

Capítulo 5

Integración compleja

Las integrales de funciones de variable compleja se definen como integrales de línea. Una vez más, surge una conexión sorprendente entre la integral y la derivada.

5.1. Curvas en el plano complejo

Una *curva compleja* se define como una función $z : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que, según el caso, se considera continua o derivable. Sin embargo la palabra “curva”, o su sinónimo “arco”, hace referencia a la imagen, considerada como subconjunto del plano complejo, y la función que la describe es una *parametrización*. De esta manera, una misma curva tiene muchas, incluso infinitas, parametrizaciones.

Ejemplo 5.1.1.

1. La función $z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$, con $0 \leq t \leq 2\pi$, describe la circunferencia unidad una vez.

2. La función $z(t) = e^{-it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, también describe la circunferencia unidad pero en el sentido opuesto o “negativo”.
3. En general, $z(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, es una parametrización de la circunferencia de radio $r > 0$ y centro $z_0 \in \mathbb{C}$.
4. La función $z(t) = e^{2\pi it}$ con $0 \leq t \leq 1$ es una parametrización estándar de la circunferencia unidad, definida en el segmento unidad $I = [0, 1]$. Resulta “más rápida” que la anterior.
5. La parametrización $z(t) = e^{2\pi it^2}$ con $0 \leq t \leq 1$ describe la circunferencia unidad con “rapidez” creciente.
6. La función $z(t) = e^{2\pi it}$ con $0 \leq t \leq 3$ describe la circunferencia unidad tres veces.

Una curva es *cerrada* si coinciden sus puntos inicial y final, esto es si $z(a) = z(b)$. Una curva es *simple* si no tiene puntos de intersección salvo, posiblemente, sus extremos: $z(s) = z(t)$ si y solo si $s = t$ o $s, t \in \{a, b\}$. El célebre *teorema de Jordan* establece que toda curva cerrada simple (llamada *curva de Jordan*) divide el plano en dos regiones. Con precisión, el conjunto complemento $\mathbb{C} - z[a, b]$ tiene dos componentes conexas, una acotada y la otra no acotada, y todos los puntos de la curva son adherentes a ambas. En estos términos, un conjunto del plano es simplemente conexo si y solo si para cualquier curva de Jordan en él, la componente acotada está contenida totalmente en el conjunto.

Cuando una curva de Jordan es la frontera de cierto conjunto del plano, su orientación se toma *positiva* cuando, al recorrer la curva, la región siempre está a la izquierda de la misma. En particular, la orientación de una curva de Jordan respecto a su componente acotada resulta “en el sentido contrario a las manecillas del reloj”. Por ejemplo, $z(t) = e^{it}$ tiene orientación positiva respecto al interior de la circunferencia unidad, y $z(t) = e^{-it}$ negativa.

Igual que en las funciones vectoriales, todo el cálculo con curvas complejas se desarrolla componente a componente. Así, si $z(t) = x(t) + iy(t)$ con x, y funciones reales, se tiene lo siguiente.

• Límites

Los límites de las curvas están definidas en tanto son funciones entre espacios métricos.

Proposición 5.1.1. *El límite de una curva z cuando t tiende a $t_0 \in [a, b]$ existe si y solo si existen los límites de sus componentes x , y en t_0 y, en ese caso:*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) + i \lim_{t \rightarrow t_0} y(t).$$

También se cumple todo el álgebra de límites.

Proposición 5.1.2. *Sean z , w curvas complejas. Si existen $\lim_{t \rightarrow t_0} z(t)$ y $\lim_{t \rightarrow t_0} w(t)$ entonces los siguientes límites existen y su valor es el que se indica:*

1. $\lim_{t \rightarrow t_0} cz(t) = c \lim_{t \rightarrow t_0} z(t)$, aquí $c \in \mathbb{C}$,
2. $\lim_{t \rightarrow t_0} (z(t) + w(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} w(t)$,
3. $\lim_{t \rightarrow t_0} (z(t)w(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) \lim_{t \rightarrow t_0} w(t)$,
4. $\lim_{t \rightarrow t_0} \left(\frac{z(t)}{w(t)} \right) = \frac{\lim_{t \rightarrow t_0} z(t)}{\lim_{t \rightarrow t_0} w(t)}$, si $\lim_{t \rightarrow t_0} w(t) \neq 0$.

Los resultados anteriores tienen una consecuencia inmediata.

Corolario 5.1.1. *La curva $z = x + iy$ es continua en t_0 si y solo si las funciones reales x , y son ambas continuas en t_0 .*

• Derivadas

Definición 5.1.1. La curva $z = x + iy$ es derivable en t_0 si las funciones reales x , y lo son ambas en t_0 , y además la derivada en t_0 se define como:

$$z'(t_0) = x'(t_0) + i y'(t_0).$$

En realidad, esto es equivalente a definir:

$$z'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(t_0 + h) - z(t_0)}{h} \quad (h \in \mathbb{R}),$$

si ese límite existe.

Ejemplo 5.1.2. Si $z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$ entonces:

$$z'(t) = -\sin t + i \cos t = i(\cos t + i \sin t) = i e^{it}.$$

Se nota que, en general, si $z(t) = e^{i\alpha t}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $z'(t) = i\alpha e^{i\alpha t}$.

El álgebra de derivadas también se cumple en este contexto.

Proposición 5.1.3. Si z , w son curvas derivables en t entonces las siguientes funciones son derivables y sus derivadas son las que se indican:

1. $(cz(t))' = cz'(t)$, aquí $c \in \mathbb{C}$,
2. $(z(t) + w(t))' = z'(t) + w'(t)$,
3. $(z(t)w(t))' = z'(t)w(t) + z(t)w'(t)$,
4. $\left(\frac{z(t)}{w(t)}\right)' = \frac{z'(t)w(t) - z(t)w'(t)}{[w(t)]^2}$, si $w(t) \neq 0$.

La regla de la cadena no tiene sentido entre dos curvas z , w pero sí en el siguiente contexto.

Proposición 5.1.4. Si $\phi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ es una función real derivable en $s \in (c, d)$ y $z : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es una curva derivable en $t = \phi(s)$, entonces la función compuesta $\zeta = z \circ \phi$ es derivable en s y, además:

$$\zeta'(s) = (z \circ \phi)'(s) = z'(\phi(s)) \phi'(s).$$

• Integrales

Definición 5.1.2. La curva $z = x + iy$ es integrable en $[a, b]$ si las funciones reales x, y lo son ambas en $[a, b]$, y además la integral en ese intervalo se define como:

$$\int_a^b z(t) dt = \int_a^b x(t) dt + i \int_a^b y(t) dt.$$

Ejemplo 5.1.3. Si $z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$, entonces:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} z(t) dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + i \sin t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt + i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt \\ &= \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + i (-\cos t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 + i. \end{aligned}$$

Se observa que este ejemplo también se había podido resolver utilizando la igualdad siguiente, válida para $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$:

$$\int_a^b e^{i\alpha t} dt = \frac{e^{i\alpha t}}{i\alpha} \Big|_a^b = -i \frac{e^{i\alpha t}}{\alpha} \Big|_a^b.$$

Para estas funciones se cumple el álgebra de integrales.

