vecindad abierta del mismo.

Es decir, f es holomorfa en z si existe $\varepsilon > 0$ (real) tal que f es derivable en cada punto $w \in B(z, \varepsilon)$.

Ejemplo 4.3.1. La función inverso multiplicativo $f(z) = \frac{1}{z}$ es holomorfa en todo punto $z \neq 0$. En efecto, tomando $\varepsilon = |z| > 0$, la función es derivable en todos los puntos del disco abierto $B(z, \varepsilon)$, porque este no contiene el origen.

Ejemplo 4.3.2. La función cuadrática $f(z) = z^2$ es holomorfa en $z = 0$ porque es derivable en cualquier disco $B(0, \varepsilon)$, al ser derivable en cualquier punto del plano. En realidad, esta función es holomorfa en todo punto del plano.

Definición 4.3.2. Una función de variable compleja $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es entera si es holomorfa en todo el plano.

Proposición 4.3.1. Una función $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es entera si y solo si es derivable en todo punto del plano.

Demostración. Si f es entera, es holomorfa en cualquier punto y , en particular, es derivable allí. En el otro sentido, si f es derivable en todo punto entonces para cualquier punto z la función es derivable en todo $B(z, 1)$, luego es holomorfa en z . Siendo este punto arbitrario, f es entera. $\square$

Ejemplo 4.3.3. Cualquier función polinómica $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$ con $a_i \in \mathbb{C}$ es entera. La función exponencial e^z y las funciones trigonométricas $\sin z$ y $\cos z$ son todas enteras.

Ahora se consideran funciones que son derivables pero no holomorfas.

Ejemplo 4.3.4. La función $f(z) = \Re^2(z) + i\Im^2(z)$, esto es $u = x^2$, $v = y^2$, es derivable en $z = 0$ pero no es holomorfa allí. En efecto,

en cualquier vecindad abierta que contenga a $B(0, \varepsilon)$ existen puntos en los cuales f no es derivable, por ejemplo $z = \frac{\varepsilon}{2}$. De hecho, esta función es derivable solo en los puntos de la recta $y = x$ (véase el **ejemplo 4.2.3**), que no contiene ningún abierto, luego no es holomorfa en punto alguno.

Ejemplo 4.3.5. La función $f(z) = |z|^2$ es derivable solo en el origen $z = 0$, luego no es holomorfa allí porque cualquier disco abierto $B(0, \varepsilon)$ contiene puntos diferentes de 0, en los cuales f no es derivable. En realidad, esta función no es holomorfa en punto alguno.

Proposición 4.3.2. Si la función de variable compleja f es holomorfa en un punto z entonces lo es en todos los puntos de cierto disco abierto $B(z, \varepsilon)$.

Demostración. Al ser holomorfa en z , existe $\varepsilon > 0$ tal que f es derivable para cada punto de $B(z, \varepsilon)$. Dado $w \in B(z, \varepsilon)$, como $|w - z| < \varepsilon$ se tiene $\delta = \varepsilon - |w - z| > 0$ y además $B(w, \delta) \subseteq B(z, \varepsilon)$. Luego f es derivable en $B(w, \delta)$ y holomorfa en w . $\square$

En primer lugar, esto implica que el conjunto de puntos en los cuales f es holomorfa es un conjunto abierto, lo cual no se puede decir del conjunto donde es derivable. Por ejemplo para $f(z) = \Re^2(z) + i \Im^2(z)$ el conjunto de puntos donde es derivable es la recta $y = x$, que no es abierto; para $f(z) = |z|^2$ el conjunto de puntos donde es derivable es el unitario $\{0\}$, que tampoco es abierto.

Para cualquier función de variable compleja f , sea E_f el conjunto de puntos en los cuales f es derivable y H_f el conjunto de puntos en los cuales es holomorfa.

Proposición 4.3.3. Para cualquier función f se tiene $H_f = (E_f)^{int}$, esto es, el conjunto de puntos donde es holomorfa es el interior del conjunto donde es derivable.