Proposición 5.1.5. Si z, w son curvas integrables en $[a, b]$ entonces las siguientes funciones son integrables y sus integrales son las que se indican:

1. $\int_a^b (cz(t)) dt = c \int_a^b z(t) dt \quad (c \in \mathbb{C});$
2. $\int_a^b (z(t) + w(t)) dt = \int_a^b z(t) dt + \int_a^b w(t) dt;$
3. $\int_a^b z(t)w'(t) dt = z(t)w(t) \Big|_a^b - \int_a^b z'(t)w(t) dt.$

La tercera identidad corresponde al método de integración por partes. Por otro lado, el teorema fundamental del cálculo se cumple componente a componente.

Proposición 5.1.6. Si z es una curva continua en $[a, b]$ y la curva $Z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ satisface $Z'(t) = z(t)$ para cada $t \in (a, b)$ (antiderivada), entonces:

$$\int_a^b z(t) dt = Z(t) \Big|_a^b = Z(b) - Z(a).$$

También hay una acotación para el valor de la integral.

Proposición 5.1.7. Si $z : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es integrable en $[a, b]$, entonces:

$$\left| \int_a^b z(t) dt \right| \leq \int_a^b |z(t)| dt.$$

Demostración. Si la integral de z es cero, la desigualdad es inmediata porque su valor absoluto también es cero. En caso contrario, este número complejo se puede expresar en forma polar como $\int_a^b z(t) dt = re^{i\theta}$ (r, θ constantes), de donde:

$$\begin{aligned} r &= e^{-i\theta} \int_a^b z(t) dt = \int_a^b e^{-i\theta} z(t) dt = \\ &= \Re \left(\int_a^b e^{-i\theta} z(t) dt \right) = \int_a^b \Re (e^{-i\theta} z(t)) dt \leq \\ &\leq \int_a^b |e^{-i\theta} z(t)| dt = \int_a^b |e^{-i\theta}| |z(t)| dt = \int_a^b |z(t)| dt. \end{aligned}$$

La tercera igualdad se tiene porque r es un número real; la cuarta, por la definición de la integral; la desigualdad, porque siempre $\Re(w) \leq |w|$ y esta desigualdad entre números reales se mantiene bajo la integral real; la última igualdad se debe a que $|e^{-i\theta}| = 1$. $\square$

5.2. Integral de una función de variable compleja

La integral de línea que define la integral de una función de variable compleja debe ponderarse para que el valor no dependa de la parametrización escogida.

Definición 5.2.1. Sea $f : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función de variable compleja y C una curva derivable contenida en D , descrita una vez por $z : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow D$. La integral de f a lo largo de la curva C se define como:

$$\int_C f dz = \int_a^b f(z(t))z'(t) dt,$$

si esta última integral existe.

La función compuesta $f \circ z$ y la derivada z' son funciones de $[a, b]$ en $\mathbb{C}$, luego su producto también lo es. De esta manera, el integrando de la derecha es una curva y su integral es una de las que se estudiaron en el apartado anterior.

Ejemplo 5.2.1. Si C es el segmento de recta de 0 a $1 + i$, la integral

$$\int_C 3z^2 dz$$

se puede calcular como sigue. Primero se debe escoger una parametrización de C , sin duda la más sencilla es $z(t) = 0 + t((1 + i) - 0) =$

$(1+i)t$ con $0 \leq t \leq 1$. En estas condiciones $z'(t) = 1+i$, luego:

$$\begin{aligned} \int_C 3z^2 dz &= \int_0^1 3[(1+i)t]^2(1+i) dt = \int_0^1 3(2i)t^2(1+i) dt \\ &= (-6+6i) \int_0^1 t^2 dt = (-6+6i) \left(\frac{1}{3}\right) = -2+2i. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.2.2. Si de nuevo C es el segmento de recta de 0 a $1+i$, entonces

$$\int_C 3|z|^2 dz = 2+2i.$$

Nótese que la integral de una función compleja cuyos valores son todos reales no necesariamente es real.

En efecto, tomando $z(t) = (1+i)t = t+ti$ con $0 \leq t \leq 1$, se tiene $z'(t) = 1+i$ luego:

$$\int_C 3|z|^2 dz = \int_0^1 3[t^2+t^2](1+i) dt = 6(1+i) \int_0^1 t^2 dt = 2+2i.$$

También se pueden considerar curvas cerradas.

Ejemplo 5.2.3. Para calcular la integral

$$\int_{S^1} z dz$$

recorriendo la circunferencia unidad S^1 en sentido positivo una vez, se puede tomar $z(t) = \cos t + i \sin t = e^{it}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$. Luego $z'(t) = ie^{it}$, y así:

$$\int_{S^1} z dz = \int_0^{2\pi} e^{it} i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{2it} dt = i \frac{e^{2it}}{2i} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} (e^{4\pi i} - e^0) = 0.$$

Ejemplo 5.2.4. Para mostrar que:

$$\int_{S^1} \frac{dz}{z} = 2\pi i,$$

se toma de nuevo $z(t) = e^{it}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$, luego $z'(t) = i e^{it}$ y así:

$$\int_{S^1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

La primera pregunta matemática que se impone es si la definición de la integral es una “buena definición”, esto es, si ella no depende de la parametrización de la curva C .

Ejemplo 5.2.5. Para determinar la integral $\int_C 3z^2 dz$, otra parametrización del segmento de recta C de 0 a $1+i$ es $z(t) = (1+i)t^2$ con $0 \leq t \leq 1$. Ahora $z'(t) = 2(1+i)t = (2+2i)t$, luego:

$$\begin{aligned} \int_C 3z^2 dz &= \int_0^1 3[(1+i)t^2]^2 (2+2i)t dt = \int_0^1 3(2i)t^4 (2+2i)t dt \\ &= (-12+12i) \int_0^1 t^5 dt = (-12+12i) \left(\frac{1}{6}\right) = -2+2i. \end{aligned}$$

El valor obtenido es el mismo del ejemplo inicial.

Ejemplo 5.2.6. Para describir la circunferencia unidad S^1 en sentido positivo una vez también se podría tomar $z(t) = \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t = e^{2\pi i t}$ con $0 \leq t \leq 1$. Entonces $z'(t) = 2\pi i e^{2\pi i t}$, y ahora:

$$\int_{S^1} \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{1}{e^{2\pi i t}} 2\pi i e^{2\pi i t} dt = 2\pi i \int_0^1 dt = 2\pi i \Big|_0^1 = 2\pi i.$$

De nuevo, el resultado es el mismo para dos parametrizaciones distintas.