Demostración. Ya se observó que H_f es un abierto, y está contenido en E_f . De esta manera $H_f \subseteq (E_f)^{int}$. En el otro sentido, si $z \in (E_f)^{int}$

entonces $B(z, \varepsilon) \subseteq E_f$ para algún $\varepsilon > 0$, lo cual significa, precisamente, que f es holomorfa en z , es decir, $z \in H_f$. $\square$

Por los resultados de la sección anterior, si una función de variable compleja $f = u + iv$ es tal que sus componentes u, v tienen derivadas parciales continuas en un disco abierto $D(z, \varepsilon)$ y que además cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo ese disco, entonces es derivable en el mismo y por lo tanto es holomorfa en z .

Para el recíproco, se utiliza el resultado siguiente cuya demostración aún no es accesible (véase el **corolario 5.5.2**).

Nota 4.3.1. *Una función holomorfa en z tiene segunda derivada en z .*

Esto no se cumple en general para funciones derivables, por ejemplo la función $f(z) = |z|^2$ es derivable solo en $z = 0$, luego no tiene sentido considerar la segunda derivada. Tampoco se cumple para funciones de variable real, por ejemplo la función real f definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ -x^2 & \text{si } -1 < x \leq 0, \end{cases}$$

es derivable en $x = 0$ y en todo el intervalo $(-1, 1)$, pero no tiene segunda derivada en $x = 0$.

De esta manera, como la función holomorfa en el punto lo es en toda una vecindad del mismo, en toda esa vecindad tiene sus derivadas parciales continuas porque la función derivada a su vez es derivable, luego es continua. Además se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en toda la vecindad, al ser derivable la función en todos sus puntos. De esta manera se demuestra el resultado siguiente.

Proposición 4.3.4. *Una función $f = u + iv$ es holomorfa en un punto z si y solo si las derivadas parciales de u y v existen, son continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en una vecindad de z .*

En particular, una función de variable compleja $f = u + iv$ es entera si y solo si las derivadas parciales de u y v existen, son continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo el plano.

4.4. Funciones armónicas

Si u, v son las componentes de una función holomorfa entonces se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Por el hecho mencionado en la sección anterior, estas derivadas parciales a su vez son derivables con continuidad, de manera que se puede intercambiar el orden de derivación. Así, pues:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \text{es decir,} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \text{es decir,} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \end{aligned}$$

De esta manera las componentes u, v satisfacen ambas, por aparte, la siguiente condición.

Definición 4.4.1. Una función real F de dos variables es armónica si es solución de la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0.$$

Ejemplo 4.4.1. La función $F(x, y) = x^2 - y^2$ es armónica; la función $F(x, y) = x^2 + y^2$ no es armónica; la función $F(x, y) = e^x \cos y$ sí es armónica.

Proposición 4.4.1. Si $f = u + iv$ es una función de variable compleja holomorfa entonces ambas componentes u, v son funciones reales armónicas.

Ejemplo 4.4.2. Como $f(z) = z^3$ es holomorfa, sus dos componentes $u = x^3 - 3xy^2$ y $v = 3x^2y - y^3$ son ambas funciones armónicas. Lo mismo se tiene para las funciones $e^x \cos y$, $e^x \sen y$, componentes de la función holomorfa exponencial. Por otro lado, la función compleja $\sen z$ es holomorfa, luego sus componentes $u = \sen x \cosh y$, $v = \cos x \sinh y$ son ambas armónicas.

Corolario 4.4.1. Si una función real de dos variables no es armónica, entonces no es la parte real ni imaginaria de función holomorfa alguna.

Ejemplo 4.4.3. La función $u = x^2 + y^2$ no es la parte real ni imaginaria de función holomorfa alguna. Lo mismo se puede decir de $v = \sen x \cos y$.

Si u es una función real armónica, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann es posible encontrar otra función real v tal que $f = u + iv$ es holomorfa.

En efecto, a partir de la condición $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ se obtiene:

$$v = \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dy + \varphi(x).$$

Derivando respecto a la otra variable, y aplicando la otra condición de Cauchy-Riemann, resulta:

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dy + \varphi'(x),$$

con lo cual se puede determinar la función φ .