Ejemplo 5.2.7. Para describir la circunferencia unidad S^1 en sentido negativo una vez se puede tomar $z(t) = \cos(-t) + i \sin(-t) = \cos t - i \sin t = e^{-it}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$. Entonces $z'(t) = -i e^{-it}$, y resulta:

$$\int_{-S^1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{-it}} (-i e^{-it}) dt = -i \int_0^{2\pi} dt = -2\pi i.$$

Ahora el resultado es el mismo pero con signo contrario.

En general, sea $z : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función que recorre una vez la curva C . Si $\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ es una función tal que $\phi(c) = a$, $\phi(d) = b$ y además $\phi'(s) > 0$ para cada $s \in [c, d]$, entonces la función $\zeta = z \circ \phi : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ describe la misma curva C una vez. Ahora, tomando $t = \phi(s)$, resulta:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(z(t))z'(t) dt &= \\ &= \int_c^d f(z(\phi(s)))z'(\phi(s))\phi'(s) ds = \int_c^d f(\zeta(s))\zeta'(s) ds, \end{aligned}$$

esto es:

$$\int_C f dz = \int_C f d\zeta.$$

En cambio, si $\phi(c) = b$, $\phi(d) = a$ y $\phi'(s) < 0$ para cada s , entonces:

$$\int_C f dz = - \int_C f d\zeta.$$

Con esto se ha demostrado el resultado siguiente.

Proposición 5.2.1. *La integral $\int_C f dz$ está bien definida en el sentido de que el valor $\int_a^b f(z(t))z'(t) dt$ no depende de la función z que describe la curva C , salvo posiblemente el signo.*

El signo de la integral depende del sentido en el que se recorre la curva.

Aunque la integral no depende de la parametrización escogida para la curva, sí podría depender del camino escogido para ir del punto inicial al punto final.

Ejemplo 5.2.8. *Si C es el segmento de la parábola $y = x^2$ de 0 a $1 + i$, resulta:*

$$\int_C 3z^2 dz = -2 + 2i.$$

En efecto, tomando $z(t) = t + t^2i$ con $0 \leq t \leq 1$, se tiene $z'(t) = 1 + 2ti$, luego:

$$\begin{aligned}\int_C 3z^2 dz &= \int_0^1 3 [t + t^2i]^2 (1 + 2ti) dt \\ &= 3 \int_0^1 (t^2 - t^4 + 2t^3i)(1 + 2ti) dt \\ &= 3 \int_0^1 [(t^2 - 5t^4) + (4t^3 - 2t^5)i] dt \\ &= 3 \left(\frac{1}{3} - 1 \right) + 3 \left(1 - \frac{1}{3} \right) i.\end{aligned}$$

El resultado es el mismo del ejemplo inicial.

Ejemplo 5.2.9. De nuevo, si C es el segmento de la parábola $y = x^2$ de 0 a $1 + i$ entonces:

$$\int_C 3|z|^2 dz = \frac{8}{5} + \frac{5i}{2}.$$

Pues tomando $z(t) = t + t^2i$ con $0 \leq t \leq 1$ se tiene $z'(t) = 1 + 2ti$, luego:

$$\begin{aligned}\int_C 3|z|^2 dz &= \int_0^1 3(t^2 + t^4)(1 + 2ti) dt \\ &= 3 \int_0^1 [(t^2 + t^4) + (2t^3 + 2t^5)i] dt \\ &= 3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) + 3 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) i.\end{aligned}$$

En este caso, el resultado es muy distinto.

Cuando la integral es diferente por distintas trayectorias, se puede pensar que la integral por el camino cerrado obtenido al ir por una curva y volver por la otra no es cero; en contraste, si la integral es igual por ambas trayectorias, la integral por la curva cerrada sería cero. Estos dos casos son evidentes en los ejemplos calculados.

$$\int_{S^1} z dz = 0, \quad \text{mientras que} \quad \int_{S^1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0.$$

5.3. Propiedades de la integral

La idea de recorrer una curva en dos sentidos, o de ir y volver a lo largo de una misma curva, se puede precisar como sigue. Si la función $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ describe la curva C una vez, entonces la función $\tilde{z} : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $\tilde{z}(t) = z(-t)$ la describe en sentido contrario y se denota $-C$.

Proposición 5.3.1. *Con la terminología anterior, resulta:*

$$\int_{-C} f dz = - \int_C f dz.$$

Demostración. En efecto:

$$\int_{-C} f dz = \int_{-b}^{-a} f(\tilde{z}(t)) \tilde{z}'(t) dt = \int_{-b}^{-a} f(z(-t)) z'(-t) (-1) dt.$$

Sustituyendo $s = -t$ se tiene $ds = -dt$, luego:

$$\int_{-C} f dz = \int_b^a f(z(s)) z'(s) ds = - \int_a^b f(z(s)) z'(s) ds = - \int_C f dz. \quad \square$$

De la misma manera se formaliza la idea de recorrer varias curvas una tras otra. Si la función $z_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$ describe la curva C_1 y $z_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{C}$ describe la curva C_2 , con las condiciones adicionales $b_1 = a_2$ (esto siempre se puede lograr) y $z_1(b_1) = z_2(a_2)$, de manera que las curvas son sucesivas, entonces la función $z : [a_1, b_2] \rightarrow \mathbb{C}$ definida como

$$z(t) = \begin{cases} z_1(t), & \text{si } a_1 \leq t \leq b_1, \\ z_2(t), & \text{si } a_2 \leq t \leq b_2. \end{cases}$$

describe primero la curva C_1 y luego la C_2 . Esta curva nueva se denota $C = C_1 + C_2$.

De manera similar se puede definir la suma de n curvas sucesivas $C_1, C_2, \dots, C_n$, que se denota $C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$. Además, resulta el hecho siguiente.