Ejemplo 4.4.4. Dada la función armónica $u = x^2 - y^2$, es $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$ luego:

$$v = \int 2x dy = 2xy + \varphi(x).$$

Ahora, por un lado:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \varphi'(x),$$

y, por el otro:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y.$$

Igualando resulta $\varphi'(x) = 0$ de donde $\varphi(x) = c$ es una constante real. Así $v = 2xy + c$ y se obtiene la función holomorfa:

$$f(z) = (x^2 - y^2) + i(2xy + c) = z^2 + ci,$$

cuya componente real es la función dada.

En general, se tiene el resultado que sigue.

Proposición 4.4.2. *Para toda función real armónica u existe una función real armónica v , única salvo una constante real, tal que la función de variable compleja $f = u + iv$ es holomorfa.*

Cabe anotar que para una función holomorfa $u + iv$, excepto en el caso constante, la función $v + iu$ no es holomorfa. La que sí es holomorfa es $-v + iu = i(u + iv)$.

Ejercicios para el capítulo 4

4.1. Encuentre los límites siguientes, si existen.

$$\text{a) } \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2 + 4}{z - 2i}, \quad \text{b) } \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^3 + 8i}{z^2 + 4}.$$

4.2. Demuestre la proposición 4.1.4: La función f es continua en el conjunto P si y solo si para todo abierto U la imagen recíproca $f^{-1}(U)$ es la intersección de P con un abierto del plano.

4.3. ¿Dónde es derivable la función $f(z) = z|z|$?

4.4. Si $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$ es una función polinómica de grado n , pruebe que para $k = 0, 1, \dots, n$ se tiene

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

4.5. De cada una de las funciones siguientes, determine dónde satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y dónde es derivable. Además, en los puntos donde es derivable, encuentre el valor de la derivada utilizando la definición.

a) $f(z) = z \operatorname{Im}(z),$

b) $f(z) = \bar{z} \operatorname{Re}(z),$

c) $f(z) = (z + \operatorname{Re}(z)) \operatorname{Im}(z).$

4.6. En cada caso, establezca condiciones suficientes y necesarias sobre las constantes *reales* a , b y c para que la función sea derivable en todo el plano

a) $f(z) = x + ay + i(bx + cy),$

b) $f(z) = axy + i(bx^2 + cy^2).$

4.7. Repita el ejercicio 4.5 utilizando la afirmación que garantiza la suficiencia de las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

4.8. Utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, encuentre la función f más general posible que es derivable en todo $\mathbb{C}$ y tal que $\operatorname{Re}(f'(z)) = 0$.

4.9. a) Demuestre que $(\cos z)' = -\operatorname{sen} z$ utilizando la definición de $\cos z$ en términos de la función exponencial.

b) Pruebe que $(\operatorname{sen} z)' = \cos z$ encontrando las derivadas parciales de las funciones componentes de $\operatorname{sen} z$ y verificando que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, además de ser continuas.

c) Lo mismo que **(b)** para $(\cos z)' = -\operatorname{sen} z$.

4.10. Establezca dónde son holomorfas las funciones del ejercicio 4.5.

4.11. Demuestre que si f es una función de variable compleja tal que f y $\bar{f}$ son ambas holomorfas en un punto z , entonces $f'(z) = 0$.

4.12. Considere la función de variable compleja $f(z) = x^2 - y^3 + i(x^3 + y^2)$.

a) ¿Dónde sus componentes cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann?

b) Establezca dónde es derivable la función f y encuentre la derivada $f'(z)$ en esos puntos.

c) Establezca dónde es holomorfa la función f .

4.13. En cada uno de los casos siguientes, muestre que la función u es armónica y encuentre la función más general v tal que $f(z) = u + iv$ es holomorfa. Aquí a, b, c, d, e son constantes *reales* arbitrarias.

a) $u = ax^2 - ay^2 + bx + cy + d,$

b) $u = ax^2 - ay^2 + bxy + cx + dy + e,$

c) $u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4,$

d) $u = e^{-x}\cos y.$

4.14. ¿Existe alguna función holomorfa cuya parte real o imaginaria es igual a $2xy - y^2$?

4.15. En cada caso, establezca condiciones suficientes y necesarias sobre la constante real a para que la función sea armónica. Luego, encuentre la función más general v tal que $f = u + iv$ es entera.

a) $u = ax^2y - y^3 + xy,$ b) $u = ax^3 + xy^2 + x.$