Proposición 5.3.2. *Con la terminología anterior, resulta:*

$$\int_C f dz = \int_{C_1} f dz + \int_{C_2} f dz + \dots + \int_{C_n} f dz.$$

Demostración. En el caso $n = 2$ se tiene, para la parametrización mencionada:

$$\begin{aligned} \int_{C_1+C_2} f dz &= \int_{a_1}^{b_2} f(z(t))z'(t) dt = \\ &= \int_{a_1}^{b_1} f(z_1(t))z'_1(t) dt + \int_{a_2}^{b_2} f(z_2(t))z'_2(t) dt \\ &= \int_{C_1} f dz + \int_{C_2} f dz. \end{aligned}$$

El caso general se deduce por inducción. □

Ejemplo 5.3.1. *A fin de calcular la integral $\int_C 3z^2 dz$, siendo C la unión de los segmentos de recta de 0 a 1 y de 1 a $1+i$, sea C_1 el primer segmento y C_2 el segundo.*

Para el primer paso sea $z_1(t) = t$ con $0 \leq t \leq 1$, entonces $z'_1(t) = 1$ y así:

$$\int_{C_1} 3z^2 dz = \int_0^1 3t^2 dt = 1.$$

Para el segundo sea $z_2(t) = 1 + it$ con $0 \leq t \leq 1$, de manera que $z'_2(t) = i$ y se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{C_2} 3z^2 dz &= \int_0^1 3(1+it)^2 i dt = 3 \int_0^1 ((1-t^2) + 2ti) i dt \\ &= 3 \int_0^1 (-2t + (1-t^2)i) dt = 3 \left(-1 + \frac{2i}{3} \right) = -3 + 2i. \end{aligned}$$

Por fin, resulta

$$\int_C 3z^2 dz = \int_{C_1} 3z^2 dz + \int_{C_2} 3z^2 dz = 1 + (-3 + 2i) = -2 + 2i.$$

Una vez más, se obtiene el mismo valor de la integral por los distintos caminos escogidos en el apartado anterior.

Ejemplo 5.3.2. Ahora se quiere calcular la integral $\int_C 3|z|^2 dz$, siendo C la unión de los segmentos de recta de 0 a 1 y de 1 a $1 + i$.

Para el primer paso se toma $z_1(t) = t$ con $0 \leq t \leq 1$, entonces $z'_1(t) = 1$ y así:

$$\int_{C_1} 3|z|^2 dz = \int_0^1 3t^2 dt = 1.$$

Para el segundo, sea $z_2(t) = 1 + it$ con $0 \leq t \leq 1$, así $z'_2(t) = i$ luego:

$$\int_{C_2} 3|z|^2 dz = \int_0^1 3(1 + t^2)i dt = 3 \left(1 + \frac{1}{3}\right) i = 4i.$$

En conclusión:

$$\int_C 3|z|^2 dz = \int_{C_1} 3|z|^2 dz + \int_{C_2} 3|z|^2 dz = 1 + 4i.$$

Comparando con los resultados del apartado anterior, en el caso de esta función la integral tiene tres valores distintos para tres curvas diferentes de 0 a $1 + i$.

Como puede esperarse, la integral compleja es lineal.

Proposición 5.3.3. Sean $f, g : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ funciones de variable compleja integrables a lo largo de una curva C en D . Las siguientes integrales existen y tienen el valor que se indica:

1. $\int_C (cf) dz = c \int_C f dz$, aquí $c \in \mathbb{C}$,
2. $\int_C (f + g) dz = \int_C f dz + \int_C g dz$.

Demostración. Si $z : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ describe la curva C , entonces por una parte se tiene:

$$\begin{aligned} \int_C (cf) dz &= \int_a^b (cf)(z(t))z'(t) dt \\ &= \int_a^b cf(z(t))z'(t) dt \\ &= c \int_a^b f(z(t))z'(t) dt \\ &= c \int_C f dz, \end{aligned}$$

y, por otro lado:

$$\begin{aligned} \int_C (f + g) dz &= \int_a^b (f + g)(z(t))z'(t) dt \\ &= \int_a^b (f(z(t)) + g(z(t)))z'(t) dt \\ &= \int_a^b (f(z(t))z'(t) + g(z(t))z'(t)) dt \\ &= \int_a^b f(z(t))z'(t) dt + \int_a^b g(z(t))z'(t) dt \\ &= \int_C f dz + \int_C g dz. \end{aligned}$$

□

También hay una acotación natural de la integral. Para las nociones de curva rectificable y longitud de curva, (véase el texto [1]).

Proposición 5.3.4. *Si la curva C es rectificable con longitud L y además se tiene $|f(z)| \leq M$ para cada $z \in C$ sobre la curva, entonces:*

$$\left| \int_C f dz \right| \leq ML.$$

Se nota que tal cota M siempre existe cuando f es continua, pues el intervalo $[a, b]$ es compacto.

Demostración. Por la **proposición 5.1.7**, se tiene:

$$\begin{aligned} \left| \int_C f dz \right| &= \left| \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(z(t)) z'(t)| dt = \int_a^b |f(z(t))| |z'(t)| dt \\ &\leq \int_a^b M |z'(t)| dt = M \int_a^b |z'(t)| dt = ML. \quad \square \end{aligned}$$

Observamos de manera informal que la función $f(z) = 3z^2$ tiene como antiderivada la función $F(z) = z^3$ y que

$$z^3 \Big|_0^{1+i} = (1+i)^3 - 0 = -2 + 2i,$$

que es el resultado de la integral por las tres curvas estudiadas en el apartado anterior y en este. En general, el cálculo de la integral se simplifica de manera considerable si se encuentra una antiderivada de la función, lo cual corresponde al teorema fundamental del cálculo.

Proposición 5.3.5. *Sea $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua y supóngase que existe una función $F : D \rightarrow \mathbb{C}$, derivable en D , tal que $F'(z) = f(z)$ para cada $z \in D$. Entonces para cualquier curva C en D descrita por la parametrización $z : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow D$ se tiene:*

$$\int_C f dz = F(z(t)) \Big|_a^b = F(z(b)) - F(z(a)).$$

Se nota que en el término de la derecha no interviene para nada la curva C , solo sus puntos inicial y final. De esta manera, si C es cualquier curva contenida en D que va del punto z_1 a z_2 , se puede escribir:

$$\int_{z_1}^{z_2} f dz = F(z) \Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1).$$

Demostración. En efecto:

$$\begin{aligned} \int_C f dz &= \int_a^b f(z(t))z'(t) dt = \int_a^b F'(z(t))z'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} (F(z(t))) dt = F(z(b)) - F(z(a)), \end{aligned}$$

esta última igualdad por el teorema fundamental del cálculo. $\square$

Ejemplo 5.3.3. Para todo entero $n \neq -1$ y para cualesquier puntos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se tiene:

$$\int_{z_1}^{z_2} z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} \Big|_{z_1}^{z_2} = \frac{z_2^{n+1} - z_1^{n+1}}{n+1}.$$

Corolario 5.3.1. En particular, si la función f tiene antiderivada en su dominio D y C es cualquier curva cerrada contenida en D entonces:

$$\int_C f dz = 0.$$

Demostración. Como para una curva cerrada el punto inicial y final coinciden, $z(a) = z(b)$, de donde $F(z(b)) = F(z(a))$ y la diferencia es nula. $\square$

La **proposición 5.3.5** permite concluir de inmediato el método de integración por partes.

Proposición 5.3.6. Sean $f, g : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ funciones derivables en D . Entonces para cualquier curva C en D descrita por la parametrización $z : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow D$ se tiene:

$$\int_C f(z)g'(z) dz = f(z)g(z) \Big|_a^b - \int_C f'(z)g(z) dz.$$

En particular, si C es cualquier curva cerrada contenida en D entonces:

$$\int_C f(z)g'(z) dz = - \int_C f'(z)g(z) dz.$$

5.4. El teorema de Cauchy

El célebre teorema integral de Cauchy constituye el corazón de la teoría de integración de funciones de variable compleja y se puede enunciar como sigue.

Teorema 5.4.1. *Si f es una función holomorfa en un abierto simplemente conexo H , entonces:*

$$\int_C f dz = 0,$$

para cualquier curva cerrada C contenida en H .

El enunciado que sigue es del todo equivalente, de manera que la integral de una función holomorfa no depende de la trayectoria.

Proposición 5.4.1. *Si f es una función holomorfa en un abierto simplemente conexo H , entonces:*

$$\int_{C_1} f dz = \int_{C_2} f dz$$

para cualesquier curvas C_1, C_2 en H cuyos puntos inicial y final coinciden, respectivamente.

Demostración. Pues, en esas condiciones, la curva $C_1 - C_2 = C_1 + (-C_2)$ es una curva cerrada contenida en H , de donde:

$$0 = \int_{C_1 - C_2} f dz = \int_{C_1} f dz + \int_{-C_2} f dz = \int_{C_1} f dz - \int_{C_2} f dz.$$

En el otro sentido, suponiendo este resultado, si C es una curva cerrada en H , sea z_0 un punto cualquiera de C . Al tomar C_1 como la curva C que comienza y termina en z_0 y C_2 la curva constante en el punto z_0 , entonces

$$\int_C f dz = \int_{C_1} f dz = \int_{C_2} f dz = 0.$$

□

El teorema integral de Cauchy se puede extender de varias maneras a regiones más generales.

Corolario 5.4.2. *Si f es una función holomorfa en un abierto H , entonces:*

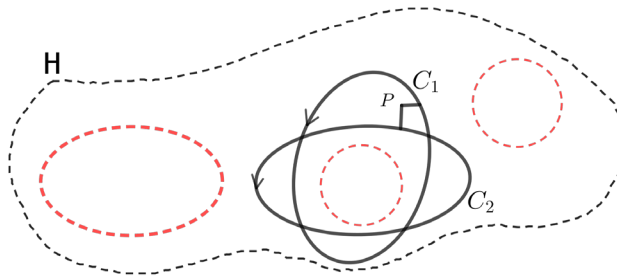
$$\int_C f dz = 0,$$

para cualquier curva cerrada C en H cuyo interior está contenido en H .

Es decir, el abierto H podría tener huecos pero la curva C no contiene ninguno de ellos.

Demostración. Como C es conexo, está contenido en una componente conexa de H ; como es compacto, está contenido en un abierto conexo contenido en H que incluye una franja de anchura positiva alrededor de la curva; la unión de este conexo con el interior de la curva es un abierto simplemente conexo $H' \subseteq H$. La función f es holomorfa en H' y se puede aplicar el teorema a esa región. □

Más aún, la integral a lo largo de una curva cerrada no depende de la trayectoria particular escogida, siempre que no cambien los huecos rodeados por la curva, (ver la **Figura 16**). Con precisión, se tiene el hecho siguiente.

Figura 16: Independencia de las trayectorias

Corolario 5.4.3. Si f es una función holomorfa en un abierto H , entonces:

$$\int_{C_1} f dz = \int_{C_2} f dz$$

para cualesquier curvas cerradas C_1, C_2 en H recorridas en el mismo sentido y tales que la región comprendida entre las dos está contenida en H .

Demostración. Sea P una curva integrable (por ejemplo, poligonal) contenida en H que une la curva C_1 con C_2 . Entonces $C = C_1 + P - C_2 - P$ es una curva cerrada cuyo interior también está contenido en H , luego:

$$0 = \int_C f dz = \int_{C_1} f dz + \int_P f dz - \int_{C_2} f dz - \int_P f dz,$$

de donde:

$$\int_{C_1} f dz = \int_{C_2} f dz. \quad \square$$

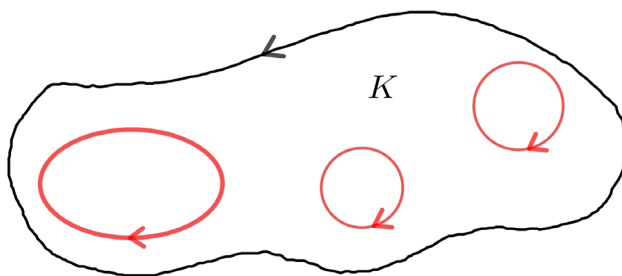
Ejemplo 5.4.1. $\int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z-i} = 2\pi i.$

En efecto, por el hecho probado, $\int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z-i} = \int_{|z-i|=1} \frac{dz}{z-i}.$ Por un

simple cambio de variable resulta $\int_{|z-i|=1} \frac{dz}{z-i} = \int_{S^1} \frac{dz}{z} = 2\pi i$.

Hay otro enunciado equivalente a los anteriores y muy común en los textos de cálculo con variable compleja, (ver [6]).

Figura 17: Sentido de las curvas



Corolario 5.4.4. Si f es una función holomorfa en un abierto múltiplemente conexo K y en su frontera ∂K , entonces:

$$\int_{\partial K} f dz = 0,$$

donde la curva se recorre en sentido positivo respecto a K .

En estas circunstancias, ver la **Figura 17**, si la región K tiene n huecos entonces la curva frontera ∂K está constituida por $n + 1$ curvas simples: la curva exterior C_e y las n curvas interiores C_{i_j} , con $1 \leq j \leq n$, cada una de las cuales rodea un hueco. La curva exterior se recorre en sentido positivo y todas las interiores en el sentido contrario o negativo.

Demostración. Para el caso $n = 1$, sea de nuevo P una curva (poligonal) contenida en K que une la curva exterior C_e con $C_i = C_{i_1}$.

Entonces, por el teorema integral de Cauchy aplicado a la curva cerrada $C = C_e + P + C_i - P$, se tiene:

$$0 = \int_{C_e} f dz + \int_P f dz + \int_{C_i} f dz + \int_{-P} f dz,$$

de manera que:

$$\int_{\partial K} f dz = \int_{C_e} f dz + \int_{C_i} f dz = 0.$$

Para el caso general, se procede por inducción. □

A continuación se desarrolla la demostración del teorema de Cauchy bajo distintas hipótesis.

• Derivadas parciales continuas (*Caso 1*)

En una primera versión se suponen condiciones adicionales sobre la función holomorfa que, en realidad, después se podrán demostrar siempre (véase el **corolario 5.5.2**).

Si una función de variable compleja $f = u + iv$ tiene componentes u y v entonces haciendo $z = x + iy$ resulta lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_C f dz &= \int_a^b f(z) z' dt \\ &= \int_a^b (u + iv)(x' + iy') dt \\ &= \int_a^b (ux' - vy') dt + i \int_a^b (uy' + vx') dt \\ &= \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy. \end{aligned}$$

Estas expresiones recuerdan de inmediato un conocido resultado del cálculo en varias variables reales.

Teorema 5.4.5 (Green). Sean $P(x, y)$, $Q(x, y)$ funciones reales con derivadas parciales continuas en una región cerrada y simplemente conexa R cuya frontera es la curva C . En tales condiciones:

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

donde la curva C se recorre en sentido positivo.

En el caso de la función de variable compleja $f = u + iv$, si las componentes u , v tienen derivadas parciales continuas entonces por el teorema de Green se obtiene esta igualdad:

$$\int_C f dz = \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy.$$

Pero si, además, se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann, entonces:

- $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, de donde $-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$,
- $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, de donde $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

En consecuencia, ambas integrales dobles se anulan y así $\int_C f dz = 0$, con lo cual se ha demostrado el siguiente resultado.

Teorema 5.4.6. Si f es una función holomorfa con derivada continua en un abierto simplemente conexo H , entonces:

$$\int_C f dz = 0,$$

para cualquier curva cerrada C contenida en H .

• **Triángulos (Caso 2)**

En la segunda versión del teorema integral de Cauchy se suponen condiciones adicionales sobre la curva, que ahora se toma con una forma particular.

Teorema 5.4.7. *Sea $f : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en el interior y en la frontera de un triángulo T contenido en el dominio D . Entonces:*

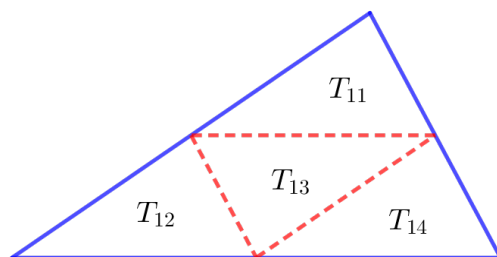
$$\int_C f dz = 0,$$

siendo C la frontera de T .

Demostración. Sea Δ el diámetro del triángulo T , esto es la distancia máxima entre puntos del mismo, y sea L la longitud de C , esto es el perímetro del triángulo T . Se nota que $\Delta = 0$ si y solo si $L = 0$ y, en este caso, el triángulo T se reduce a un solo punto y el resultado es trivial. Por ello, en adelante se supone $\Delta > 0$ y, por lo tanto, $L > 0$.

Uniando los puntos medios de los lados se forman cuatro triángulos congruentes T_{11} , T_{12} , T_{13} y T_{14} , cada uno con frontera correspondiente C_{1i} , ver la **Figura 18**

Figura 18: División del triángulo



Ahora se observa que, al integrar a lo largo de todos los subtrián-

gulos, las integrales sobre los segmentos internos se anulan. De esta manera:

$$\int_C f dz = \int_{C_{11}} f dz + \int_{C_{12}} f dz + \int_{C_{13}} f dz + \int_{C_{14}} f dz.$$

Sea T_1 el triángulo tal que el valor absoluto de la integral es máximo entre estos cuatro y sea C_1 su frontera. Entonces, por la desigualdad triangular, resulta:

$$\left| \int_C f dz \right| \leq 4 \left| \int_{C_1} f dz \right|.$$

Se nota que el triángulo T_1 tiene diámetro $\Delta_1 = \frac{1}{2}\Delta$ y perímetro $L_1 = \frac{1}{2}L$.

Esta construcción se repite con T_1 y luego con el triángulo obtenido T_2 , y así sucesivamente resultando la sucesión de triángulos $T_1, T_2, T_3, \dots$. Para cada índice n se tiene:

$$\left| \int_C f dz \right| \leq 4^n \left| \int_{C_n} f dz \right|,$$

además el triángulo T_n tiene diámetro $\Delta_n = \frac{\Delta}{2^n}$ y perímetro $L_n = \frac{L}{2^n}$.

Como $T_1 \supseteq T_2 \supseteq T_3 \supseteq \dots$ es una sucesión de conjuntos cerrados encajados, su intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$ no es vacía porque T es compacto. Dado que el diámetro Δ_n tiende a cero, la intersección es un conjunto unitario. Sea entonces $z_0 \in D$ tal que:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} T_n = \{z_0\}.$$

Puesto que la función f es holomorfa en z_0 , existe la derivada $f'(z_0)$. Definiendo para cada $z \neq z_0$ la función R como sigue:

$$R(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0),$$

resulta $\lim_{z \rightarrow z_0} R(z) = 0$. Ahora se tiene:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)R(z),$$

y como la función lineal $f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)$ es holomorfa en todo el plano $\mathbb{C}$ con derivada continua, por el caso ya probado del teorema integral de Cauchy su integral a lo largo de cualquier curva cerrada es cero. En particular, para cada triángulo T_n se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{C_n} f(z) dz &= \int_{C_n} [f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)] dz + \int_{C_n} (z - z_0)R(z) dz \\ &= \int_{C_n} (z - z_0)R(z) dz. \end{aligned}$$

Ahora dado cualquier $\varepsilon > 0$, también $\frac{\varepsilon}{L\Delta} > 0$ y existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |z - z_0| < \delta$ entonces $|R(z)| < \frac{\varepsilon}{L\Delta}$. Si el entero n se toma suficientemente grande para que $\Delta < 2^n\delta$, entonces para cada $z \in C_n$ se tiene $|z - z_0| \leq \Delta_n = \frac{\Delta}{2^n} < \delta$, de donde $|R(z)| < \frac{\varepsilon}{L\Delta}$. Por la desigualdad ML (proposición 5.3.4), resulta:

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_n} f(z) dz \right| &= \left| \int_{C_n} (z - z_0)R(z) dz \right| \leq \\ &\leq \Delta_n \left(\frac{\varepsilon}{L\Delta} \right) L_n = \frac{\Delta}{2^n} \frac{\varepsilon}{L\Delta} \frac{L}{2^n} = \frac{\varepsilon}{4^n}, \end{aligned}$$

y, por lo tanto:

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{C_n} f(z) dz \right| \leq 4^n \frac{\varepsilon}{4^n} = \varepsilon.$$

Puesto que ε es arbitrario, se concluye que $\left| \int_C f dz \right| = 0$ y, por lo tanto, $\int_C f dz = 0$. □

• **Dominio estrella (Caso 3)**

En la tercera versión del teorema de Cauchy considerada aquí, se suponen condiciones adicionales sobre el dominio de holomorfía, que ahora se toma con una forma especial. Un conjunto S del plano es una *estrella* si existe algún punto $z_0 \in S$ tal que, para todo $z \in S$, el segmento de recta que une a z_0 con z está contenido en S . Además de auténticas estrellas, esto incluye triángulos, cuadriláteros, óvalos, etcétera. Se nota que todo conjunto estrella es simplemente conexo.

Lema 5.4.1. *Si f es una función holomorfa en un abierto estrella H , entonces existe una función holomorfa $F : H \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $F'(z) = f(z)$ para cada $z \in H$.*

Es decir, toda función holomorfa en un abierto estrella posee alguna antiderivada.

Demostración. Siendo z_0 un punto de referencia de la estrella H , para cada $z \in H$ se define:

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(w) dw,$$

donde esta integral se calcula a lo largo del segmento de recta de z_0 a z . Como H es un conjunto abierto, ver **Figura 19**, para el punto $z \in H$ existe $r > 0$ tal que si $|w - z| < r$ entonces $w \in H$. Para cualquier $h \in \mathbb{C}$, si $|h| < r$, el triángulo con vértices z_0 , z , $z + h$ está contenido en H . Luego, f es holomorfa en este triángulo y su frontera y, por la versión anterior del teorema, se tiene:

$$\int_{z_0}^{z+h} f(w) dw + \int_{z+h}^z f(w) dw + \int_z^{z_0} f(w) dw = 0,$$

todas las integrales a lo largo de segmentos de recta. Es decir:

$$\int_{z_0}^{z+h} f(w) dw - \int_{z_0}^z f(w) dw = - \int_{z+h}^z f(w) dw,$$

o bien:

$$F(z+h) - F(z) = \int_z^{z+h} f(w) dw,$$

de donde, para $h \neq 0$:

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(w) dw.$$

Ahora bien, con algo de elaboración se nota que el número complejo $f(z)$ también se puede expresar como una integral desde z hasta $z+h$. Pues como z es constante para la variable w , se tiene:

$$\int_z^{z+h} f(z) dw = f(z) \int_z^{z+h} dw = hf(z),$$

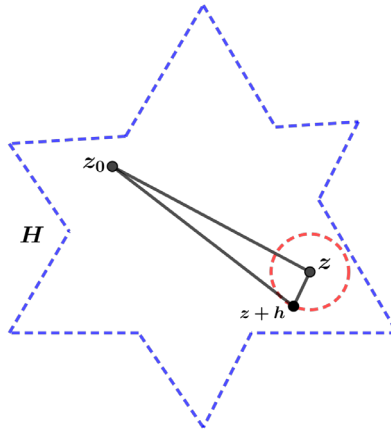
luego, finalmente:

$$\begin{aligned} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) &= \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(w) dw - \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(z) dw \\ &= \frac{1}{h} \int_z^{z+h} (f(w) - f(z)) dw. \end{aligned}$$

Como es holomorfa, la función f es continua en z y para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |w - z| < \delta$ implica $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$. Tomando $\delta \leq r$ y $|h| < \delta$, se tiene $0 < |w - z| < \delta$ para cada punto w en el segmento de recta entre z y $z+h$. Luego $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$ para estos valores y, por la desigualdad *ML* (**proposición 5.3.4**), resulta:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \frac{1}{|h|} \left| \int_z^{z+h} (f(w) - f(z)) dw \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|h|} \varepsilon |h| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Es decir, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z)$, lo cual significa que la función F es derivable en z con $F'(z) = f(z)$. □

Figura 19: Dominio estrella

Teorema 5.4.8. Si f es una función holomorfa en un abierto estrella H entonces:

$$\int_C f dz = 0,$$

para cualquier curva cerrada C contenida en H .

Demostración. Por los resultados anteriores. □

5.5. La fórmula integral de Cauchy

Un resultado sorprendente y muy especial de la teoría de funciones de variable compleja es que el valor de una función holomorfa en un punto interior a una curva cerrada está determinado completamente por los valores que toma la función a lo largo de la curva. Con precisión, eso se expresa en la siguiente igualdad conocida como *fórmula integral de Cauchy*.

Teorema 5.5.1. Sea f una función holomorfa en una región D , sea C una curva cerrada contenida en D y sea z_0 un punto en la componente

interior de esta curva. En tales condiciones se tiene:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Demostración. Sea S una circunferencia de centro z_0 y radio r contenida en el interior de la curva C . Entonces por el corolario 5.4.3 tenemos:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \int_S \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \int_S \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz + \int_S \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \\ &= f(z_0) \int_S \frac{dz}{z - z_0} + \int_S \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \\ &= 2\pi i f(z_0) + \int_S \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz. \end{aligned}$$

Siendo f continua en z_0 por ser holomorfa, dado $\varepsilon > 0$ también $\frac{\varepsilon}{2\pi} > 0$ y existe $\delta > 0$ tal que si tomamos $r = |z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$, de donde $\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi r}$. Ahora por la desigualdad **ML (proposición 5.3.4)**, y teniendo en cuenta que la longitud de la circunferencia S es $2\pi r$, obtenemos:

$$\left| \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| = \left| \int_S \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi r} (2\pi r) = \varepsilon.$$

Con ε arbitrario, el valor absoluto de la diferencia es cero y resulta la igualdad buscada. $\square$

A partir de la fórmula de Cauchy, se puede demostrar una fórmula similar para la función derivada.

Proposición 5.5.1. *En las condiciones del teorema 5.5.1 tenemos:*

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

Así que los valores de la derivada también dependen de los valores que toma la función *original* a lo largo de la curva.

Demostración. Sea $h \in \mathbb{C}$ tal que $|h| < \frac{r}{2}$. Por la fórmula de Cauchy (**teorema 5.5.1**) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{1}{2\pi i h} \int_C \left(\frac{f(z)}{z - z_0 - h} - \frac{f(z)}{z - z_0} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)(z - z_0)} dz. \end{aligned}$$

Ahora

$$\frac{1}{(z - z_0 - h)(z - z_0)} = \frac{1}{(z - z_0)^2} + \frac{h}{(z - z_0 - h)(z - z_0)^2},$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} + \frac{h}{2\pi i} \int_S \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)(z - z_0)^2} dz, \end{aligned}$$

en la última integral se ha cambiado la curva C por la circunferencia S . Dado que este conjunto S es compacto y la función f es continua, la imagen de S por f es compacta y, en particular, es un conjunto acotado. Sea $M > 0$ real tal que $|f(z)| \leq M$ para cada $z \in S$, se nota que para estos mismos puntos se tiene $|z - z_0 - h| \geq |z - z_0| - |h| = r - |h| > r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}$, y así:

$$\left| \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)(z - z_0)^2} \right| < \frac{M}{(\frac{r}{2})r^2} = \frac{2M}{r^3},$$

para cada $z \in S$. En consecuencia, por la desigualdad *ML* (**proposición 5.3.4**) tenemos:

$$\left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \right| \leq \frac{|h|}{2\pi} \frac{2M}{r^3} (2\pi r) = \frac{2M}{r^2} |h|.$$

Ahora existe el límite cuando h tiende a cero, y la derivada $f'(z_0)$ toma el valor indicado en el enunciado. $\square$

Este proceso que aplicamos a la función se puede repetir con la función derivada, lo cual tiene importantes consecuencias teóricas.

Proposición 5.5.2. *En las condiciones del teorema 5.5.1 tenemos:*

$$f''(z_0) = \frac{2}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz.$$

Demostración. De nuevo para $|h| < \frac{r}{2}$, y por los resultados anteriores:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f'(z_0 + h) - f'(z_0)}{h} - \frac{2}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i h} \int_C \left[\frac{f(z)}{(z - z_0 - h)^2} - \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} - \frac{2hf(z)}{(z - z_0)^3} \right] dz \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{h} \left[\frac{(z - z_0)^3 - (z - z_0 - h)^2(z - z_0) - 2h(z - z_0 - h)^2}{(z - z_0 - h)^2(z - z_0)^3} \right] dz \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_S \frac{f(z)}{h} \left[\frac{3(z - z_0)h^2 - 2h^3}{(z - z_0 - h)^2(z - z_0)^3} \right] dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{|h|} \frac{3r|h|^2 + 2|h|^3}{\left(\frac{r}{2}\right)^2 r^3} (2\pi r) = \frac{4M}{r^4} (3r|h| + 2|h|^2). \end{aligned}$$

El límite cuando h tiende a cero existe y la segunda derivada $f''(z_0)$ toma el valor indicado. $\square$

En primer lugar, esto significa que la función derivada $f'(z)$ también es derivable en el abierto D , luego también es holomorfa.

Corolario 5.5.2. *Si la función de variable compleja f es holomorfa en un dominio D , entonces existen todas las derivadas de f en D y son holomorfas en ese dominio.*

Esto implica en particular la **nota 4.3.1**, que se aceptó sin prueba. Ahora, más que eso, podemos dar una expresión precisa para todas las derivadas que, en realidad, dependen de los valores que toma la función en la curva. La igualdad que sigue es la *fórmula integral general de Cauchy*.

Proposición 5.5.3. *En las condiciones del teorema 5.5.1, para cada entero $k \geq 0$ tenemos:*

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz.$$

Demostración. Por inducción sobre k . Para $k = 0$ es la fórmula de Cauchy (**teorema 5.5.1**). Suponiendo la validez de la fórmula para k , tenemos:

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(z_0) &= (f')^{(k)}(z_0) = \\ &= \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \frac{k!}{2\pi i} (k+1) \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+2}} dz, \end{aligned}$$

la última igualdad por integración por partes (**proposición 5.3.6**). En consecuencia, obtenemos:

$$f^{(k+1)}(z_0) = \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+2}} dz,$$

lo cual completa el paso inductivo. □

La fórmula general se puede utilizar para calcular con facilidad muchas integrales.

Ejemplo 5.5.1. Si C es la circunferencia de radio 4 y centro el origen entonces:

$$\int_C \frac{\operatorname{sen} z}{(z - \pi)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \operatorname{sen}''(\pi) = -\pi i \operatorname{sen}(\pi) = 0.$$

Ejemplo 5.5.2.

$$\int_{S^1} \frac{e^z + \operatorname{sen} z}{z} dz = 2\pi i (e^0 + \operatorname{sen} 0) = 2\pi i.$$

Ejercicios para el capítulo 5

5.1. Encuentre una parametrización para los siguientes segmentos de recta:

a) De 0 a $3 + 4i$,

b) de $3 + 4i$ a $2 + 5i$,

c) de 0 a z_1 ,

d) de z_1 a z_2 .

5.2. Encuentre una parametrización para la elipse con ecuación cartesiana:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

5.3. Con la definición de integral, pruebe que $\int_{S^1} z^n dz = 0$ para todo entero $n \neq -1$.

5.4. Encuentre la integral $\int_C \bar{z} dz$ para cada una de las siguientes curvas C :

a) $z(t) = 1 + it, 0 \leq t \leq 2,$

b) $z(t) = 1 - t + it, 0 \leq t \leq 1,$

c) $z(t) = e^{it} - 1, 0 \leq t \leq 2\pi.$

5.5. Evalúe la integral $\int_C \Re(z) dz$ para cada una de las siguientes curvas:

a) C es el segmento de recta desde el origen hasta $1 + i$,

b) C es la porción de la parábola $y = x^2$ desde 0 hasta $1 + i$.

5.6. Muestre que $\int_C (2\bar{z} - 1) dz = 2i$, si C recorre el triángulo con vértices 0, 1, i en ese orden.

5.7. Muestre que, siendo S^1 la circunferencia unidad,

$$\left| \int_{S^1} \frac{dz}{3 + 5z^2} \right| \leq \pi.$$

5.8. Evalúe las siguientes integrales por cualquier curva que una los puntos. Observe que en realidad no es necesario encontrar parametrización alguna.

a) $\int_0^{1+i\sqrt{3}} 3z^2 dz,$ b) $\int_0^{\pi i} e^z dz,$ c) $\int_{-11}^{-10} \frac{dz}{(z+9)^2}.$

5.9. Encuentre las siguientes integrales. Puede utilizar el teore-

ma de Cauchy (cuando aplique) y también la igualdad $\frac{1}{z^2 + 9} = \frac{1}{6i} \left(\frac{1}{z - 3i} - \frac{1}{z + 3i} \right)$.

$$\text{a) } \int_{|z-i|=1} \frac{dz}{z^2 + 9}, \quad \text{b) } \int_{|z-2i|=2} \frac{dz}{z^2 + 9}.$$

5.10. Encuentre $\int_{S^1} f(z) dz$ para las siguientes funciones.

$$\text{a) } f(z) = \frac{e^z}{z - 2i}, \quad \text{b) } f(z) = z^4 + iz + \Im m(z).$$

5.11. Sean $a, b \in \mathbb{C}$ números complejos y $r > 0$ un radio real positivo. Descomponiendo en fracciones parciales y utilizando el teorema de Cauchy, muestre que:

$$\int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)(z-b)} = \begin{cases} 0, & \text{si } |a| < r \text{ y } |b| < r, \\ \frac{2\pi i}{a-b}, & \text{si } |a| < r < |b|, \\ \frac{2\pi i}{b-a}, & \text{si } |b| < r < |a|, \\ 0, & \text{si } |a| > r \text{ y } |b| > r. \end{cases}$$

5.12. Encuentre $\int_{S^1} f(z) dz$ para las siguientes funciones.

$$\text{a) } f(z) = \frac{e^z}{z - 2i}, \quad \text{b) } f(z) = \frac{e^z}{z(z-1)^2}.$$